# سلسلۂ نصابات علمیۂ جامعۂ عثمانیہ

# نصاب ذیلی ریاضی

## حصہ دوم

برائے طبیعیات بی۔ایس سی

تالیف


مولوی محمد عبدالرحمن خانصاحب بی۔ایس سی آنرز (لندن)

اسوسیئیٹ آف دی رائل کالج آف سائنس (لندن)۔ فیلو آف دی رائل اسٹرانامیکل سوسائٹی۔ فیلو آف دی فزیکل سوسائٹی لندن

سابق صدر کلیۂ جامعۂ عثمانیہ حیدرآباد دکن



سنہ ۱۳۶۲ھ م سنہ ۱۳۵۲ف م سنہ ۱۹۴۳ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

(۱۰ط۱۷)

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی وغیرہ حصۂ دوم کی تالیف میں وہی اصول پیش نظر رکھے گئے ہیں جو حصۂ اوّل کی تالیف کے وقت تھے۔ حتی الامکان جدید و مستند ترین طریقے استعمال کیے گئے اور مبتدیوں کی تمام مشکلات کو آسان کرنے کی کوشش کی گئی۔ نصاب کے حدود کے اندر ابتدائی امور سے آغاز کرکے کافی بلند پایہ نتائج تک بحث کی گئی ہے۔ ہر مسئلہ سے متعلق متعدد توضیحی مثالیں حل کرکے بتائی گئی ہیں۔ جا بجا ہندسی شکلیں صحت و وضاحت کے ساتھ کھینچی گئی ہیں تاکہ طالب علم کو ان کے سمجھنے میں دقت نہ ہو۔ مشق کے لیے جو سوالات دیے گئے ہیں نسبتۂ سلیس ہیں اور مختلف شعبہ جات کے لیے کارآمد ہو سکتے ہیں۔

افسوس ہے کہ نصاب کی مجبوریوں کی وجہ سے مجسّمات کے ہندسۂ تحلیلی میں احصار کا خاطر خواہ اطلاق نہیں بتایا جا سکا۔ اور نہ تفرقی مساواتوں کے اقسام اور ان کے حل کے طریقوں پر زیادہ تفصیل کے ساتھ لکھا جا سکا۔ بریں ہم قوی امید ہے کہ اس نصاب پر اچھی طرح حاوی ہو جانے کے بعد طبیعیات، انجینیری اور کیمیا کے طالب علم اعلیٰ ریاضی کے اکثر و بیشتر مسائل بآسانی سمجھ سکیں گے اور مزید

کوشش سے بطور خود نظری طبیعیات پر عبور حاصل کرسکینگے ۔

اس نصاب کی تیاری میں زیادہ تر مندرجۂ ذیل کتابوں سے استفادہ کیا گیا:-

(1) Elements of the Differential and Integral Calculus by *W.A. Granville, P.F. Smith and W.R. Longley.*

(2) The Calculus by *Hans Dalakar* and *H.E. Hartig.*

(3) *D. Humphrey's* Advanced Mathematics.

(4) F.*S. Wood and F.H. Bailey's* A course in Mathematics (2 Volumes).

(5) F.*G.W. Brown's* Higher Mathematics.

(6) *Benjamin Williamson's* Elementary Treatise on the Differential Calculus.

(7) *W.E. Byerley's* Elements of the Integral Calculus.

# فہرستِ مضامین

## نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ایس سی وغیرہ

## حصۂ دوم (احصاء)

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

# نصابِ ذیلی ریاضی

برائے

## طبیعیات بی۔ اے وغیرہ

## حصّۂ دوم

# احصاء

# پہلا باب

## مبادیات

احصاء ریاضی کے اُس زبردست شعبہ کا نام ہے جس میں مقادیر کے تغیرات اور اُن کے باہمی تعلقات معلوم کیے جاتے ہیں۔ اس کے دو بڑے حصّے ہیں: ایک حصّہ تفرقی احصاء کہلاتا ہے اور دوسرا تکملی احصاء۔ تفرقی احصاء میں مقادیر کے تغیر کی شرحوں اور ان کے خواص سے بحث کی جاتی ہے! تکملی احصاء اس کی ضد ہے اور اس میں شرح تغیر کی مدد سے خود متغیر مقدار کی تعیین کی جاتی ہے۔

یہ عجیب اتفاق ہے کہ احصاء کے سب سے پہلے بانی یعنی ارشمیدس (Archimedes) نے پہلے تکملی احصاء کے مسائل حل کرنے کے طریقے دریافت کیے مثلاً منحنی خطوں سے محصور رقبوں کی تعیین وغیرہ اور اس کے بعد اپنے ایجاد کردہ لولبی کے خط مماس کی تلاش میں تفرقی احصاء کے اصول استعمال کیے۔ گویا نیوٹن (Newton) اور لائبنٹس (Leibniz) سے

جو بلاشبہ احصاء کے موجد سمجھے جاتے ہیں تقریباً دو ہزار برس پہلے ارشمیدس نے احصاء کے طریقے استعمال کر کے ریاضی کے بعض اہم اور کارآمد مسائل حل کیے [واضح ہو کہ ارشمیدس' افلاطون کی وفات کے ساٹھ سال بعد سائراکیوس (Syracuse) صقلیہ میں پیدا ہوا]۔ ارشمیدس کے بعد کیپلر (Kepler) نے ۱۶۱۵ء میں شراب کے پیپوں' وغیرہ کا حجم ناپنے سے متعلق ایک کتاب لکھی جس میں تکملی احصاء کے طریقے کام میں لائے گئے۔ سترہویں صدی کے ریاضی دان جیسے کوالیئری (Cavalieri)' فیرما (fermat)' والس (Wallis)' بیرو (Barrow) وغیرہ جس قسم کی تحقیقات میں مصروف تھے اس کا یہ لازمی نتیجہ تھا کہ نیوٹن اور لائبنٹس کے ہاتھوں احصاء کی باضابطہ تنظیم عمل میں آئی۔

قبل اس کے کہ ہم احصاء کے اصول اور طریقۂ عمل پر بحث کریں بعض اصطلاحوں اور ان کے صحیح مفہوم سے واقفیت ضروری ہے۔ ریاضی کے مختلف شعبوں سے طالب علم کو اب تک جو اصطلاحیں معلوم ہوئی ہیں ان میں تفاعل' تابع متغیر' متغیر متبوع اور مستقل بہت ضروری ہیں۔ جب کبھی دو مقداروں میں اس قسم کا تعلق ہوتا ہے کہ ان میں سے ایک کے اندر کوئی بھی تغیر واقع ہوتا ہے تو دوسری مقدار میں بھی اس کے متناظر ایک تغیر پیدا ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں موخر الذکر مقدار کو پہلی مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔ اس کتاب میں جو تفاعل استعمال ہونگے ان کو دو حصوں میں تقسیم کرسکتے ہیں:۔ جبری اور ماورائی۔

جبریہ تفاعل محدود رقموں پر مشتمل ہوتے ہیں۔ یہ رقمیں جمع' تفریق' ضرب' تقسیم اور جذر کے اعمال سے مربوط ہوتی ہیں۔

جو تفاعل جبریہ نہ ہوں ماورائی کہلاتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف جبریہ اور ابتدائی ماورائی تفاعلوں پر بحث کی جائیگی۔

جبریہ تفاعلوں کی مثالیں:۔

(۱) $2\text{لا}^5 + \frac{3}{4}\text{لا}^4 - 7\text{لا}^3 - \text{لا}^2 + 3$ لا کا کثیر رقمی تفاعل ہے۔

(۲) $\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}^2} + \text{لا} + \text{ج}$ لا کا غیر منطق تفاعل ہے۔

(۳) $\frac{۲\ لا^{۳} + ۳\ لا - ۵}{لا^{۲} - ۴\ لا + ۱}$ منطق کسر ہے۔

ماورائی تفاعلوں کی مثالیں:-

(۱) جب لا — علمِ مثلث سے متعلق تفاعل

(۲) جم$^{-۱}$ لا — مقلوب مثلثی تفاعل

(۳) لوگ$_{و}$ لا، لوگ$_{۱۰}$ لا — لوکارتمی تفاعل

(۴) و$^{لا}$ — قوت نمائی تفاعل

**تفاعلی ترقیم** — جب کسی جماعت یا نوع کے (نہ کہ کسی خاص) تفاعل سے بحث کرنی مقصود ہو تو اس جماعت یا نوع کے تفاعل کو ف (لا) کے ذریعہ تعبیر کرتے ہیں۔ پڑھتے وقت اس کو "لا کا ف۔ تفاعل" یا مختصراً "لا کا ف" کہتے ہیں۔ اسی طرح فا (لا) اور فہ (لا) وغیرہ بھی اس مقصد کے لیے عام طور پر مروج ہیں۔

اس قسم کی عام تفاعلی ترقیم سہولت کی خاطر بطور اختصار کسی ایک خاص تفاعل کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔ مثلاً

ف (لا) سے $۲\ لا^{۳} + لا^{۲} + ۳\ لا - ۵$ مراد لی جاسکتی ہے۔ اور ایسی صورت میں لا کے مصرحہ بالا کثیر رقمی جملہ کو اس کا "ف۔تفاعل" قرار دیتے ہیں۔ اس طرح فا (لا) سے جب لا مراد لی جاسکتی ہے اور لا کی جیب کو اس کا فا۔ تفاعل قرار دیا جاتا ہے۔ اس ترقیم کے بموجب اگر ف (ا) لکھا جائے تو یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ اس سے مراد

$۲\ ا^{۳} + ا^{۲} + ۳\ ا - ۵$ ہے،

اور اگر ف (۳) لکھا جائے تو اس سے مراد

$۲\ (۳)^{۳} + (۳)^{۲} + ۳ \times ۳ - ۵$ ہے،

اسی طرح ف (ا - لا) سے مراد $۲\ (ا - لا)^{۳} + (ا - لا)^{۲} + ۳\ (ا - لا) - ۵$، ہے۔

اور فا (۲ + لا) سے مراد جب (۲ + لا) ہے وغیرہ۔

**متبوع متغیر اور تابع متغیر کا مفہوم** ۔ اگر کسی مساوات میں صرف دو ہی متغیر ہوں تو ان میں سے ایک متغیر کو خاص خاص قیمتیں دی جا سکتی ہیں اور ان کے لحاظ سے دوسرے متغیر کی متناظر قیمتیں دریافت ہو جاتی ہیں۔ جس متغیر کو اس طرح خاص خاص قیمتیں دی جاتی ہیں متبوع متغیر کہلاتا ہے اور دوسرا متغیر تابع متغیر یا تفاعل کہلاتا ہے۔

**وقفہ** ۔ سہولت کی خاطر بلکہ بعض اوقات بالالتزام متبوع متغیر کی وسعت محدود کر دی جاتی ہے۔ مثلاً فرض کرو

$$\text{ما} = \sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$$

خیالی مقادیر سے بچنے کے لیے لا کو + ۱ سے زیادہ یا - ۱ سے کم قیمتیں نہیں دی جانی چاہییں۔ اس تحدید کو یہ کہہ کر ظاہر کیا جاتا ہے کہ لا وقفہ (-۱، +۱) کے وقفہ اور اس کے مشمول نقطوں کے اندر واقع ہے۔ تحریر کے ذریعہ یہ مفہوم اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $-\text{۱} \leqq \text{لا} \leqq \text{۱}$

عام طور پر اگر لا کی سعت ا اور ب عددوں کے مابین ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا وقفہ (ا، ب) کے اندر واقع ہے۔ اور لکھا جاتا ہے $\text{ا} \leqq \text{لا} \leqq \text{ب}$

اگر کوئی ایک یا دونوں سرے پر کے نقطوں کو وقفہ سے خارج کرنا مقصود ہو تو حسب ضرورت مساوات کی ایک یا دونوں علامتیں متروک کر دی جاتی ہیں۔

جب یہ بتانا مقصود ہوتا ہے کہ لا کوئی سی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے تو لکھا جاتا ہے

$$-\infty < \text{لا} < \infty$$

**تفاعل محدود یا معروف** ۔ اگر ف (لا) کی کوئی قیمت ہوتی ہے جبکہ لا = ا تو کہا جاتا ہے کہ یہ تفاعل لا = ا پر محدود یا معروف ہے

وحید القیمت اور کثیر القیمت تفاعلوں کا مفہوم۔ اگر کسی وقفہ کے اندر متبوع متغیر کی ہر قیمت کے لیے کسی تفاعل کی صرف ایک ہی متناظر قیمت ہوتی ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ تفاعل وقفۂ مذکور کے اندر وحید القیمت ہے۔ اور اگر تفاعل متبوع متغیر کی ہر قیمت کے لیے ایک سے زیادہ متناظر قیمتیں رکھتا ہے تو اس کو کثیر القیمت کہتے ہیں۔

# مثالیں

(۱) اگر ف(لا) = ۲لا$^{۳}$ + $\frac{۱}{۲}$ لا$^{۲}$ + ۳لا − ۴ تو بتاؤ کہ ف(۲) = ۲۰
اور ف($\sqrt{۲}$) = ۷$\sqrt{۲}$ − ۳

(۲) اگر فہ(لا) = مس لا تو فہ(لا + ما) = $\frac{\text{فہ(لا) + فہ(ما)}}{\text{۱ − فہ(لا) فہ(ما)}}$

(۳) اگر فا(لا) = جب لا تو فا(۳لا) = ۳ فا(لا) − ۴ {فا(لا)}$^{۳}$

(۴) اگر ف(و) = ا$^{و}$ − ا$^{-و}$ تو ف(−و) = −(ا$^{و}$ − ا$^{-و}$)
= − ف(و)

(۵) اگر فہ(و) = ا$^{و}$ + ا$^{-و}$ تو فہ(−و) = فہ(و)
اور فہ(۰) = ۲

(۶) اگر ف(لا) = لوک(لا) تو ف(لا$^{م+ن}$) = م ف(لا)
+ ن ف(لا)

(۷) اگر فا(و) = ء$^{و}$ تو فا(−و) = $\frac{۱}{\text{فا(و)}}$

(۸) اگر فہ(ما) = مس$^{-۱}$ ما جس میں − $\frac{ٹ}{۲}$ < فہ(ما) < $\frac{ٹ}{۲}$
تو ثابت کرو کہ فہ($\frac{۱}{۲}$) + فہ($\frac{۱}{۳}$) = $\frac{ٹ}{۴}$

(۹) مندرجۂ ذیل مساواتوں میں خیالی مقادیر سے بچنے[۱] کے لیے لا کو کن وقفوں تک محدود کرنا چاہیے؟

(ل) $ما = \sqrt{ک^2 - لا^2}$

(ب) $ما = \sqrt{(لا - م)(لا - ن)}$ ، $0 < م < ن$

# دُوسرا بابُ

## انتہائیں اور تسلسل

**متغیر کی انتہا۔** اگر لا اس طرح تغیر قبول کرتا ہے کہ لا ـ اُ جس میں اُ ایک مستقل ہے، بالآخر کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو عدداً کمتر ہو جائے اور کمتر رہے تو لا کی نسبت کہا جاتا ہے کہ وہ اُ تک بطور ایک انتہا کے پہنچتا ہے۔

**تفاعل کی انتہا۔** درانحالیکہ لا بطور انتہا کے اُ تک پہنچتا ہے، اگر ف (لا) ـ ل کی عددی قیمت، جس میں ل ایک مستقل ہے، بالآخر کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو کمتر ہو جائے اور کمتر رہے تو کہا جاتا ہے کہ ف (لا) بطور انتہا کے ل تک پہنچتا ہے۔

اِس امر کو ظاہر کرنے کے لیے کہ لا جیسے جیسے اُ تک بطور انتہا کے پہنچتا ہے ف (لا) کی انتہا ل ہے، حسبِ ذیل طریقۂ ترقیم اختیار کیا جائیگا:

نہا<sub></sub> ف (لا) = ل  (لا ← اُ)

متغیر متبوع جیسے جیسے ایک انتہا تک پہنچتا ہے اس کے تفاعل مختلف

ہیئتوں میں رُونما ہوتے ہیں۔ یہاں مندرجۂ ذیل اقسام کے تفاعلوں ہی کی انتہا کی تعریف سے متعلق بحث کی جائیگی:-

**قسم (۱)** جبکہ لا = ا کے لیے ف (لا) محدود یا معرّف ہے،

اور $\lim\limits_{\text{لا} \to \text{ا}}$ ف (لا) = ف (ا)

**مثال** ف (لا) = لا^۲، ف (۳) = ۹ اور $\lim\limits_{\text{لا} \to ۳}$ ف (لا) = ۹

**قسم (۲)** جبکہ لا = ا کے لیے ف (لا) محدود یا معرف نہیں ہے

لیکن بریں ہم $\lim\limits_{\text{لا} \to \text{ا}}$ ف (لا) موجود ہے۔

**مثال** ف (لا) = $\frac{(\text{لا}+۲)^۲ - ۴}{\text{لا}}$، ف (۰) محدود نہیں ہے

لیکن $\lim\limits_{\text{لا} \to ۰}$ ف (لا) = ۴

**قسم (۳)** جبکہ لا = ا کے لیے ف (لا) محدود نہیں ہے

اور $\lim\limits_{\text{لا} \to \text{ا}}$ ف (لا) معدوم ہے۔

**مثال** ف (لا) = $\frac{۱}{۱ - \text{لا}}$، ف (۱) محدود نہیں ہے

اور $\lim\limits_{\text{لا} \to ۱} \frac{۱}{۱ - \text{لا}}$ معدوم ہے۔

**نہایتوں سے متعلق مسائل۔** ذیل کے مطالعہ میں نہایتوں سے متعلق پانچ مسئلے خاص طور پر کارآمد ہیں۔ وہ یہاں بلا ثبوت بیان کردیے جاتے ہیں۔

**مسئلہ (۱)** - متغیروں کی محدود تعداد کے جبری مجموعہ کی انتہا اُن کی انتہاؤں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے:

نہا (و۱ ± و۲ ± . . . ± ون) = نہا و۱ ± نہا و۲ ± ... ± نہا ون

**مسئلہ (۲)** متغیروں کی ایک محدود تعداد کے حاصل ضرب کی انتہا ان کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے:

$$\text{نہا}\,(\text{و}_1 \times \text{و}_2 \times \cdots \times \text{و}_\text{ن}) = \text{نہا}\,\text{و}_1 \times \text{نہا}\,\text{و}_2 \times \cdots \times \text{نہا}\,\text{و}_\text{ن}$$

**مسئلہ (۳)** دو متغیروں کے حاصل قسمت کی انتہا ان کی انتہاؤں کے حاصل تقسیم کے مساوی ہے:

$$\text{نہا}\,\frac{\text{و}_1}{\text{و}_2} = \frac{\text{نہا}\,\text{و}_1}{\text{نہا}\,\text{و}_2}\,،\quad \text{نہا}\,\text{و}_2 \neq ۰$$

**مسئلہ (۴)** اگر ایک متغیر و مسلسل بڑھتا جاتا ہے لیکن ایک مستقل م سے نہیں بڑھتا تو وہ ایک انتہا تک پہنچتا ہے جو م سے کمتر یا م کے مساوی ہے۔

**مسئلہ (۵)** اگر ایک متغیر و مسلسل گھٹتا جاتا ہے لیکن ایک مستقل م سے کبھی کمتر نہیں ہوتا، تو وہ ایک انتہا تک پہنچتا ہے جو م سے بڑا یا م کے مساوی ہے۔

**لامتناہی کا تخیل۔** ایک متغیر و جو کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی بڑا ہو زائد ہو جاتا ہے تو اس کے متعلق کہا جاتا ہے کہ وہ بغیر کسی حد یا انتہا کے بڑا ہوتا ہے یا لامتناہی ہو جاتا ہے۔ یہ امر بذریعہ علامت اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے:

$$\text{و} \to \infty$$

ایک متغیر و جو کسی بھی منفی عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو کمتر ہو جاتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ بغیر حد یا انتہا کے گھٹتا ہے یا منفی طور پر لامتناہی ہوتا ہے۔ بذریعہ علامت اس کو یوں ظاہر کرتے ہیں:

$$\text{و} \to -\infty$$

یہ یاد رہے کہ علامت $\infty$ کسی عدد کو تعبیر نہیں کرتی ہے۔ پس ایسی تحریر

جیسے ۵ ÷ ∞ سے احتراز کرنا چاہیے۔ معہذا اگر و ⟵ ∞ تو ایسی صورت میں ∞ کو و کی انتہا نہیں تصور کرنا چاہیے۔ اس لیے کہ انتہا ہمیشہ ایک معین یا محدود عدد ہے۔

مثال (۱) $\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} (۴\,\text{لا}^۳ + ۵\,\text{لا}^۲ - ۳\,\text{لا})$ دریافت کرو۔

مسئلہ (۱) سے $\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} (۴\,\text{لا}^۳ + ۵\,\text{لا}^۲ - ۳\,\text{لا}) = \underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}}\, ۴\,\text{لا}^۳$

$+ \underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}}\, ۵\,\text{لا}^۲ - \underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}}\, ۳\,\text{لا}$

$= ۴ + ۵ - ۳ = ۶$

مثال (۲) $\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \dfrac{(\text{لا}^۲+۱)(\text{لا}^۳-۲)}{(\text{لا}+۲)}$ دریافت کرو۔

مسائل (۱)، (۲) اور (۳) سے

$$\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}^۲+۱)(\text{لا}^۳-۲)}{(\text{لا}+۲)} = \frac{\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}}(\text{لا}^۲+۱)\ \underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}}(\text{لا}^۳-۲)}{\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}}(\text{لا}+۲)}$$

$$= \frac{۱۰ \times ۲۵}{۵} = ۵۰$$

مثال (۳) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} (۲ + ۳\,\text{لا} + ۴\,\text{لا}^۲)^۳$ دریافت کرو۔

مسائل (۲) اور (۳) سے $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} (۲+۳\,\text{لا}+۴\,\text{لا}^۲)^۳$

$= (۲ + \underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\, ۳\,\text{لا} + \underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\, ۴\,\text{لا}^۲)^۳$

$= (۲ + ۰ + ۰)^۳ = ۸$

مثال (۴) $\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^۳ - ۲۷}{\text{لا} - ۳}$ دریافت کرو۔

$$\frac{\text{لا}^{۳} - ۲۷}{\text{لا} - ۳} = \frac{(\text{لا} - ۳)(\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} + ۹)}{(\text{لا} - ۳)}$$

مسئلہ (۲) سے $\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} - ۲۷}{\text{لا} - ۳} = \underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا} - ۳)}{(\text{لا} - ۳)}$

$$\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} (\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} + ۹)$$

$\frac{\text{لا} - ۳}{\text{لا} - ۳} = ۱$ لا کی ہر قیمت کے لیے سوائے لا = ۳

جب لا = ۳ یہ کسر محدود نہیں ہے۔ لیکن اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا کی قیمت کبھی ۳ کے مساوی نہیں ہونے پاتی تو $\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \frac{\text{لا} - ۳}{\text{لا} - ۳} = ۱$

پس $\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۳} - ۲۷}{\text{لا} - ۳} = \underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} ۱ \times (\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} + ۹) = ۲۷$

مثال (۵) $\underset{\text{لا}\to \infty}{\text{نہا}} \frac{۳\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۲}{۲\text{لا}^{۲} + ۵}$ دریافت کرو۔

$$\frac{۳\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۲}{۲\text{لا}^{۲} + ۵} = \frac{۳ + \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۲}{\text{لا}^{۲}}}{۲ + \frac{۵}{\text{لا}^{۲}}}$$

$$\therefore \underset{\text{لا}\to \infty}{\text{نہا}} \frac{۳\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۲}{۲\text{لا}^{۲} + ۵} = \underset{\text{لا}\to \infty}{\text{نہا}} \frac{۳ + \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۲}{\text{لا}^{۲}}}{۲ + \frac{۵}{\text{لا}^{۲}}} = \frac{۳}{۲}$$

**تفاعل کا تسلسل** — کسی تفاعل ف (لا) کی نسبت کہا جاتا ہے کہ وہ نقطہ لا = ا پر مسلسل ہے اگر کسی بھی طرح سے جیسے جیسے لا ← ا تو ف (لا) کی انتہا ف (ا) کے مساوی ہے۔
پس کسی نقطہ لا = ا پر مسلسل ہونے کے لیے لازمی ہے کہ تفاعل اِس نقطہ پر محدود یا معرّف ہو۔ اس تفاعل کی

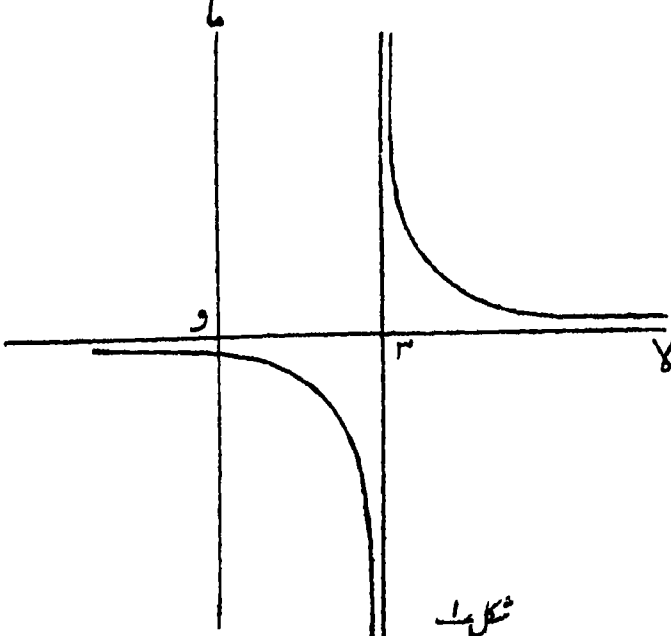
انتہا موجود ہونی چاہیے جیسے کہ لا ← ا اور یہ انتہا لا = ا پر تفاعل کی قیمت کے مساوی ہونی چاہیے۔

اگر کوئی تفاعل لا = ا پر مسلسل نہ ہو تو کہا جاتا ہے کہ وہ لا = ا پر غیر مسلسل ہے۔ اور اگر کسی وقفہ کے ہر نقطہ پر کوئی تفاعل مسلسل ہو تو کہا جاتا ہے کہ وہ وقفہ مذکور کے اندر مسلسل ہے۔

اس مطالعہ میں جن تفاعلوں پر بحث کی جائیگی وہ ان کی تعریف کی پوری سعت کے اندر مسلسل ہیں شاید باستثنا متغیر متبوع کی بعض انفرادی قیمتوں کے۔

## کسی نقطہ پر غیر مسلسل تفاعلوں کی چند مثالیں۔

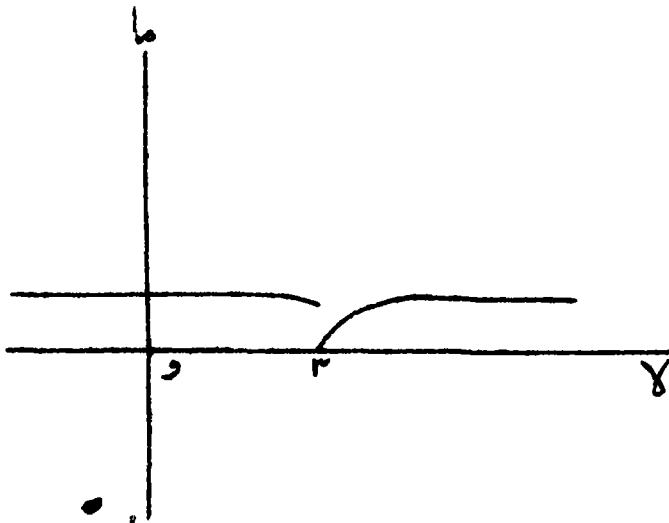
مثال (۱)　ما = $\frac{۱}{\text{لا} - ۳}$

یہ تفاعل لا = ۳ پر محدود یا معرّف نہیں ہے۔ اس لیے وہ لا کی



شکل ۱

اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے کمتر رہے تو ما منفی لاتناہی ہو جاتا ہے۔ (دیکھو شکل ۱)۔ اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے زائد رہے تو ما مثبت لاتناہی ہو جاتا ہے۔ پس واضح ہے کہ تسلسل کے لیے جو شرائط عائد ہیں تفاعل مذکور ان کو نقطہ لا = ۳ پر پورا نہیں کرتا ہے۔
شکل سے واضح ہے کہ یہ غیر محدود عدم تسلسل کی مثال ہے۔

مثال (۲) $ما = \frac{۲^{\frac{۱}{لا-۳}} + ۱}{۳^{\frac{۱}{لا-۳}} + ۱}$

یہ تفاعل لا = ۳ پر محدود نہیں ہے اور اس لیے لا کی اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ (دیکھو شکل ۲)۔
اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے کمتر رہتا ہے تو

شکل ۲

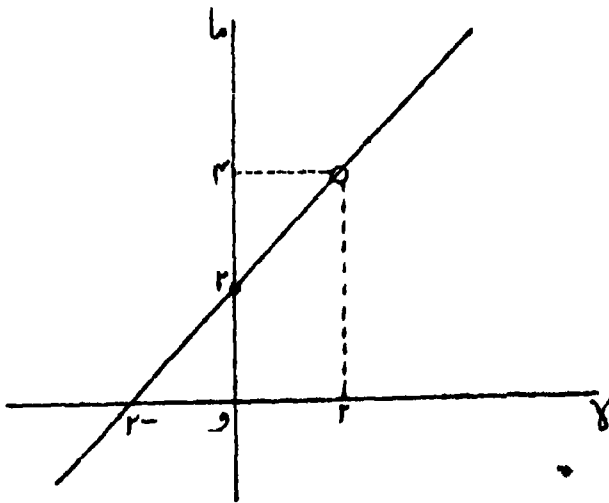
$نہا_{لا \to ۳}$ ما = ۱ - ۱ور اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے زائد رہتا ہے تو

نہا ما = ۰ ۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ محدود عدم تسلسل کی
لا←
مثال ہے ۔

مندرجۂ بالا ہر دو تفاعل کی قیمت اچانک تبدیل ہو جاتی ہے جبکہ متغیر متبوع کی مقدار میں (مصرحہ نقطوں پر) ذرا بھی تبدیلی واقع ہوتی ہے ۔

مثال (۳) ما = $\frac{\text{لا}^2 - 1}{\text{لا} - 1}$

یہ تفاعل لا = ۱ پر محدود یا معرّف نہیں ہے ۔ اِس لیے وہ لا کی اس قیمت پر غیر مسلسل ہے ۔ جبکہ لا ← ۱ کسی بھی طریقہ پر بشرطیکہ لا ≠ ۱، تو ما کی انتہا ۲ ہے ۔

شکل ۳ میں اس تفاعل کی جو ترسیم کھینچی گئی ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ وہ خطِ مستقیم ما = لا + ۱ ہے باستثنائے خط کے اس نقطہ کے جو لا = ۱ کے متناظر ہے ۔

شکل ۳

(۱) اور (۲) مثالوں کے عدم تسلسل اور مثال (۳) کے عدم تسلسل میں

بین فرق ہے - اس تیسری مثال میں تفاعل اچانک نہیں بدلتا جبکہ لا کی قیمت میں خفیف سی تبدیلی واقع ہوتی ہے - تفاعل کی مساوات جب اس کو محدود کرنے میں قاصر رہتی ہے تو اس قسم کے عدم تسلسل یوں رفع کیے جاسکتے ہیں کہ تفاعل کو متعلقہ نقاط پر مناسب طریقہ پر محدود یا معرّف کردیا جائے۔ مثلاً مثال زیرِ بحث میں تفاعل کی قیمت ۲ مقرر کردی جائے جبکہ لا = ۱ - ایسی صورت میں لا = ۱ پر تسلسل کے تمام شرائط مکمل ہوجاتے ہیں۔

# مثالیں

(۱) مندرجۂ ذیل تفاعلوں کی اگر کوئی انتہا موجود ہو تو اس کی تعیین کرو۔

(ل) $\underset{\text{لا}\to 3}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}$　　جواب - انتہا = $\frac{64}{27}$

(ب) $\underset{\text{لا}\to 5}{\text{نہا}}\frac{\text{لا}^{2}-25}{\text{لا}-5}$　　جواب - انتہا = ۱۰

(ج) $\underset{\text{لا}=0}{\text{نہا}}\frac{\text{لا}^{3}+2\text{لا}}{\text{لا}^{3}+2\text{لا}^{2}}$　　جواب - کوئی انتہا نہیں

(د) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}\frac{\text{جب}^{2}\text{لا}-\text{جم}^{2}\text{لا}}{4+\text{جم}\,\text{لا}}$　　جواب - انتہا = $-\frac{1}{5}$

(ہ) $\underset{\text{لا}\to -1}{\text{نہا}}\frac{\text{لا}^{3}+1}{\text{لا}+1}$　　جواب - انتہا = ۳

(و) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}\frac{\text{جب}\,2\text{لا}}{\text{جب}^{2}\text{لا}}$　　جواب - کوئی انتہا نہیں

(ز) $\underset{\text{لا}\to 2}{\text{نہا}}\frac{\sqrt{\text{لا}+1}+\sqrt{\text{لا}-2}}{\sqrt{\text{لا}^{2}-1}}$　　جواب - انتہا = ۱

(ح) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{۵\text{لا}^{۲}+۱}{۷\text{لا}^{۲}-۱}$ جواب۔ انتہا $= \frac{۵}{۷}$

(ط) $\underset{\text{لا}\to۳}{\text{نہا}} \frac{۳\text{لا}^{۲}-۱}{\text{لا}-۳}$ جواب۔ کوئی انتہا نہیں

(ی) $\underset{\text{لا}\to۳\text{ع}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲}-۹\text{ع}^{۲}}{\text{لا}-۳\text{ع}}$ جواب۔ انتہا $= ۶\text{ع}$

(۲) اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے $\text{لا}^{\text{ن}}$ ایک مسلسل تفاعل ہے۔

(۳) بتاؤ کہ لا کا کثیر رقمی جملہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہوتا ہے۔

(۴) $\text{ما} = \frac{۱}{\text{لا}(\text{لا}-۹)}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۵) $\text{ما} = \text{مس لا}$ اور $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}$ کی ترسیمیں کھینچو۔ اور ان کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۶) بتاؤ کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے $۳^{\text{لا}}$ مسلسل ہے۔

(۷) تفاعل $\frac{\text{لا}^{۲}-۹}{\text{لا}+۳}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل کی تحقیق کرو۔

(۸) تفاعل $\frac{۳^{\frac{۱}{\text{لا}}}-۱}{۳^{\frac{۱}{\text{لا}}}+۱}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۹) $\text{ما} = \frac{۳}{\text{لا}(\text{لا}+۱)(\text{لا}-۵)}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۱۰) $\text{ما}^{۲}(۲\text{ع}-\text{لا}) = \text{لا}^{۳}$ کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ وہ کہاں غیر مسلسل ہے۔

# تیسرا باب

# تفرق

دو مقادیر کے مابین جب باہمی تعلق معلوم ہو جاتا ہے تو اس کے ذریعہ
ایا جاسکتا ہے کہ ایک مقدار کی فلاں فلاں قیمت مقرر ہو تو اس کے تناظر
ے مقدار کی کیا قیمت ہوگی - اکثر مسئلوں میں صرف ان قیمتوں کے معلوم کرنے ہی
فا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ یہ بھی دریافت کرنے کی کوشش کی جاتی ہے کہ ایک مقدار
ری مقدار کے ساتھ کس شرح سے بدلتی ہے - متغیر متبوع کے لحاظ سے اس کے
نفاعل کی تبدیلی کی شرح دریافت کرنے کو تفرقانا کہتے ہیں - ذیل میں ہم
انے کے چند عام قواعد مستنبط کرینگے جو احصائے تفرقات میں بکثرت
مال ہوتے ہیں -

## تفاعل کے مشتق یا تفرقی سر کی تعریف ——

ا کرو کہ ما = ف (لا) متغیر متبوع لا کا کوئی تفاعل ہے - لا کی قیمت میں جب
ت سا اضافہ (مثبت یا منفی) معـ لا واقع ہوتا ہے تو اس کے تناظر تفاعل
مت میں معـ ما اضافہ ہوتا ہے -

بں ما = ف (لا) اور ما + معـ ما = ف (لا + معـ لا)

$$\therefore \text{مف ما} = \text{ف}\,(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{ف}\,(\text{لا})$$

اور

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{ف}\,(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{ف}\,(\text{لا})}{\text{مف لا}}$$

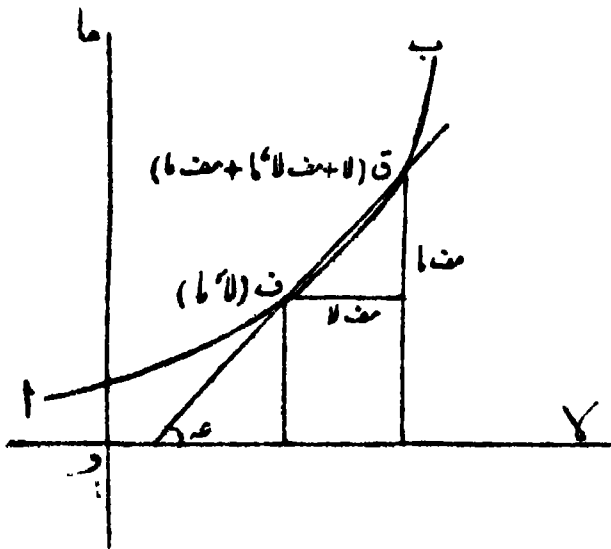
مف لا کے گھٹنے سے مف ما بھی عدداً گھٹتا جائیگا - اگرچہ بصورت مف لا = صفر $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ (جو تفاوتوں کا حاصل تقسیم کہلاتا ہے) محدود یا معرف نہیں رہتا ہے لیکن جیسے جیسے مف لا صفر کی طرف مائل یا قریب تر ہوتا ہے (مف لا $\to$ ۰) تفاوتوں کا حاصل تقسیم $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ ممکن ہے کہ کسی انتہا کو پہنچے - اگر وہ پہنچتا ہے تو اس انتہا کو ما کا مشتق بلحاظ لا یا ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کہتے ہیں اور علامت $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ یا مَا یا فَ (لا) یا عف ما سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$\text{پس}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{ف}\,(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{ف}\,(\text{لا})}{\text{مف لا}}$$

عبارت میں یہ مفہوم اس طرح ادا کیا جاتا ہے: کسی تفاعل کا مشتق یا تفرقی سر اس تفاعل کے اضافہ کی متغیر متبوع کے اضافہ کے ساتھ نسبت ہے جبکہ موخر الذکر صفر تک بطور انتہا پہنچ جاتا ہے۔

تفرقی سر کی اس تعریف سے ظاہر ہے کہ وہ تفاعل کے تغیر کی عین شرح کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ وقفہ مف لا کے لیے تفاعل ما کی بلحاظ لا اوسط شرح تغیر ہے۔ جیسے جیسے وقفہ مف لا چھوٹا ہوتا ہے اتنا ہی زیادہ قریب $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ وقفہ مذکور کے آغاز پر کی شرح تغیر کو تعبیر کرتا ہے۔ مف لا $\to$ ۰ کی صورت میں $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا یعنے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ وقفہ کے عین آغاز پر کی شرح ہو جاتی ہے۔ پس مقدار $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ جو متغیر متبوع کی قیمت لا سے متعلق

دریافت کی جاتی ہے قیمت مذکورہ ما کی بلحاظ لا شرح تغیر ہے۔
$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علم ہندسہ کے ذریعہ بھی تعبیر کی جا سکتی ہے۔ ملاحظہ ہو شکل ۲۔
اب تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیم ہے۔ $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ = مس عہ
قاطع خط ف ق کی ڈھلان ہے۔ اگر نقطہ ف کو ثابت مان کر مف کو جتنا بھی
چھوٹا لینگے اتنا ہی زیادہ قریب $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ نقطہ ف پر منحنی کے خط مماس کی

شکل ۲

ڈھلان کو تعبیر کریگا۔ پس $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا جبکہ لا ← ۰ نقطۂ ف پر منحنی
کی ڈھلان ہے یعنے مقدار $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ تفاعل ما = ف (لا) کے منحنی کی
نقطہ ف پر کے ڈھلان کی قیمت ہے۔ ذیل میں ہم تفاعلوں کے تفرق
کے عام قواعد ضابطوں کی شکل میں مستنبط کرینگے۔ ان ضابطوں میں ء، و
سے مراد لا کے تفاعل ہیں۔ ا اور ن مستقل مقادیر ہیں۔ علامت $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$

سے مراد فلاں مقدار کا مشتق یا تفرقی سر بلحاظ لا ہے۔

چنانچہ $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ ( ر + و ) مقدار ( ر + و ) کا مشتق یا تفرقی سر بلحاظ لا ہے۔

( ا ) کسی متغیر کا اسی کے لحاظ سے مشتق اکائی ہے یعنے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = ۱$

فرض کرو ما = لا تب ما + معـ ما = لا + معـ لا

∴ معـ ما = معـ لا

اور $\frac{\text{معـ ما}}{\text{معـ لا}} = ۱$ پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{معـ لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{معـ ما}}{\text{معـ لا}} = ۱$

( ب ) کسی مستقل کا مشتق صفر ہے یعنے $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = ۰$

فرض کرو ما = ا چونکہ ما کو ا یعنے مستقل مانا ہے اس لیے ما کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ اس لیے معـ ما = ۰ پس

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{معـ لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{معـ ما}}{\text{معـ لا}} = ۰$$

( ج ) دو تفاعلوں کا مشتق ان کے مشتقوں کا حاصل جمع ہے۔ یعنے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} (\text{ر} + \text{و}) = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

فرض کرو کہ ما = ر + و

لا میں درانحالیکہ معـ لا تغیر ہوتا ہے تو ما میں معـ ما تغیر واقع ہوتا ہے۔ پس

ما + معـ ما = ر + معـ ر + و + معـ و

∴ معـ ما = معـ ر + معـ و

اور $\frac{\text{معـ ما}}{\text{معـ لا}} = \frac{\text{معـ ر}}{\text{معـ لا}} + \frac{\text{معـ و}}{\text{معـ لا}}$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

$$\text{پس}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}.$$

(د) دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا مشتق مساوی ہے پہلے تفاعل مضروب دوسرے تفاعل کے مشتق جمع دوسرے تفاعل مضروب پہلے تفاعل کے مشتق کے یعنے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ی و}) = \text{ی}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

فرض کرو $\text{ما} = \text{ی و}$

تب $\text{ما} + \text{مف ما} = (\text{ی} + \text{مف ی})(\text{و} + \text{مف و})$

$$\therefore\quad \text{مف ما} = \text{ی مف و} + \text{و مف ی} + \text{مف ی مف و}$$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ی}\,\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}} + \text{و}\,\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \text{مف ی}\,\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ی}\ \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}} + \text{و}\ \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \text{مف ی}\,\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

$$\text{پس}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ی}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

**نتیجۂ صریح**۔ اگر $\text{ما} = \text{ا و}$ تو چونکہ $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = 0$

$$\text{لہذا}\quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ا و}) = \text{ا}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

(ھ) دو تفاعلوں کے حاصل تقسیم کا مشتق مساوی ہے اُس کسر کے جو نسب نما مضروب شمار کنندہ کے مشتق منفی شمار کنندہ مضروب نسب نما کے مشتق کو نسب نما کے مربع پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یعنے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{ی}}{\text{و}}\right) = \frac{\text{و}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}}{\text{و}^{۲}}$$

فرض کرو $\text{ما} = \frac{\text{ی}}{\text{و}}$

$$\text{تب ما} + \text{معف ما} = \frac{\text{ی} + \text{معف ی}}{\text{و} + \text{معف و}}$$

$$\text{معف ما} = \frac{\text{ی} + \text{معف ی}}{\text{و} + \text{معف و}} - \frac{\text{ی}}{\text{و}}$$

$$= \frac{\text{و معف ی} - \text{ی معف و}}{\text{و}\,(\text{و} + \text{معف و})}$$

$$\frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = \frac{\text{و}\,\frac{\text{معف ی}}{\text{معف لا}} - \text{ی}\,\frac{\text{معف و}}{\text{معف لا}}}{\text{و}\,(\text{و} + \text{معف و})}$$

$$\text{پس بالآخر}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}}{\text{و}^{۲}}$$

**نتیجہ صحیح** ۔ اگر $\text{ما} = \frac{\text{۱}}{\text{و}}$ تو چونکہ $\frac{\text{فر۱}}{\text{فرلا}} = ۰$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{و}}\right) = \frac{-\,\text{۱}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}}{\text{و}^{۲}}$$

(و) مستقل قوت نما والے تفاعل کا مشتق مساوی ہے حاصل ضرب قوت نما اور تفاعل کے جس کا قوت نما دیے ہوئے قوت نما سے بقدر ایک عدد کمتر ہو اور تفاعل کے مشتق کے ۔ یعنے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{ی}^{\text{ن}}\right) = \text{ن}\,\text{ی}^{\text{ن}-۱}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

فرض کرو $\text{ما} = \text{ی}^{\text{ن}}$ اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے

تب $\text{ما} + \text{معف ما} = (\text{ی} + \text{معف ی})^{\text{ن}}$ جو از روئے ضابطہ مسئلہ ثنائی

$$= \text{ی}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ی}^{\text{ن}-۱}\,\text{مف ی} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{ی}^{\text{ن}-۲}(\text{مف ی})^۲ + \cdots + (\text{مف ی})^{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{مف ما} = \text{ن}\,\text{ی}^{\text{ن}-۱}\,\text{مف ی} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{ی}^{\text{ن}-۲}(\text{مف ی})^۲ + \cdots + (\text{مف ی})^{\text{ن}}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ن}\,\text{ی}^{\text{ن}-۱}\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{ی}^{\text{ن}-۲}\,\text{مف ی}\,\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \cdots + (\text{مف ی})^{\text{ن}-۱}\cdot\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}}$$

$$\text{پس}\ \text{نہا}_{\text{مف لا}\to۰}\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ن}\,\text{ی}^{\text{ن}-۱}\cdot\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

یہی نتیجہ قاعدہ (د) کے ذریعہ بھی اخذ ہو سکتا ہے۔ اگر ما کو ن تفاعلوں کا حاصلِ ضرب فرض کیا جاتا ہے چنانچہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ی و ھ}) = \text{و ھ}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + \text{ھ ی}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{ی و}\frac{\text{فر ھ}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{یا}\ \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{ی}}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{و}}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{ھ}}\frac{\text{فر ھ}}{\text{فر لا}}$$

اور اگر $\text{ما} = \text{ما}_۱\,\text{ما}_۲\,\text{ما}_۳\ldots\text{ما}_{\text{ن}}$ تو اسی طرح

$$\frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{ما}_۱}\frac{\text{فر ما}_۱}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{ما}_۲}\frac{\text{فر ما}_۲}{\text{فر لا}} + \cdots + \frac{۱}{\text{ما}_{\text{ن}}}\frac{\text{فر ما}_{\text{ن}}}{\text{فر لا}}$$

درانحالیکہ $\text{ما}_۱ = \text{ما}_۲ = \text{ما}_۳ \ldots = \text{ما}_{\text{ن}} = \text{ی}$، $\text{ما} = \text{ی}^{\text{ن}}$

$$\text{اور}\ \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ن}\left(\frac{۱}{\text{ی}}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ی})^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{ی}^{\text{ن}-۱}\cdot\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

اگر تفاعل کی قوت نما کسر $= \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ہو، جس میں م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں، تو

$$\text{ما} = \text{ی}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} \qquad \therefore \text{ما}^{\text{ن}} = \text{ی}^{\text{م}}$$

اور $\frac{فر(ما^{ن})}{فرلا} = \frac{فر(ی^{م})}{فرلا}$

پس سابقہ نتیجہ سے $ن\, ما^{ن-۱} . \frac{فرما}{فرلا} = م\, ی^{م-۱} \frac{فری}{فرلا}$

$$\therefore \frac{فر(ی^{\frac{م}{ن}})}{فرلا} = \frac{فرما}{فرلا} = \frac{م}{ن} \frac{ی^{م-۱}}{ما^{ن-۱}} \frac{فری}{فرلا}$$

$$= \frac{م}{ن} \frac{ی^{م-۱}}{(ی^{\frac{م}{ن}})^{ن-۱}} \frac{فری}{فرلا} = \frac{م}{ن} \frac{ی^{م-۱}}{ی^{م-\frac{م}{ن}}} \frac{فری}{فرلا}$$

$$= \frac{م}{ن} ی^{\frac{م}{ن}-۱} \frac{فری}{فرلا}$$

اور اگر تفاعل کا قوت نما منفی صحیح عدد ( - م) ہو تو

$$ما = ی^{-م} = \frac{۱}{ی^{م}}$$

اور قاعدہ (۵) کے نتیجۂ صحیح کی رُو سے

$$\frac{فر}{فرلا}\left(\frac{۱}{ی^{م}}\right) = \frac{-\frac{فری^{م}}{فرلا}}{ی^{۲م}} = \frac{-م\, ی^{م-۱}}{ی^{۲م}} \frac{فری}{فرلا}$$

$$= -م\, ی^{-م-۱} \frac{فری}{فرلا}$$

پس $\frac{فر}{فرلا}(ی)^{ن} = ن\, ی^{ن-۱} \frac{فری}{فرلا}$ خواہ ن مثبت ہو یا منفی ہو یا کسر ہو

نوٹ:- مندرجۂ بالا تمام قاعدوں کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ی اور و متغیر متبوع لا کے مسلسل تفاعل ہیں۔

مثال (۱) ابتدائی اصول سے $ما = لا^{۳} - ۳لا^{۲} + ۳لا - ۱$ کا مشتق دریافت کرو۔ درآنحالیکہ $لا = لا + مت\, لا$ تفاعل ما کی قیمت $= ما + مت\, ما$۔

اور $\text{ا} + \text{معف ا} = (\text{لا} + \text{معف لا})^{۳} - ۳\,(\text{لا} + \text{معف لا})^{۲} + ۳\,(\text{لا} + \text{معف لا}) - ۱$

$$= \text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲}\,\text{معف لا} + ۳\,\text{لا}\,(\text{معف لا})^{۲} + (\text{معف لا})^{۳}$$

$$+ ۳\left\{\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا}\,\text{معف لا} + (\text{معف لا})^{۲}\right\}$$

$$+ ۳\,\text{لا} + ۳\,\text{معف لا} - ۱$$

چونکہ $\text{ا} = \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} - ۱$

لہٰذا عملِ تفریق سے $\text{معف ا} = ۳\,\text{لا}^{۲}\,\text{معف لا} + ۳\,\text{لا}\,(\text{معف لا})^{۲} + (\text{معف لا})^{۳}$

$$- ۶\,\text{لا}\,\text{معف لا} - ۳\,(\text{معف لا})^{۲} + ۳\,\text{معف لا}$$

$$\therefore \frac{\text{معف ا}}{\text{معف لا}} = ۳\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا}\,\text{معف لا} + (\text{معف لا})^{۲} - ۶\,\text{لا} - ۳\,\text{معف لا} + ۳$$

اس لیے $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{معف لا} \to ۰} \frac{\text{معف ا}}{\text{معف لا}} = ۳\,\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} + ۳$

تفرق کے قاعدہ (و) کے اطلاق سے براہِ راست یہی نتیجہ فوراً برآمد ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = ۳\,\text{لا}^{۲} - ۳ \times ۲\,\text{لا} + ۳ = ۳\,\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} + ۳$$

**مثال (۲)** $\text{ا} = \frac{\text{و} - \text{لا}}{\text{و} + \text{لا}}$، $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}}$ معلوم کرو۔

$$\text{ا} = (\text{و} - \text{لا})(\text{و} + \text{لا})^{-۱}$$

$$\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = (\text{و} - \text{لا})\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{و} + \text{لا})^{-۱} + (\text{و} + \text{لا})^{-۱}\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{و} - \text{لا})$$

$$= (\text{و} - \text{لا})\left\{-۱\,(\text{و} + \text{لا})^{-۲}\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}\right\} + (\text{و} + \text{لا})^{-۱}\left(-\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}\right)$$

$$= -\frac{\text{و} - \text{لا}}{(\text{و} + \text{لا})^{۲}} - \frac{۱}{\text{و} + \text{لا}} = -\frac{\text{و} - \text{لا} + \text{و} + \text{لا}}{(\text{و} + \text{لا})^{۲}}$$

$$= -\frac{\text{۲ ا}}{(\text{ا} + \text{لا})^{۲}}$$

# مثالیں

(۱) $\text{ما} = (\text{ا} + \text{لا})(\text{ب} + \text{لا})$ بتاؤ کہ $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \text{ا} + \text{ب} + \text{۲ لا}$

(۲) $\text{ما} = (\text{ا لا} + \text{ب})\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$ بتاؤ کہ $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \frac{\text{ا}^{۳} - \text{۲ ا لا}^{۲} - \text{ب لا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}}$

(۳) لا کے مندرجۂ ذیل تفاعلوں کو تفرق کرو:-

(ا) $\text{ما} = \frac{\text{ا لا}^{\text{م}} - \text{ب لا}^{-\text{ن}}}{\text{ج}}$ جواب $\frac{\text{ا م لا}^{\text{م+ن}} + \text{ب}}{\text{ج لا}^{\text{ن+۱}}}$

(ب) $\text{ما} = \left(\frac{\text{لا}}{\text{۱} + \text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ جواب $\frac{\text{ن لا}^{\text{ن-۱}}}{(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن+۱}}}$

(ج) $\text{ما} = \frac{\text{۱} - \text{لا}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{۲}}}$ جواب $\frac{(\text{۱} + \text{لا})}{(\text{۱} + \text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

(د) $\text{ما} = \sqrt{\text{ا} + \sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}}}$ جواب $\frac{\text{لا}}{\text{۲}\sqrt{(\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲})(\text{ا} + \sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{لا}^{۲}})}}$

(۴) ایک منحنی کی مساوات $\text{ما} = \frac{\text{ا}^{۳}}{\text{ب لا}^{۲}}$ ہے ثابت کرو کہ منحنی کے اس نقطہ پر جہاں $\text{لا} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ب}}$ منحنی کا ڈھلان $-\text{۲}\frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$ ہے۔

(۵) $\text{ر} = \frac{\text{۴ لا}^{۲} - \text{۳ لا} - \text{۷}}{\text{۵ لا}^{۲} + \text{۶ لا} - \text{۹}}$، $\frac{\text{ف ر}}{\text{ف لا}}$ معلوم کرو۔ جواب $\frac{\text{۳۹ لا}^{۲} - \text{۲ لا} + \text{۶۹}}{(\text{۵ لا}^{۲} + \text{۶ لا} - \text{۹})^{۲}}$

**مقلوب تفاعل** ـ دو متغیروں کا درمیانی رابطہ تصریحاً دو طریقوں

میں سے کسی ایک طریقہ پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جیسے اگر ما = ف (لا) تو لا = فا (ما)۔ پہلا طریقہ اُس صورت میں مفید ہوتا ہے جبکہ لا متغیر متبوع ہے اور دوسرا اُس وقت جبکہ ما متغیر متبوع ہے۔ مثال کے طور پر ما = ولا اور لا = لوگ ما پیش کیے جا سکتے ہیں جو ایک ہی رابطہ کے اظہار کے دو جداگانہ طریقے ہیں۔ ایک دوسری مثال ما = لا$^{2}$ اور لا = ± $\sqrt{ما}$ ہے۔

عام طور پر دو تفاعل ما = ف (لا) ........ (۱)

لا = فا (ما) ........ (۲)

باہدیگر مقلوب تفاعل کہلاتے ہیں اگر لا اور ما کی وہ تمام قیمتیں جو مساوات (۱) کے لیے صادق آتی ہیں مساوات (۲) کے لیے بھی صادق آئیں۔ اور اگر مساوات (۲) کے لیے جو قیمتیں صادق آتی ہیں مساوات (۱) کے لیے بھی صادق آئیں۔

واضح ہے کہ ایک ہی منحنی سے دو باہدیگر مقلوب تفاعلوں کی ترسیمی تعبیر ہوتی ہے۔ لیکن ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ان دونوں تفاعلوں کے خواص عموماً مختلف ہوتے ہیں۔

ابھی ابھی جو مثال ما = لا$^{2}$ اور لا = ± $\sqrt{ما}$ دی گئی ہے ان کی ترسیموں سے ظاہر ہے کہ اول الذکر مساوات میں لا کی کسی ایک قیمت کے لیے ما کی بھی ایک ہی قیمت ہے۔ لیکن آخر الذکر مساوات میں ما کی ایک قیمت کے لیے لا کی دو جداگانہ (مساوی مگر مختلف العلامت) قیمتیں ہیں۔ یعنی پہلی مساوات ما کی تعریف لا کے وحید القیمت تفاعل کی حیثیت سے کرتی ہے اور دوسری مساوات لا کو بحیثیت ما کے دو قیمت والے تفاعل کے متعارف کراتی ہے۔

(ش) مقلوب تفاعلوں کے تفرقی سروں (یا مشتقوں) میں رابطہ۔

فرض کرو ما = ف (لا) اور لا = فا (ما) دو وحید القیمت مسلسل مقلوب تفاعل ہیں۔

اب ان مساواتوں میں فرض کرو کہ لا کو مف لا اضافہ دیا جاتا ہے اور اس کے تناظر ما کی قیمت میں مف ما اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ تب مف لا اور مف ما کی تمام قیمتوں کے لیے باستثنائے صفر قیمت کے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}}$$

اگر مف لا ← ۰ اس طرح پر کہ وہ کبھی صفر نہیں ہونے پاتا تب بدیں وجہ کہ مندرجۂ بالا مساواتیں وحید القیمت اور مسلسل مانی گئی ہیں مف ما ← ۰ لیکن کبھی صفر نہیں ہوتا۔

$$\text{پس}\quad \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف ما}\to 0}\ \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}}$$

$$\text{یعنے}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}}$$

**مثال۔** اگر لا = ا ما$^2$ + ب ما + ج تو مقلوب تفاعل ما کا مشتق بلحاظ لا دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ}\quad \text{لا} = \text{ا ما}^2 + \text{ب ما} + \text{ج}،\quad \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = 2\,\text{ا ما} + \text{ب}$$

$$\text{لہذا}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}} = \frac{1}{2\,\text{ا ما} + \text{ب}}$$

**(ح) کسی تفاعل کے تفاعل کا مشتق معلوم کرنے کا آسان قاعدہ۔**

فرض کرو ما = ف (ی) اور ی = فہ (لا) دو دیے ہوئے

مسلسل تفاعل ہیں۔ اور ما کا مشتق بلحاظ لا دریافت کرنا مقصود ہے۔

چونکہ ما = ف {فہ (لا)} اس لیے واضح ہے کہ (ی) کے لیے اس کی قیمت فہ (لا) تعویض کرنے سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ معلوم ہو سکتا ہے۔ لیکن اس تعویض کے بغیر بھی براہِ راست $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت ہو سکتا ہے۔ چنانچہ فرض کرو (ما، ی) اور (ی، لا) قیمتوں کے دو جفت ہیں جو دی ہوئی مساواتوں کے لیے علی الترتیب صادق آتی ہیں۔ اب اگر لا کی قیمت میں مف لا اضافہ ہوتا ہے تو ی کی قیمت میں مف ی اضافہ ہوگا اور نتیجہ کے طور پر ما کی قیمت میں مف ما اضافہ ہوگا۔ مگر مف لا اور مف ما کی تمام قیمتوں کے لیے باستثنائے صفر

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ی}} \times \frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}}$$

پس اگر مف لا صفر کی طرف اس طرح مائل ہو (یعنے مف لا ← ۰) کہ وہ گھٹتا چلا جائے مگر صفر نہ ہو جائے تو مف لا جب کافی چھوٹا ہوتا ہے تو مف ی ← ۰ اس طرح کہ وہ صفر نہیں ہونے پاتا اس لیے

$$\underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف ی}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ی}} \times \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

یعنے ما کا مشتق (یا تفرقی سر) بلحاظ لا حاصل ضرب ہے ما کے مشتق بلحاظ ی اور ی کے مشتق بلحاظ لا کے۔

**مثال۔** ما = $(1 + \text{لا}^{\text{ن}})^{\text{م}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔

$(1 + \text{لا}^{\text{ن}})$ = ی رکھو پس ما = $(\text{ی})^{\text{م}}$

چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

لہذا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = (\text{م ی}^{\text{م}-1})\ \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$

$\therefore \quad = \text{م}(1+\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{م}-1}\ \text{ن لا}^{\text{ن}-1} = \text{م ن لا}^{\text{ن}-1}(1+\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{م}-1}$

طالب علم نے معلوم کر لیا ہوگا کہ قاعدہ (ز) جو مقلوب تفاعلوں کے تفرقی سروں سے متعلق ہے قاعدہ (ح) کی ایک خاص صورت ہے۔

کیونکہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} \times \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$

اگر ما = لا تو $1 = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ی}} \times \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$

یعنی $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ی}} = \frac{1}{\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}}$

## تضمینی تفاعلوں کا تفرق

— اگر ما بحیثیت تفاعل لا ایک غیر حل شدہ مساوات کی شکل میں ظاہر کیا جائے تو ما کو لا کا تضمینی تفاعل کہتے ہیں۔ مثلاً

$\text{لا}^3 + \text{ما}^3 - 3\,\text{لا ما} - 1 = 0$

$\text{ا لا}^2 + 2\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + 2\text{گ لا} + 2\text{ف ما} + \text{ج} = 0$

جب (لا + ما) = لا ما ، وغیرہ

اکثر اوقات تضمینی تفاعل کی مساوات کا حل کرنا مشکل ہوتا ہے کبھی ناممکن بھی۔ تو ایسی صورتوں میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین کے لیے مندرجۂ ذیل قاعدہ استعمال کیا جاتا ہے۔

پہلے تضمینی تفاعل کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ کی ہر رقم بطور تفاعل لا تفرق کی جائے۔ اس طرح جو مساوات حاصل ہو اس کو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے لیے

حل کیا جائے۔ اس حل میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے لیے جو جملہ دستیاب ہوگا اُس میں عموماً ما اور لا دونوں موجود ہونگے۔ لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی مساوات ف (لا، ما) = ۰ میں لا کی اس قیمت کے لیے ما کی متناظر قیمت دریافت کر لی جائے اور پھر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے جملہ میں لا اور ما کی یہ خاص قیمتیں تعویض کی جائیں۔ مثلاً اگر

$\text{لا}^۳ + \text{ما}^۳ - ۳\,\text{لا}\,\text{ما} - ۱ = ۰$ ، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت کرو جبکہ لا = ۱

تو قاعدہ مصرحۂ بالا کی رُو سے

$$۳\,\text{لا}^۲ + ۳\,\text{ما}^۲ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۳\,\text{ما} - ۳\,\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}^۲}{\text{ما}^۲ - \text{لا}}$$

ابتدائی مساوات میں لا = ۱ تعویض کرنے سے $\text{ما}(\text{ما}^۲ - ۳) = ۰$

$$\therefore \text{ما} = ۰ \quad \text{یا} \quad \text{ما} = \pm\sqrt{۳}$$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ (بمقام لا = ۱) $= \frac{۰ - ۱}{۰ - ۱} = ۱$ یا $\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲}$ یا $-\frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲}$

# مثالیں

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت کرو:—

(۱) $\text{لا} = \text{ما}^۳ + \text{ما} - ۱$ جواب $\frac{۱}{۳\,\text{ما}^۲ + ۱}$

(۲) $\text{لا} = \frac{\text{ما} + ۲}{\text{ما}^۵ + ۱}$ جواب $\frac{(\text{ما}^۵ + ۱)^۲}{۱ - ۱۰\,\text{ما}^۴ - ۴\,\text{ما}^۵}$

(۳) $\text{ما} = (\text{لا}^۲ - \text{ر}^۲)^۵$ جواب — $۱۰\,\text{لا}\,(\text{لا}^۲ - \text{ر}^۲)^۴$

(۴) $\text{ما} = (\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$ جواب $\dfrac{\text{لا}}{(\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}$

(۵) $\text{ما} = \left\{\left(\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{۲}} + \text{۱}\right\}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$ جواب $-\dfrac{\text{۳}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}}}{\text{لا}^{\text{۴}}}$

(۶) $\dfrac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ل}^{\text{۲}}} \pm \dfrac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}}$ جواب $\mp \dfrac{\text{ب}^{\text{۲}}\,\text{لا}}{\text{ل}^{\text{۲}}\,\text{ما}}$

(۷) $(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}})^{\text{۳}/\text{۲}} = \text{ل}^{\text{۲}}(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}})$ جواب $\dfrac{\text{۲}\,\text{ل}^{\text{۲}}\text{لا} - \text{۳}\,\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}}}{\text{۲}\,\text{ل}^{\text{۲}}\text{ما} + \text{۳}\,\text{ما}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}}}$

(۸) $\text{ل}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۲}\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^{\text{۲}} + \text{۲}\,\text{گ}\,\text{لا} + \text{۲}\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = \text{۰}$

جواب $-\dfrac{\text{ل}\,\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} + \text{گ}}{\text{ب}\,\text{ما} + \text{ھ}\,\text{لا} + \text{ف}}$

(۹) دباؤ اور حجم سے متعلق فین ڈیر وال کی مشہور مساوات :-

$\left(\text{د} + \dfrac{\text{ل}}{\text{ح}^{\text{۲}}}\right)(\text{ح} - \text{ب}) = \text{س}\,\text{ط}$ کے لیے $\dfrac{\text{فرد}}{\text{فرح}}$ دریافت کرو۔

اور بتاؤ کہ جب $\dfrac{\text{فرد}}{\text{فرح}} = \text{۰}$ تو $\text{د} = \dfrac{\text{ل}}{\text{ح}^{\text{۲}}}\left(\text{۱} - \dfrac{\text{۲}\,\text{ب}}{\text{ح}}\right)$

(۱۰) $\text{ما} = (\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱})^{\text{۵}} + \text{۲}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}) + (\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}) + \text{۱}$ ، $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔

جواب $\text{۱۰}\,\text{لا}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱})^{\text{۴}} + \text{۴}\,\text{لا}$

# چوتھا باب

## قوت نمائی لوکارتمی اور مثلثی تفاعلوں کا تفرق

۱ـ اس نصاب کی پہلی جلد میں قوت نمائی اور لوکارتمی تفاعلوں پر کسی قدر تفصیل کے ساتھ بحث کی جاچکی ہے ۔ ابتدائی الجبراء میں قوت نمائی تفاعل لالا کی صرف اُن صورتوں میں تعریف کی جاتی ہے جبکہ لا ایک منطق عدد ہے۔ احصاء میں چونکہ لا کا مسلسل تغیر ضروری ہے اس لیے لا کی قیمتیں منطق وغیر منطق دونوں مانی جائینگی۔ پہلے ہم اس کے مقلوب تفاعل یعنے لوک لا کا تفرقی سر یا مشتق دریافت کرینگے اور بعدازاں خود اس کا (یعنے قوت نمائی تفاعل کا)

اگر ما = لوک لا تو ا^ما = لا اور ما کو ا کا قوت نما کہتے ہیں۔

ہم فرض کرینگے کہ لوک لا (جس میں ا > ۰، ا ≠ ۱) لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے ایک وحیدالقیمت مسلسل تفاعل ہے ۔لوکارتموں کی اساس کے لیے یوں تو نظری حیثیت سے کسی بھی عدد کا انتخاب ممکن ہے۔ لیکن عام طور پر عملاً صرف ۱۰ اور قو (E) مستعمل ہیں ۔ قو کی تعریف ذیل کے جملہ میں مضمر ہے:-

$$\text{قو} = \underset{\text{ی} \to ۰}{\text{نہا}} (۱ + \text{ی})^{\frac{۱}{\text{ی}}}$$

اگرچہ یہ بدیہی امر نہیں ہے کہ مندرجہ بالا انتہا موجود ہے لیکن اس مطالعہ

کے لیے صرف یہ کہہ دینا کافی ہوگا کہ فی الحقیقت ایسی انتہا وجود رکھتی ہے ۔ ثبوت کے لیے آپ اسگوڈ (Osgood) کی کتاب تفرقی و تکملی احصا یا کسی اور بلند پایہ کی کتاب کا مطالعہ ہوسکتا ہے ۔ قو کی کسی اعشاری عدد کے ذریعے ٹھیک طور پر تعبیر نہیں ہوسکتی ۔ ذیل میں اس کی قیمت اعشاریہ کے نو مقاموں تک صحیح درج ہے :-

$$\text{قو} = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸ \ldots$$

جلد اول میں لوکارتموں کی اساس کی تبدیلی کے قاعدے بتائے گئے ہیں ۔ ان کے لحاظ سے $\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} = ۲٫۳۰۲۵۹\ \text{لوک}_{۱۰}\,\text{لا}$ (اعشاریہ کے ۵ مقاموں تک صحیح)

اور $\text{لوک}_{۱۰}\,\text{لا} = ۰٫۴۳۴۲۹\ \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا}$

## ۲ـ $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ $(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ی})$ کی تعیین ۔ جبکہ ی تفاعلِ لا ہے

فرض کرو $\text{ما} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا}$

$$\text{ما} + \text{مف ما} = \text{لوک}_{\text{و}}\,(\text{لا} + \text{مف لا})$$ اور اس لیے

$$\text{مف ما} = \text{لوک}_{\text{و}}\,(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{لا} + \text{مف لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)$$

$$\text{پس}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{۱}{\text{مف لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{۱}{\text{لا}} \times \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right) = \frac{۱}{\text{لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{لا}}\ \text{نہا}_{\text{مف لا} \to ۰} \left[\text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}}\right]$$

چونکہ $\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا}$ مسلسل ہے اس لیے فرض کرلیا جاتا ہے کہ لوکارتم کی انتہا مساوی ہے انتہا کے لوکارتم کے ۔ پس

$$\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = \frac{1}{لا} لوک_{و} \left[ \underset{مف\ لا \leftarrow .}{نہا} \left(1 + \frac{مف\ لا}{لا}\right)^{\frac{لا}{مف\ لا}} \right]$$

اگر ہم ی = $\frac{مف\ لا}{لا}$ لکھیں تو ی ← . جبکہ مف لا ← .

لہٰذا $\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = \frac{1}{لا} لوک_{و} \left[ \underset{ی \leftarrow .}{نہا} (1 + ی)^{\frac{1}{ی}} \right]$

$= \frac{1}{لا} لوک_{و} تو$ بلحاظ تعریف تو (دیکھو ع۱)

یعنے $\frac{فر}{فر\ لا} لوک_{و} لا = \frac{1}{لا} لوک_{و} تو$

اسی طرح $\frac{فر}{فر\ ء} لوک_{و} ء = \frac{1}{ء} لوک_{و} تو$

اگر ء (در انحالیکہ ء > .) لا کا ایک تفاعل ہے تب سابقہ باب کے قاعدہ (ح) کی رُو سے

$$\frac{فر}{فر\ لا} لوک_{و} ء = \frac{فر}{فر\ ء} لوک_{و} ء \cdot \frac{فر\ ء}{فر\ لا}$$

$$\therefore \frac{فر}{فر\ لا} لوک_{و} ء = \frac{1}{ء} لوک_{و} و \cdot \frac{فر\ ء}{فر\ لا} = لوک_{و} و \cdot \frac{\frac{فر\ ء}{فر\ لا}}{ء}$$

پس واضح ہے کہ اگر ا = تو تو $\frac{فر}{فر\ لا} لوک_{تو} ء = \frac{\frac{فر\ ء}{فر\ لا}}{ء}$

تو کو لوکارتم کی اساس بنانے سے چونکہ عمل تفرق میں سہولت پیدا ہوتی ہے اس لیے اختصار میں اسی کو اساس قرار دیتے ہیں اور جب ترقیم میں لوک کی کوئی اساس لکھی نہیں جاتی ہے تو سمجھ لیا جاتا ہے کہ اساس تو ہی ہے۔

یعنے لوک ء سے مراد $لوک_{تو}$ ء ہے۔

مثال (۱) ما = لوک $\frac{1 - لا}{1 + لا}$ ، $\frac{فر\ ما}{فر\ لا}$ دریافت کرو۔

$$\text{لوک}\ \frac{۱-\text{لا}}{۱+\text{لا}} = \text{لوک}\ (۱-\text{لا}) - \text{لوک}\ (۱+\text{لا})$$

$$\text{پس}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۱-\text{لا}}\ \frac{\text{فر}(۱-\text{لا})}{\text{فرلا}} - \frac{۱}{۱+\text{لا}}\ \frac{\text{فر}(۱+\text{لا})}{\text{فرلا}}$$

$$= -\frac{۱}{۱-\text{لا}} - \frac{۱}{۱+\text{لا}} = -\frac{۲}{۱-\text{لا}^۲} = \frac{۲}{\text{لا}^۲-۱}$$

مثال (۲) $\text{ر} = \sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ا})(\text{س}-\text{ب})}{\text{س}(\text{س}-\text{ج})}}$ ؛ $\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}$ دریافت کرو۔

ہم بتائینگے کہ لوکارتموں کی مدد سے عمل تفرق بہت آسان ہو جاتا ہے۔

چنانچہ $\text{لوک ر} = \frac{۱}{۲}\text{لوک}(\text{س}-\text{ا}) + \frac{۱}{۲}\text{لوک}(\text{س}-\text{ب}) - \frac{۱}{۲}\text{لوک س} - \frac{۱}{۲}\text{لوک}(\text{س}-\text{ج})$

$$\therefore \frac{\text{فرلوک ر}}{\text{فرس}} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{\text{فرلوک}(\text{س}-\text{ا})}{\text{فرس}} + \frac{\text{فرلوک}(\text{س}-\text{ب})}{\text{فرس}} - \frac{\text{فرلوک س}}{\text{فرس}} - \frac{\text{فرلوک}(\text{س}-\text{ج})}{\text{فرس}}\right\}$$

$$\frac{۱}{\text{ر}}\ \frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{\text{س}-\text{ا}} + \frac{۱}{\text{س}-\text{ب}} - \frac{۱}{\text{س}} - \frac{۱}{\text{س}-\text{ج}}\right\}$$

$$\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} = \frac{\text{ر}}{۲}\left(\frac{۱}{\text{س}-\text{ا}} + \frac{۱}{\text{س}-\text{ب}} - \frac{۱}{\text{س}} - \frac{۱}{\text{س}-\text{ج}}\right)$$

# مثالیں

(۱) لوکارتمی تفرق کے ذریعہ مندرجۂ ذیل تفاعلوں کا مشتق معلوم کرو:-

(ا) $\text{ما} = (\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}$ جواب $۳\ \text{لا}\ \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲}$

(ب) $\text{ما} = \frac{\text{لا}^۲(\text{لا}+۵)^۳}{(\text{لا}+۳)^۵}$ جواب $\frac{۳۰\ \text{لا}\ (\text{لا}+۵)^۲}{(\text{لا}+۳)^۶}$

(۲) $\text{ما} = \text{ما}_۱ \times \text{ما}_۲ \times \cdots \times \text{ما}_\text{ن}$ لوکارتمی تفرق کے ذریعہ

ثابت کرو کہ اگر $\text{ما}_1 \ldots\ldots \text{ما}_\text{ن}$ فرداً فرداً لا کے تفاعل ہیں تو

$$\frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ما}_1}\,\frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{ما}_2}\,\frac{\text{فرما}_2}{\text{فرلا}} + \ldots\ldots \frac{1}{\text{ما}_\text{ن}}\,\frac{\text{فرما}_\text{ن}}{\text{فرلا}}$$

اور جب $\text{ما}_1 = \text{ما}_2 \ldots = \text{ما}_\text{ن} = \text{لا}$ تو $\frac{\text{فرلا}^\text{ن}}{\text{فرلا}} = \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$

(۳) $\text{ما} = \frac{(\text{لا}-1)^{\frac{5}{2}}}{(\text{لا}-2)^{\frac{3}{4}}(\text{لا}-3)^{\frac{7}{3}}}$ بتاؤ کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{لا}-1)^{\frac{3}{2}}(7\text{لا}^2+30\text{لا}-97)}{12(\text{لا}-2)^{\frac{7}{4}}(\text{لا}-3)^{\frac{10}{3}}}$

(۴) اگر $\text{ما} = \text{لا}^\text{لا}$ تو بتاؤ کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^\text{لا}(1 + \text{لوک لا})$

[حل $\text{لوک ما} = \text{لا لوک لا}$ $\therefore \frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (\text{لوک لا} + 1)$ ]

(۵) اگر $\text{ما} = \text{و}^{\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{لا}}(1 + \text{لوک لا})$

[حل $\text{لوک ما} = \text{لا}^\text{لا}$ $\therefore \frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرلا}^\text{لا}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^\text{لا}(1 + \text{لوک لا})$ ]

(۶) $\text{ما} = \text{لا}^\text{ن}\,\text{لوک}^\text{ن}\,\text{لا}$ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔ جواب $\text{ن}(\text{لا لوک لا})^{\text{ن}-1}$ $(\text{لوک لا} + 1)$

(۷) $\text{ما} = \text{لوک}(\text{لوک لا})$ بتاؤ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لا لوک لا}}$

(۸) $\text{ما} = \text{لوک}\,\frac{\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لوک لا}}$ بتاؤ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}}{1-\text{لا}^2} - \frac{1}{\text{لا لوک لا}}$

## ۳ $\frac{\text{فر}\,\text{ا}^\text{و}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین۔ جبکہ و تفاعلِ لا ہے

فرض کرو $\text{ما} = \text{ا}^\text{و}$ تب $\text{لوک ما} = \text{و لوک ا}$

تضمینی تفاعلوں کے تفرق کے قاعدہ سے

$$\frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = \text{لوک ا} \quad \therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = \text{ما لوک ا} = \text{ا}^\text{و}\,\text{لوک ا}$$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لوک ا} \times \text{ا}^{\text{و}} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$

یعنے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{ا}^{\text{و}} = \text{لوک ا} \times \text{ا}^{\text{و}} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$

اگر اس ضابطہ میں و = نو لکھا جائے تو

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{نو}^{\text{و}} = \text{نو}^{\text{و}} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

مثال (۱) $\text{ى}^{\text{و}}$ کا تفرق۔ جبکہ ى اور و دونوں لا کے تفاعل ہیں۔

فرض کرو $\text{ما} = \text{ى}^{\text{و}}$ تب $\text{لوک ما} = \text{و لوک ى}$

اور $\frac{1}{\text{ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و} \frac{\text{فر لوک ى}}{\text{فر لا}} + \text{لوک ى} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$

$$= \frac{\text{و}}{\text{ى}} \frac{\text{فر ى}}{\text{فر لا}} + \text{لوک ى} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ى}^{\text{و}} \left( \frac{\text{و}}{\text{ى}} \frac{\text{فر ى}}{\text{فر لا}} + \text{لوک ى} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \right)$

مثال (۲) $\text{ما} = \frac{\text{نو}^{\text{لا}} + \text{نو}^{-\text{لا}}}{\text{نو}^{\text{لا}} - \text{نو}^{-\text{لا}}}$ کا تفرقی سر دریافت کرو۔

$$\text{لوک ما} = \text{لوک} (\text{نو}^{\text{لا}} + \text{نو}^{-\text{لا}}) - \text{لوک} (\text{نو}^{\text{لا}} - \text{نو}^{-\text{لا}})$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \left[ \text{لوک} (\text{نو}^{\text{لا}} + \text{نو}^{-\text{لا}}) - \text{لوک} (\text{نو}^{\text{لا}} - \text{نو}^{-\text{لا}}) \right]$$

$$\frac{\text{فر لوک} (\text{نو}^{\text{لا}} + \text{نو}^{-\text{لا}})}{\text{فر} (\text{نو}^{\text{لا}} + \text{نو}^{-\text{لا}})} \frac{\text{فر} (\text{نو}^{\text{لا}} + \text{نو}^{-\text{لا}})}{\text{فر لا}} - \frac{\text{فر لوک} (\text{نو}^{\text{لا}} - \text{نو}^{-\text{لا}})}{\text{فر} (\text{نو}^{\text{لا}} - \text{نو}^{-\text{لا}})} \frac{\text{فر} (\text{نو}^{\text{لا}} - \text{نو}^{-\text{لا}})}{\text{فر لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right) - \frac{1}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}} - \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}\left(\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}} - \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}\right)$$

$$= ۱ - \frac{\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)^{۲}}{\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)^{۲}} = - \frac{۴}{\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)^{۲}}$$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تفاعلوں کے مشتق دریافت کرو:-

(۱) $\text{ما} = \text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}$ جواب $\text{لا}^{-۲}\,\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}$

(۲) $\text{ما} = \frac{1}{۲}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)$ " $\frac{1}{۲}\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)$

(۳) $\text{ما} = \text{لا}^{\text{لوک ما لا}}$ " $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{لوک ما لا}}$

(۴) $\text{ما} = \text{و}^{\text{لوک ما } ۱ - \text{لا}}$ " $\frac{\text{ما لوک ل}}{۲\,(\text{لا} - ۱)}$

۵ $\text{ما} = \left(\text{لوک لا}\right)^{\text{لوک لا}}$ " $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\left\{۱ + \text{لوک}\left(\text{لوک لا}\right)\right\}$

(۶) $\text{ما} = \frac{1}{۲}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{۲}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\right)$ " $\frac{1}{۴}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{۲}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\right)$

(۷) اگر $\text{لا}\,(۱ + \text{ما})^{\frac{1}{۲}} + \text{ما}\,(۱ + \text{لا})^{\frac{1}{۲}} = ۰$ ۔ تو بتاؤ کہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{۱}{(۱ + \text{لا})^{۲}}$$

(۸) اگر $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فز ما}}{\sqrt{1+\text{ما}^4}} + \frac{\text{فز لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^4}} = 0$$

(۹) $\text{لا} = \text{و}^{\text{لا}-\text{ما}}$ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}} = \frac{\text{لوک لا}}{(1+\text{لوک لا})^2}$

(۱۰) $\text{ما} = \cfrac{\text{لا}^2}{1+\cfrac{\text{لا}^2}{1+\cfrac{\text{لا}^2}{1+\text{وغیرہ لاتناہی تک}}}}$ $\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}}$ دریافت کرو

[حل $\text{ما} = \frac{\text{لا}^2}{1+\text{ما}}$ پس $\text{ما}^2 + \text{ما} = \text{لا}^2$ اور $\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}} = \frac{2\,\text{لا}}{1+2\,\text{ما}}$

ما کی دو درجی مساوات حل کرنے سے $2\,\text{ما} = -1 \pm \sqrt{1+4\,\text{لا}^2}$

لہذا $\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \frac{1}{4}}}$ ]

**۴۔ $\frac{\text{فز جب د}}{\text{فز لا}}$ کی تعیین** جبکہ د مسلسل تفاعل لا ہے۔

فرض کرو کہ ما = جب لا جس میں لا کی نیم قطریوں میں پیمایش کی گئی ہے۔

تب $$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جب}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{جب لا}}{\text{مف لا}}$$

$$= \frac{2\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(2\,\text{لا} + \text{مف لا})\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{مف لا}}{\text{مف لا}}$$

$$= \text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{2}\right) \frac{\text{جب}\,\frac{\text{مف لا}}{2}}{\frac{\text{مف لا}}{2}}$$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا} \leftarrow .} \text{جم} \left( \text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲} \right) = \text{جم لا} \quad \text{اور} \quad \text{نہا}_{\text{مف لا} \leftarrow .} \frac{\text{جب} \frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}} = ۱$$

(جیسا کہ علمِ مثلث مستوی کی ابتدائی کتب میں طالب علم نے پڑھا ہوگا)

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{جب لا} = \text{جم لا}$$

اگر ما = جب ی جبکہ ی مسلسل تفاعل لا ہے تو تفرق کے قاعدہ (ح) کی رو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{جب ی} = \text{جم ی} \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

**۵ ۔** $\frac{\text{فر جم ی}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین، جبکہ ی مسلسل تفاعلِ لا ہے :۔

$$\text{فرض کرو جم لا} = \text{ما} \quad \text{تب} \quad \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جم (لا + مف لا)} - \text{جم لا}}{\text{مف لا}}$$

$$= - \frac{۲ \,\text{جب} \frac{\text{مف لا}}{۲} \,\text{جب} \left( \text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲} \right)}{\text{مف لا}}$$

$$= - \frac{\text{جب} \frac{\text{مف لا}}{۲} \,\text{جب} \left( \text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲} \right)}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا} \leftarrow .} \frac{\text{جب} \frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}} = ۱ \quad \text{اور جب} \left( \text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲} \right) = \text{جب لا}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{جم لا} = - \text{جب لا}$$

$$\text{اور اس لیے} \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{جم ی} = - \text{جب لا} \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

یہ نتیجہ ۳ سے براہِ راست مستنبط ہوتا ہے اگر

$$ما = جم\,ر = جب\left(\frac{\pi}{2} - ر\right) \text{ لکھا جائے}$$

کیونکہ $\frac{فر}{فزلا} جب\left(\frac{\pi}{2} - ر\right) = جم\left(\frac{\pi}{2} - ر\right) \frac{فر}{فزلا}\left(\frac{\pi}{2} - ر\right) = - جب\,لا \frac{فر}{فزلا}$

واضح ہے کہ ۴ اور ۵ کے نتائج مندرجۂ ذیل متشاکل وضعوں میں لکھے جا سکتے ہیں:-

$$\frac{فر}{فزلا}(جب\,ر) = جب\left(ر + \frac{\pi}{2}\right)\frac{فر}{فزلا}$$

اور

$$\frac{فر}{فزلا}(جم\,ر) = جم\left(ر + \frac{\pi}{2}\right)\frac{فر}{فزلا}$$

۶ $\frac{فر\,مس\,ر}{فزلا}$ کی تعیین، جبکہ ر مسلسل تفاعلِ لا ہے۔

فرض کرو $ما = مس\,لا$

تب $\frac{معـ\,ما}{معـ\,لا} = \frac{مس(لا + معـ\,لا) - مس\,لا}{معـ\,لا}$

$$= \frac{\frac{جب\,(لا + معـ\,لا)}{جم\,(لا + معـ\,لا)} - \frac{جب\,لا}{جم\,لا}}{معـ\,لا}$$

$$= \frac{جب\,معـ\,لا}{معـ\,لا\,جم\,لا\,جم\,(لا + معـ\,لا)}$$

$$\underset{معـ\,لا \to \cdot}{نہا} \frac{جب\,معـ\,لا}{معـ\,لا} \times \frac{1}{جم\,لا\,جم\,(لا + معـ\,لا)} = \frac{1}{جم^2\,لا}$$

$$\therefore \frac{فر}{فزلا}(مس\,لا) = \frac{1}{جم^2\,لا} = قط^2\,لا$$

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{مس ء}) = \text{قط}^2\text{ء} \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$

واضح ہے $\frac{\text{فر مس ء}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{جب ء}}{\text{جم ء}}\right)$ اور حاصل تقسیم کے تفرق کے قاعدہ سے

$$= \frac{\text{جم ء} \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{جب ء} - \text{جب ء} \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{جم ء}}{\text{جم}^2\text{ء}}$$

$$= \frac{\text{جم}^2\text{ء} + \text{جب}^2\text{ء}}{\text{جم}^2\text{ء}} \times \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}} = \text{قط}^2\text{ء} \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$$

**۷ $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ مم ء کی تعیین جبکہ ء مسلسل تفاعلِ لا ہے۔**

۶ کے طریقوں سے یا مم لا کو $\frac{1}{\text{مس لا}}$ لکھ کر طالب علم بآسانی ثابت کرسکتا ہے کہ

$$\frac{\text{فر مم لا}}{\text{فر لا}} = - \frac{1}{\text{جب}^2\text{ لا}} = - \text{قم}^2\text{ لا}$$

اور $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{مم ء}) = - \text{قم}^2\text{ء} \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$

**۸ $\frac{\text{فر قط ء}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین، جبکہ ء مسلسل تفاعلِ لا ہے**

فرض کرو ما = قط لا = $\frac{1}{\text{جم لا}}$

$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^2\text{ لا}} = \text{مس لا قط لا}$

اور $\frac{\text{فر قط ء}}{\text{فر لا}} = \text{مس ء قط ء} \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$

اسی طرح   فر قم ی / فر لا = - مم ی قم ی · فر ی / فر لا

مثال (۱) ما = ا جم ک ت + ب جب ک ت، فر ما / فر ت دریافت کرو۔

فر ما / فر ت = - (ا جب ک ت) ک + (ب جم ک ت) ک

= - ا ک جب ک ت + ب ک جم ک ت

مثال (۲) ما = ا مس (جب لا) کو تفرق کرو۔

فرض کرو جب لا = ی    ∴ ما = ا مس ی

فر ما / فر لا = فر (ا مس ی) / فر ی · فر ی / فر لا = ا قط$^{2}$ ی · فر ی / فر لا

= ا قط$^{2}$ (جب لا) · فر جب لا / فر لا = ا قط$^{2}$ (جب لا) جم لا

**۹۔** فر جب$^{-1}$ ی / فر لا کی تعیین جبکہ ی مسلسل تفاعل لا ہے۔

اور - π/۲ ≦ جب$^{-1}$ ی ≦ π/۲

فرض کرو ما = جب$^{-1}$ لا ، - π/۲ ≦ جب$^{-1}$ لا ≦ π/۲ .... (ا)

لا = جب ما ............ (ب)

شکل (۵) میں مسلسل موٹا خط ا و ب دونوں تفاعلوں (ا) اور (ب) کی ترسیم ہے۔

ما کو جب - π/۲ سے π/۲ تک کے وقفہ میں محدود رکھتے ہیں تو تفاعل ما = جب$^{-1}$ لا وحید القیمت ہوتا ہے۔

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے    ۱ = جم ما · فر ما / فر لا

شکل ۵

ترسیم ما = جب$^{-1}$ لا

لیکن جم ما = $\sqrt{1 - \text{جب}^2\,\text{ما}} = \sqrt{1 - \text{لا}^2}$

∴ $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$

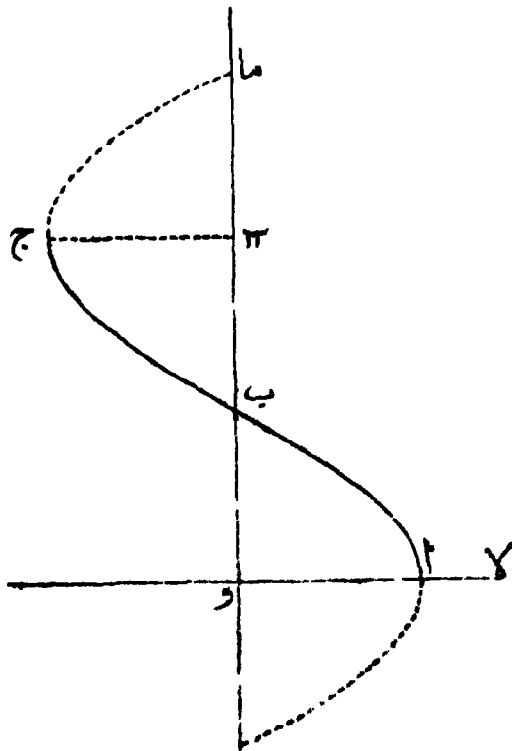
پس $\dfrac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\ \text{جب}^{-1}\,\text{ی} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{ی}^2}}\ \dfrac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ ،

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \text{جب}^{-1}\,\text{ی} \leqq \dfrac{\pi}{2}$

## ۱۰ $\frac{\text{فر جم}^{-1}\text{ء}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین ۔

فرض کرو ما = جم$^{-1}$ لا ، ۰ $\leqq$ جم$^{-1}$ لا $\leqq$ ۲ ...... (ا)

لا = جم ما ............ (ب)

شکل ۶ میں مسلسل موٹا خط ا ب ج دونوں تفاعلوں (ا) اور (ب) کی ترسیم ہے ۔

شکل ۶

ترسیم ما = جم$^{-1}$ لا

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے ۱ = - جب ما $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

لیکن $\text{جب ما} = \sqrt{۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{ما}} = \sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فزما}}{\text{فزلا}} = -\frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{ف}}{\text{فزلا}}\,\text{جم}^{-۱}\,\text{ی} = -\frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{ی}^{۲}}}\;\frac{\text{فزی}}{\text{فزلا}} \;،$$

$$۰ \leqq \text{جم}^{-۱}\,\text{ی} \leqq \pi$$

## ۱۱ $\dfrac{\text{فزمس}^{-۱}\,\text{ی}}{\text{فزلا}}$ کی تعیین۔

فرض کرو $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}\,\text{لا} \;،\; -\frac{\pi}{۲} < \text{مس}^{-۱}\,\text{لا} < \frac{\pi}{۲}$ .... (ا)

$\text{لا} = \text{مس ما}$ . . . . . . . . . . (ب)

شکل ۷ میں مسلسل موٹا خط اوب دونوں تفاعلوں (ا) اور (ب) کی ترسیم ہے۔

ما
π
π/۲
ب
و
لا
ا
-π/۲
-π

شکل ۷
ترسیم $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $۱ = \text{قط}^۲ \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

لیکن $\text{قط}^۲ \text{ما} = ۱ + \text{مس}^۲ \text{ما} = ۱ + \text{لا}^۲$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۱ + \text{لا}^۲}$$

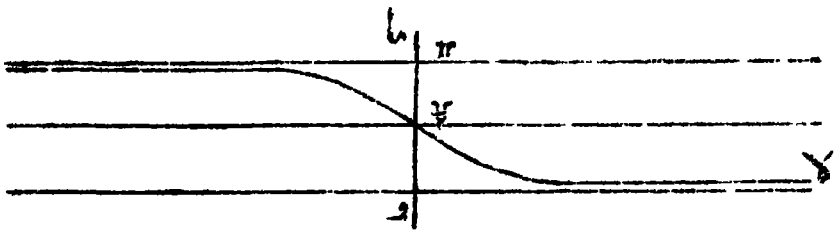
پس $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{مس}^{-۱} \text{ء} = \frac{۱}{۱ + \text{ء}^۲} \frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} \text{ ، } -\frac{\pi}{۲} < \text{مس}^{-۱} < \frac{\pi}{۲}$

## ۱۳ $\frac{\text{فر مم}^{-۱} \text{ء}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین۔

فرض کرو $\text{ما} = \text{مم}^{-۱} \text{لا} \text{ ، } ۰ < \text{مم}^{-۱} \text{لا} < \pi$ ..... (ا)

$\text{لا} = \text{مم ما}$ ............. (ب)

شکل ۲۰ میں دونوں تفاعلوں کی ترسیم درج ہے۔

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $۱ = -\text{قم}^۲ \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

ما π π/۲ لا و

شکل ۲۰
ترسیم $\text{ما} = \text{مم}^{-۱} \text{لا}$

لیکن قم$^2$ ما = ۱ + مم$^2$ ما = ۱ + لا$^2$

$\therefore$ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \frac{1}{1 + \text{لا}^2}$

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ مم$^{-1}$ ء = $- \frac{1}{1 + \text{لا}^2} \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$ ، ۰ < مم$^{-1}$ ء < $\pi$

## ۱۳ $\frac{\text{فر قط}^{-1}\text{ ء}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین۔

فرض کرو ما = قط$^{-1}$ لا ،
$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqq \text{قط}^{-1}\text{لا} < \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leqq \text{قط}^{-1}\text{لا} < -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$ ....(الف)

لا = قط ما ............... (ب)

شکل ۹ میں مسلسل موٹا خط دونوں تفاعلوں کی ترسیم ہے۔

شکل ۹
ترسیم ما = قط$^{-1}$ لا

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $۱ = \text{قط ما مس ما} \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{قط ما مس ما}}$$

لیکن چونکہ $\text{قط}^{۲}\,\text{ما} = ۱ + \text{مس}^{۲}\,\text{ما}$ لہذا $\text{مس}^{۲}\,\text{ما} = \text{قط}^{۲}\,\text{ما} - ۱ = \text{لا}^{۲} - ۱$

$$\therefore \quad \text{مس ما} = \sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\,\text{قط}^{-۱}\,\text{ی} = \frac{۱}{\text{ی}\sqrt{\text{ی}^{۲} - ۱}} \;،\; \begin{cases} ۰ \leqq \text{قط}^{-۱}\,\text{ی} < \frac{\pi}{۲} \\ -\pi \leqq \text{قط}^{-۱}\,\text{ی} < -\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

### ۱۴ - $\dfrac{\text{فر قم}^{-۱}\,\text{ی}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین -

$$\text{فرض کرو} \quad \text{ما} = \text{قم}^{-۱}\,\text{لا} \;،\; \begin{cases} ۰ < \text{قم}^{-۱}\,\text{لا} \leqq \frac{\pi}{۲} \\ -\pi < \text{قم}^{-۱}\,\text{لا} \leqq -\frac{\pi}{۲} \end{cases} \quad \text{.....(ا)}$$

$$\text{لا} = \text{قم ما} \quad \text{..........(ب)}$$

شکل ۱۰ میں مسلسل موٹا خط دونوں تفاعلوں کی ترسیم ہے -

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $۱ = -\,\text{قم ما مم ما} \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{۱}{\text{قم ما مم ما}}$$

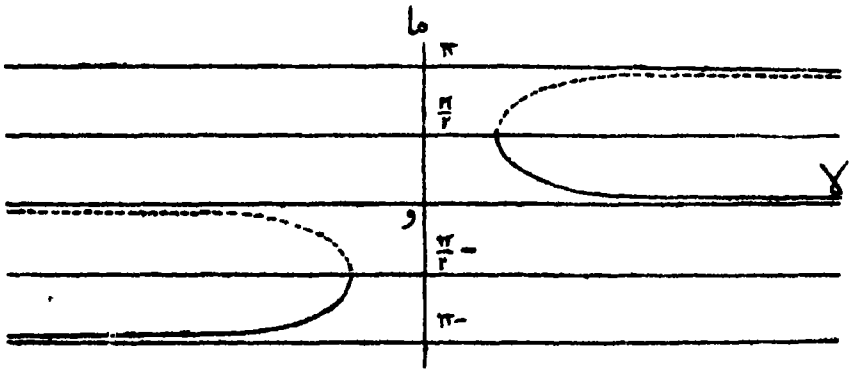
لیکن چونکہ $\text{قم}^{۲}\,\text{ما} = ۱ + \text{مم}^{۲}\,\text{ما}$ لہذا $\text{مم}^{۲}\,\text{ما} = \text{قم}^{۲}\,\text{ما} - ۱ = \text{لا}^{۲} - ۱$

$$\therefore \quad \text{مم ما} = \sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}$$

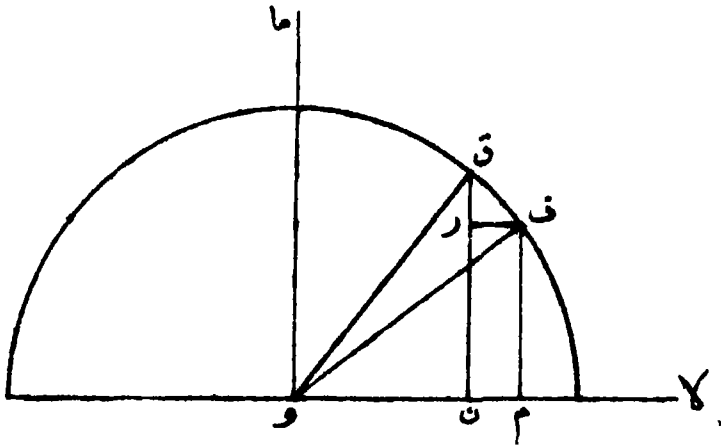
اور $\frac{فر ما}{فر لا} = - \frac{1}{لا \sqrt{لا^2 - 1}}$

شکل ۱۰

ترسیم ما = قم$^{-1}$ لا

پس $\frac{فر}{فر لا}$ قم$^{-1}$ ء $= \frac{1}{ء \sqrt{ء^2 - 1}} \frac{فر ء}{فر لا}$ $\begin{cases} 0 < \text{قم}^{-1} ء \leq \frac{۳}{۲} \\ -۳ < \text{قم}^{-1} ء \leq -\frac{۳}{۲} \end{cases}$

## ۱۵ جب ط کے تفرق کا ہندسی ثبوت۔

شکل ۱۱ میں و مرکز کا نصف دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ولا ، وما علی الترتیب لا اور ما کے محدد ہیں۔ زاویہ لا و ف کو اگر نیم قطری پیمانہ پر ط سے تعبیر کیا جائے تو

$$ط = \frac{\text{قوس ف لا}}{\text{و ف}} \quad \text{اور جب ط} = \frac{\text{قوس ف ق}}{\text{و ف}}$$

شکل ۱۱

پس جب (طہ + مف طہ) - جب طہ = $\frac{\text{ق ر}}{\text{و ف}}$ = $\frac{\text{ق ر}}{\text{ف ق}}$ × $\frac{\text{ف ق}}{\text{و ف}}$

= جم ف $\widehat{\text{ق}}$ ر × $\frac{\text{ف ق}}{\text{و ف}}$

∴ $\frac{\text{جب (طہ + مف طہ) - جب طہ}}{\text{مف طہ}}$ = جم ف $\widehat{\text{ق}}$ ر × $\frac{\text{ف ق}}{\text{قوس ف ق}}$

لیکن نہا مف طہ ← ۰ $\frac{\text{ف ق}}{\text{قوس ف ق}}$ = ۱ اور ساتھ ہی ف $\widehat{\text{ق}}$ ر = طہ

اس لیے $\frac{\text{فر جب طہ}}{\text{فر طہ}}$ = جم طہ

شکل ۱۱ کے ذریعہ طالب علم بآسانی جم طہ، جب⁻¹ طہ اور جم⁻¹ طہ کے تفرق کے ضابطے بھی اخذ کر سکیگا۔ اسی طرح ہندسی طریقہ سے مس طہ، مس⁻¹ طہ وغیرہ کے تفرق کے ضابطے بھی مناسب عمل کے ذریعہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

مثال (۱) ما = جم⁻¹ (جم ۲ لا) کا مشتق دریافت کرو۔

فرض کرو جم ۲ لا = د

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر جم}^{-۱}\text{د}}{\text{فر د}} \times \frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}$$

$$= -\frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{د}^۲}} \cdot \frac{\text{فر جم ۲ لا}}{\text{فر لا}} = -\frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{جم}^۲\text{ ۲ لا}}} \times (-۲ \text{ جب ۲ لا})$$

$$= \frac{۱}{\text{جب ۲ لا}} \times ۲ \text{ جب ۲ لا} = ۲$$

مثال (۲) $\text{و}^{\text{لا}}\text{ جم}^{-۱}\text{ لا}$ کو بلحاظ لا تفرق کرو۔

فرض کرو $\text{و}^{\text{لا}}\text{ جم}^{-۱}\text{ لا} = \text{ما}$

لوکارتم لینے سے $\text{لوک ما} = \text{لوک و}^{\text{لا}} + \text{لوک جم}^{-۱}\text{ لا}$

$$= \text{لا}^{\text{لا}} + \text{لوک جم}^{-۱}$$

$$\therefore \frac{۱}{\text{ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا}^{\text{لا}}(۱ + \text{لوک لا}) - \frac{۱}{\text{جم}^{-۱}\text{لا}\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}\left[\text{لا}^{\text{لا}}(۱ + \text{لوک لا}) - \frac{۱}{\text{جم}^{-۱}\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}}\right]$$

مثال (۳) اگر $\text{ما} = ۲ \text{ مس}^{-۱}\left(\frac{۱ - \text{لا}}{۱ + \text{لا}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}}$

چونکہ $\frac{\text{ما}}{۲} = \text{مس}^{-۱}\left(\frac{۱ - \text{لا}}{۱ + \text{لا}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ لہذا $۱ + \text{مس}^۲ \frac{\text{ما}}{۲} = ۱ + \frac{۱ - \text{لا}}{۱ + \text{لا}}$

یعنے $\text{قط}^۲ \frac{\text{ما}}{۲} = \frac{۲}{۱ + \text{لا}}$

∴ جم² (ما/۲) = (۱ + لا)/۲ اور ۲ جم² (ما/۲) − ۱ = لا = جم ما

تفرق کرنے سے ۱ = فرجم ما/فرلا = −جب ما · فرما/فرلا پس فرما/فرلا = −۱/جب ما

جب ما = √(۱ − لا²)

∴ فرما/فرلا = −۱/√(۱ − لا²)

**مثال (۴)** ما = (و^(امس⁻¹ لا) × (الا − ۱)) / √(۱ + لا²) کو بلحاظ لا تفرق کرو۔

ما (۱ + لا²)^(۱/۲) = و^(امس⁻¹ لا) × (الا − ۱)

لوکارثم لینے سے لوک ما + ۱/۲ لوک (۱ + لا²) = امس⁻¹ لا + لوک (الا − ۱)

∴ (۱/ما) · فرما/فرلا + ۲لا/۲(۱ + لا²) = ا/(۱ + لا²) + ا/(الا − ۱)

(۱/ما) · فرما/فرلا = ا/(۱ + لا²) + ا/(الا − ۱) − لا/(۱ + لا²)

= [ا (الا − ۱) + ا (۱ + لا²) − لا (الا − ۱)] / [(۱ + لا²) (الا − ۱)]

∴ فرما/فرلا = ما (۱ + ا²) لا / [(۱ + لا²) (الا − ۱)]

= [(الا − ۱) و^(امس⁻¹ لا)] / (۱ + لا²)^(۱/۲) × لا (۱ + ا²) / [(۱ + لا²) (الا − ۱)]

= لا و^(امس⁻¹ لا) (۱ + ا²) / (۱ + لا²)^(۳/۲)

مثال (۵) $ما = مس^{-1} \frac{\sqrt{1+لا^2} + \sqrt{1-لا^2}}{\sqrt{1+لا^2} - \sqrt{1-لا^2}}$

$$\therefore \quad مس\, ما = \frac{\sqrt{1+لا^2} + \sqrt{1-لا^2}}{\sqrt{1+لا^2} - \sqrt{1-لا^2}}$$

نسبتوں کے خواص سے $\frac{مس\, ما + 1}{مس\, ما - 1} = \frac{\sqrt{1+لا^2}}{\sqrt{1-لا^2}}$

مربع کرنے سے $\frac{(مس\, ما + 1)^2}{(مس\, ما - 1)^2} = \frac{1+لا^2}{1-لا^2}$

اور بالآخر $لا^2 = \frac{(1+مس\, ما)^2 - (1-مس\, ما)^2}{(1+مس\, ما)^2 + (1-مس\, ما)^2} = \frac{2\, مس\, ما}{1+مس^2 ما} = جب\, 2ما$

$$\therefore \frac{فر\, ما}{فر\, لا} جم\, 2ما = لا \quad \therefore \frac{فر\, ما}{فر\, لا} = \frac{لا}{جم\, 2ما} = \frac{لا}{\sqrt{1-لا^4}}$$

# مشالیں

ذیل کے تفاعلوں کو بلحاظ لا تفرق کرو۔

(۱) $ما = لوک(لوک\, لا)$ جواب $\frac{فر\, ما}{فر\, لا} = \frac{1}{لا\, لوک\, لا}$

(۲) $ما = لا^{لا^{ن}}$ $= لا^{لا^{ن} + ن - 1}(ن\, لوک\, لا + 1)$

(۳) $ما = مس \frac{د\, لا}{1+ب\, لا}$ جواب $= \frac{د}{(1+ب\, لا)^2} قط^2 \frac{د\, لا}{1+ب\, لا}$

(۴) $ما = \frac{مم\, لا}{\sqrt{د^2 - لا^2}}$ جواب $= \frac{لا^2 قم^2 لا + لا\, مم\, لا - د^2 قم^2 لا}{(د^2 - لا^2)^{\frac{3}{2}}}$

(۵) ا = (اجب^۲ لا + ب جم^۲ لا)^ن جواب = ن (ا - ب) جب ۲لا (اجب^۲ لا + ب جب^۲ لا)^{ن-۱}

(۶) ا = قط √(۱ - لا^۲) جواب = ۱ / ۲(۱ - لا)^۲ مس √(۱ - لا^۲) قط √(۱ - لا^۲)

(۷) ا = و^لا مس^{-۱} لا جواب = و^لا { ۱/(۱ + لا^۲) + لا مس^{-۱} (۱ + لوگ لا) }

(۸) ا = جم^{-۱} (و^لا - و^{-لا}) / (و^لا + و^{-لا}) جواب = - ۲ / (و^لا + و^{-لا})

(۹) ا = مس^{-۱} √((۱ - جم لا) / (۱ + جم لا)) جواب = ۱/۲

(۱۰) ا = جم^{-۱} (ب + ا جم لا) / (ا + ب جم لا) جواب = √(ا^۲ - ب^۲) / (ا + ب جم لا)

(۱۱) ا = مم^{-۱} (۱ + √(۱ + لا^۲)) / لا جواب = ۱ / ۲(۱ + لا^۲)

(۱۲) ا = مم^{-۱} لا / مس^{-۱} لا جواب = - (مس^{-۱} لا + مم^{-۱} لا) / (۱ + لا^۲)(مس^{-۱} لا)^۲

(۱۳) ا = مس^{-۱} (۲لا - ب) / ب√۳ + مس^{-۱} (۲ب - لا) / لا√۳ جواب = ۰

(۱۴) ا = √(لا^۲ - ۱) قط^{-۱} √(لا^۲ - ۱)

جواب = لا / √(لا^۲ - ۱) [قط^{-۱} √(لا^۲ - ۱) + ۱ / √(لا^۲ - ۲)]

(۱۵) ا = مس^{-۱} (√ا + √لا) / (۱ - √ا لا) اشارہ - یہاں ا = مس^{-۱} √لا + مس^{-۱} √ا

جواب = ۱ / ۲√لا (۱ + لا)

(۱۶) لوگ ((۱ + لا)/(۱ - لا))^{۱/۴} - ۱/۲ مس^{-۱} لا جواب = لا^۲ / (۱ - لا^۴)

(۱۷) $\text{ما} = \text{لوک}\sqrt{\frac{۱ + \text{لا}\sqrt{۳} + \text{لا}^{۲}}{۱ - \text{لا}\sqrt{۳} + \text{لا}^{۲}}} + \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$ جواب $= \frac{۲\sqrt{۳}}{۱ + \text{لا}^{۴}}$

(۱۸) $\text{ما} = \text{لوک}\frac{(۱ + \text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۴}}}{(۱ + \text{لا})^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{۱}{۲}\text{مس}^{-۱}\text{لا}$ جواب $= \frac{\text{لا}}{(۱ + \text{لا})(۱ + \text{لا}^{۲})}$

(۱۹) $\text{ما} = \text{لوک}\frac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}} + \frac{۱}{۲}\text{لوک}\frac{۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲}}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^{۲}} + \sqrt{۳}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$

جواب $= \frac{۶}{۱ - \text{لا}^{۶}}$

(۲۰) ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}}{\text{ف ط}}\left(\text{جب ط جم ط}\sqrt{۱ - \text{ج}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}}\right)$

$= \frac{\text{ا جب}^{۴}\text{ ط} + \text{ب جب}^{۲}\text{ ط} + \text{ج}}{\sqrt{۱ - \text{ج}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}}}$

جس میں $\text{ا} = ۳\,\text{ج}^{۲}$، $\text{ب} = -۲(۱ + \text{ج}^{۲})$ اور $\text{ج} = ۱$

# پانچواں باب

## متواتر تفرق

**۱۔ متواتر تفرق** — اب تک ہم نے واحد متغیر کے مختلف تفاعلوں کو تفرق کرنے کے قاعدوں کا مطالعہ کیا۔ چونکہ ما = ف ( لا ) کا تفرقی سر یا مشتق عموماً لا کا ایک دوسرا تفاعل ہوتا ہے اس لیے بلحاظ لا اس کو مکرر تفرق کر سکتے ہیں۔ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کا یہ تفرقی سر یا مشتق بلحاظ لا ابتدائی تفاعل یعنی ما کا دوسرا تفرقی سر یا دوسرا مشتق کہلاتا ہے اور اس کے لیے علامات $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ یا $\text{ما}''$ یا $\text{عف}^{2}_{\text{لا لا}}\text{ما}$ استعمال کیے جاتے ہیں۔

اسی طرح $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ کا مشتق بلحاظ لا، ابتدائی تفاعل ما کا تیسرا تفرقی سر یا تیسرا مشتق بلحاظ لا کہلاتا ہے۔ اور $\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فر لا}^{3}}$ وغیرہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ تین سے بالاتر یا اعلیٰ مشتقات کے لیے بھی اسی اصول کے بموجب نام مستعمل ہیں۔ چنانچہ ما کا ن۔واں مشتق بلحاظ لا $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$، یا $\text{ما}^{(\text{ن})}$، یا $\text{عف}^{\text{ن}}\text{ما}$ وغیرہ

تعبیر کیا جاتا ہے اور ما کو بلحاظ لا متواتر ن مرتبہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

متواتر تفرق کو میکانیات اور ہندسہ میں بڑی اہمیت حاصل ہے۔

مثال $\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}$ کا دوسرا اور ن۔ واں تفرقی سر یا مشتق دریافت کرو۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}\right)=\frac{\text{فر}(\text{لا}+\text{ا})^{-1}}{\text{فرلا}}=-(\text{لا}+\text{ا})^{-2}\frac{\text{فر}(\text{لا}+\text{ا})}{\text{فرلا}}$$
$$=-(\text{لا}+\text{ا})^{-2}$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}^2}{\text{فرلا}^2}\left(\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}\right)=\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}-(\text{لا}+\text{ا})^{-2}=\frac{2}{(\text{لا}+\text{ا})^3}=2(\text{لا}+\text{ا})^{-3}$$

اسی طرح $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\left(\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}\right)=(-1)^{\text{ن}}\,\underline{|\text{ن}}\,(\text{لا}+\text{ا})^{-(\text{ن}+1)}$

**۳۔ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے مشتق تفاعلات۔** جس میں ن ایک مستقل ہے۔

فرض کرو $\text{ما}=\text{لا}^{\text{ن}}$

تب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$ ، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}=\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2}$

اور عام طور پر $\frac{\text{فر}^{\text{ر}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ر}}}=\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}=\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots 1=\underline{|\text{ن}}$

اور ن سے بالاتر مشتقات معدوم ہوتے ہیں۔

اگر ن کسر یا منفی قوت نما ہو تو ن کے بعد کے مشتقات میں سے کوئی مشتق معدوم نہ ہو سکیگا۔

## ۳۔ اگر ما = لا$^{\text{ن}-۱}$ لوک لا تو $\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}}$ کی تعیین۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = (\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{لوک لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} = (\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{لوک لا} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}$$

$$\frac{\text{فر}^۲\text{ ما}}{\text{فر لا}^۲} = (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{لوک لا} + \frac{(\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}}{\text{لا}} + (\text{ن}-۲)\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}$$

$$= (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{لوک لا} + (\overline{\text{ن}-۱} + \overline{\text{ن}-۲})\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

اور $\frac{\text{فر}^{\text{ن}-۱}\text{ ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-۱}} = (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots۱\,\text{لوک لا} + (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots۱$
$+ (\overline{\text{ن}+۱} + \overline{\text{ن}-۲} + \ldots)\,۱$

$$\therefore \frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}} = \frac{\lfloor\text{ن}-۱}{\text{لا}} + ۰ + ۰ + \ldots$$

اس مثال میں ظاہر ہے کہ عمل تفرق جیسا جیسا آگے کو بڑھتا جاتا ہے وہ تمام رقوم نظر انداز کیے جاسکتے ہیں جن میں لوک لا بطور جزوِ ضربی موجود نہیں ہوتا ہے۔

## ۴۔ ما = جب م لا کے مشتق تفاعلات۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{م جم م لا} \qquad \text{اور} \qquad \frac{\text{فر}^۲\text{ ما}}{\text{فر لا}^۲} = -\text{م}^۲\,\text{جب م لا}$$

اور عام طور پر

$$\begin{cases} \frac{\text{فر}^{۲\text{ن}}\text{ ما}}{\text{فرلا}^{۲\text{ن}}} = (-۱)^{\text{ن}}\,\text{م}^{۲\text{ن}}\,\text{جب م لا} \\ \frac{\text{فر}^{۲\text{ن}+۱}\text{ ما}}{\text{فرلا}^{۲\text{ن}+۱}} = (-۱)^{\text{ن}}\,\text{م}^{۲\text{ن}+۱}\,\text{جم م لا} \end{cases}$$

یہ دونوں نتائج ایک مساوات کے ذریعہ ظاہر کیے جاسکتے ہیں چنانچہ

$$\left(\frac{\text{فر}^{\text{ر}}}{\text{فرلا}^{\text{ر}}}\right)\text{جب م لا} = \text{م}^{\text{ر}}\,\text{جب}\left(\text{م لا} + \text{ر}\,\frac{\pi}{۲}\right)$$

اسی طرح

$$\left(\frac{\text{فر}^{\text{ر}}}{\text{فرلا}^{\text{ر}}}\right)\text{جم م لا} = \text{م}^{\text{ر}}\,\text{جم}\left(\text{م لا} + \text{ر}\,\frac{\pi}{۲}\right)$$

## مثال ۵ ما = $\text{و}^{\text{لا}}$ کے مشتق تفاعلات۔

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ا و}^{\text{لا}}$ ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{2}} = \text{ا}^{2}\text{ و}^{\text{لا}}$ اور اسی طرح $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} = \text{ا}^{\text{ن}}\text{ و}^{\text{لا}}$

اگر $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$ کے عوض سہولت کی خاطر ن-ویں مشتق کے لیے $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}}$ لکھا جائے تو اس ترقیم کے بموجب

$$\left\{\text{ا}_{0}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}-1} + \text{ا}_{2}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\right\}\text{و}^{\text{لا}}$$

$$= \text{ا}_{0}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}}\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{1}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}-1}\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{2}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}-2}\text{و}^{\text{لا}} + \cdots$$

$$= \text{ا}_{0}\text{ ا}^{\text{ن}}\text{ و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{1}\text{ ا}^{\text{ن}-1}\text{ و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{2}\text{ ا}^{\text{ن}-2}\text{ و}^{\text{لا}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{ و}^{\text{لا}}$$

$$= \left\{\text{ا}_{0}\text{ ا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\text{ ا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_{2}\text{ ا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\right\}\text{و}^{\text{لا}}$$

اور اگر $\text{ا}_{0}\text{ لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\text{ لا}^{\text{ن}-1} + \cdots \text{ا}_{\text{ن}}$ کو فہ (لا) تفاعل سے تعبیر کیا جائے تو مصرحۂ بالا نتیجہ بشکل $\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)\text{و}^{\text{لا}} = \text{فہ(ا) و}^{\text{لا}}$ لکھا جا سکتا ہے، اس مفروضہ پر کہ تفاعل فہ (ا) میں ا کی صرف مثبت صحیح قوتیں شریک ہیں۔

## مثال ۶ ما = $\text{و}^{\text{لا}}$ جب ب لا کا ن-واں تفرقی سر۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و}^{\text{لا}}\left(\text{ا جب ب لا} + \text{ب جم ب لا}\right)$$

اگر مس فہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ تو ب = $\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}$ جب فہ

اور $\text{ا} = \sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}\ \text{جم فہ}$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = (\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\ \text{و}^{\text{الا}}\ \text{جب}\ (\text{ب لا} + \text{فہ})$

اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = (\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲})\ \text{و}^{\text{الا}}\ \text{جب}\ (\text{ب لا} + ۲\ \text{فہ})$

$\therefore \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} = (\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲})^{\frac{\text{ن}}{۲}}\ \text{و}^{\text{الا}}\ \text{جب}\ (\text{ب لا} + \text{ن فہ})$

اسی طرح $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}} \text{و}^{\text{الا}}\ \text{جم ب لا} = (\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲})^{\frac{\text{ن}}{۲}}\ \text{و}^{\text{الا}}\ \text{جم}\ (\text{ب لا} + \text{ن فہ})$

## ۷ـ $\text{مس}^{-۱}\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right)$ اور $\text{مس}^{-۱}\ \text{لا}$ کے مشتقوں کی تعیین۔

(۱) فرض کرو $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right)$ یا $\text{لا} = \text{مم ما}$

تب $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = -\text{قم}^{۲}\ \text{ما} = -(۱ + \text{لا}^{۲})$

$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{-۱}{۱ + \text{لا}^{۲}} = -\text{جب}^{۲}\ \text{ما}$

اس لیے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right) = -\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جب}^{۲}\ \text{ما}) = -\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\ \frac{\text{فر}}{\text{فر ما}}(\text{جب}^{۲}\ \text{ما})$

$= \text{جب}^{۲}\ \text{ما}\ \frac{\text{فر}}{\text{فر ما}}(\text{جب}^{۲}\ \text{ما}) = \text{جب}^{۲}\ \text{ما جب ۲ ما}$

مکرر $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جب}^{۲}\ \text{ما جب ۲ ما}) = -\text{جب}^{۲}\ \text{ما}\ (۲\ \text{جب}^{۲}\ \text{ما جم ۲ ما} + ۲\ \text{جب ۲ ما جب ما جم ما})$

$= -۲\ \text{جب}^{۳}\ \text{ما}\ (\text{جب ما جم ۲ ما} + \text{جم ما جب ۲ ما}) = -۲\ \text{جب}^{۳}\ \text{ما جب ۳ ما}$

اسی طرح $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۴}} = ۱ \times ۲ \times ۳\ \text{جب}^{۴}\ \text{ما جب ۴ ما}$

اور عام طور پر فرن ما / فر لان = (۱-)ن |ن-۱ جبن ما جب ن ما

(ب) چونکہ مس-۱ لا = π/۲ - مس-۱ (۱/لا)

فرن (مس-۱ لا) / فر لان = (۱-)ن-۱ |ن-۱ جبن ما جب ن ما

جس میں ما = مم-۱ لا، حسب سابق

مندرجۂ بالا نتیجہ اس طرح سے بھی لکھا جا سکتا ہے:

فرن (مس-۱ لا) / فر لان = (۱-)ن-۱ |ن-۱ جب (ن مس-۱ (۱/لا)) / (۱ + لا۲)ن/۲

**۸۔** اگر ما = جب (م جب-۱ لا) تو ثابت کرو کہ

(۱ - لا۲) فر۲ ما / فر لا۲ - لا فر ما / فر لا + م۲ ما = ۰

دیے ہوئے تفاعل کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے

فر ما / فر لا = م جم (م جب-۱ لا) / √(۱ - لا۲)

∴ (۱ - لا۲) (فر ما / فر لا)۲ = م۲ جم۲ (م جب-۱ لا)

دوبارہ تفرق کرنے سے

۲ (۱-لا۲) فر ما / فر لا · فر۲ ما / فر لا۲ - (فر ما / فر لا)۲ ۲ لا = - ۲ م۲ جم (م جب-۱ لا) جب (م جب-۱ لا) م / √(۱ - لا۲)

∴ (۱-لا۲) فر ما / فر لا · فر۲ ما / فر لا۲ - (فر ما / فر لا)۲ لا = - م۲ جم (م جب-۱ لا) جب (م جب-۱ لا) / √(۱ - لا۲)

فر ما / فر لا پر تقسیم کرنے سے (۱-لا۲) فر۲ ما / فر لا۲ - لا فر ما / فر لا + م۲ جم (م جب-۱ لا) جب (م جب-۱ لا) / √(۱-لا۲) ÷ م جم (م جب-۱ لا) / √(۱ - لا۲)

$$\therefore\ (۱ - لا^{۲})\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} - لا\frac{فر ما}{فر لا} + م^{۲} ما = ۰$$

مثال (۱) اگر $ما = \frac{(ا لا + ب)}{(ج لا + د)}$ تو ثابت کرو کہ

$$۲\frac{فر ما}{فر لا} \times \frac{فر^{۳} ما}{فر لا^{۳}} = ۳\left(\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}\right)^{۲}$$

$$\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{-(ا لا + ب)}{(ج لا + د)^{۲}} + \frac{ا}{ج لا + د}$$

$$\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} = \frac{۲ ج^{۲}(ا لا + ب)}{(ج لا + د)^{۳}} - \frac{۲ ا ج}{(ج لا + د)^{۲}}$$

$$\frac{فر^{۳} ما}{فر لا^{۳}} = -\frac{۶ ج^{۳}(ا لا + ب)}{(ج لا + د)^{۴}} + \frac{۶ ا ج^{۲}}{(ج لا + د)^{۳}}$$

پس
$$۲\frac{فر ما}{فر لا} \times \frac{فر^{۳} ما}{فر لا^{۳}} = ۲\left\{\frac{۶ ج^{۴}(ا لا + ب)^{۲}}{(ج لا + د)^{۶}} - \frac{۶ ا ج^{۳}(ا لا + ب)}{(ج لا + د)^{۵}} - \frac{۶ ا ج^{۳}(ا لا + ب)}{(ج لا + د)^{۵}} + \frac{۶ ا^{۲} ج^{۲}}{(ج لا + د)^{۴}}\right\}$$

اور
$$۳\left(\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}\right)^{۲} = ۳\left\{\frac{۴ ج^{۴}(ا لا + ب)^{۲}}{(ج لا + د)^{۶}} - \frac{۸ ا ج^{۳}(ا لا + ب)}{(ج لا + د)^{۵}} + \frac{۴ ا^{۲} ج^{۲}}{(ج لا + د)^{۴}}\right\}$$

اور واضح ہے کہ یہ دونوں مساوی ہیں۔

مثال (۲) اگر ما = ک جم (لوک لا) + ل جب (لوک لا) تو بتاؤ کہ

$$لا^{۲}\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} + لا\frac{فر ما}{فر لا} + ما = ۰$$

ما کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے

$$لا\frac{فر ما}{فر لا} = -ک\ جب\ (لوک\ لا) + ل\ جم\ (لوک\ لا)$$

مکرر تفرق سے $\frac{\text{لا فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ک جم (لوک لا)}}{\text{لا}} - \frac{\text{ل جب (لوک لا)}}{\text{لا}}$

$\therefore \text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ک جم (لوک لا)} + \text{ل جب (لوک لا)} = ۰$

یعنے $\text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$

## ۹۔ لائبنٹس (Leibniz) کا مسئلہ

لا کے دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا ن۔ واں تفرقی سر دریافت کرنے کے لیے لائبنٹس کا مندرجہ ذیل مسئلہ استعمال کیا جاتا ہے:

فرض کرو ی اور و، لا کے دو تفاعل ہیں اور ما = ی و تب

$$\frac{\text{فر}^{ن}\text{ما}}{\text{فرلا}^{ن}} = \frac{\text{فر}^{ن}(\text{ی و})}{\text{فرلا}^{ن}} = \text{ی} \frac{\text{فر}^{ن}\text{و}}{\text{فرلا}^{ن}} + \text{ن} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} \frac{\text{فر}^{ن-۱}\text{و}}{\text{فرلا}^{ن-۱}} + \frac{\text{ن (ن} - ۱)}{۲ \times ۱} \frac{\text{فر}^{۲}\text{ی}}{\text{فرلا}^{۲}} \frac{\text{فر}^{ن-۲}\text{و}}{\text{فرلا}^{ن-۲}} + \dots + \text{ن} \frac{\text{فر}^{ن}\text{ی}}{\text{فرلا}^{ن}}$$

بنظر سہولت $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ کے لیے علی الترتیب ما′، ی′ اور و′ لکھو

اِس طرح ما، ی اور و کے دوسرے تفرقی سروں کو علی الترتیب ما″، ی″ اور و″ سے تعبیر کرو اور اسی طریقۂ ترقیم کے بموجب ان کے ن۔ویں تفرقی سروں کو $\text{ما}^{(ن)}$، $\text{ی}^{(ن)}$ اور $\text{و}^{(ن)}$ سے تعبیر کرو۔

ما کو بلحاظ لا پہلے مرتبہ تفرق کرنے سے ما′ = ی و′ + و ی′

دوسرے مرتبہ تفرق کرنے سے ما″ = ی و″ + ی′ و′ + و′ ی′ + و ی″ = ی و″ + ۲ ی′ و′ + و ی″

تیسرے مرتبہ تفرق کرنے سے ما‴ = ی و‴ + ی′ و″ + ۲ ی′ و″ + ۲ ی″ و′ + و′ ی″ + و ی‴

= ی و‴ + ۳ ی′ و″ + ۳ ی″ و′ + و ی‴

جس سے ظاہر ہے کہ جملہ مندرجہ بالا کی رقمیں $(\text{ا} + \text{ب})^{۳}$ کے پھیلاؤ کی رقموں کے

مشابہ ہیں۔
فرض کرو کہ ن - ویں تفرقی سر کے جملہ کی رقمیں بھی اسی کلیہ کے تابع ہیں ۔

$$\text{اور}\quad \text{ما}^{(ن)} = \text{ر}\,\text{و}^{(ن)} + \text{ن}\,\text{رَ}\,\text{و}^{(ن-۱)} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{رً}\,\text{و}^{(ن-۲)}$$

$$+ \cdots\cdots + \text{ن}\,\text{و}'\,\text{ر}^{(ن-۱)} + \text{ر}^{(ن)}\,\text{و}$$

اس کو مکرر تفرق کرنے سے

$$\text{ما}^{(ن+۱)} = \text{ر}\,\text{و}^{(ن+۱)} + \text{رَ}\,\text{و}^{(ن)} + \text{ن}\left\{\text{رَ}\,\text{و}^{(ن)} + \text{رً}\,\text{و}^{(ن-۱)}\right\} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\left\{\text{رً}\,\text{و}^{(ن-۱)} + \text{رٌ}\,\text{و}^{(ن-۲)}\right\}$$

$$+ \cdots\cdots + \text{ر}^{(ن+۱)}\,\text{و}$$

$$= \text{ر}\,\text{و}^{(ن+۱)} + (\text{ن}+۱)\,\text{رَ}\,\text{و}^{(ن)} + \frac{(\text{ن}+۱)\text{ن}}{۲\times۱}\,\text{رً}\,\text{و}^{(ن-۱)} + \cdots\cdots + \text{ر}^{(ن+۱)}\,\text{و}$$

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ اس جملہ میں رقموں کے سر مسئلۂ ثنائی کے کلیہ کے تابع ہیں۔
پس واضح ہے کہ اگر تفرق کا یہ کلیہ ن کی کسی ایک صحیح قیمت کے لیے صادق آتا ہے تو اس سے ایک عدد زائد کی صحیح قیمت کے لیے بھی صادق ثابت ہوتا ہے چونکہ ہم نے اس کو بطور امر واقعی ن = ۳ کے لیے ثابت کر کے بتایا اس لیے وہ ن = ۴ اور اس سے بالاتر صحیح قیمتوں کے لیے بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ پس یہ کلیہ ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لیے صادق آتا ہے۔

**مثال ۱۰** لائبنٹس کے کلیے کے ذریعے ثابت کرو کہ اگر ن ایک صحیح مثبت عدد ہو اور ر تفاعل لا ہو تو

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{ن}\left(\text{و}^{\text{ا}\text{لا}}\,\text{ر}\right) = \text{و}^{\text{ا}\text{لا}}\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{ن}\text{ر}$$

فرض کرو $\text{و} = \text{و}^{\text{ا}\text{لا}}$ - تب چونکہ

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{ا}\text{لا}},\quad \frac{\text{فر}^۲\text{و}}{\text{فرلا}^۲} = \text{ا}^۲\,\text{و}^{\text{ا}\text{لا}},\ \cdots\cdots \text{اور}\ \frac{\text{فر}^{ن}\text{و}}{\text{فرلا}^{ن}} = \text{ا}^{ن}\,\text{و}^{\text{ا}\text{لا}}$$

اس لیے $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}} \left(\text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی}\right) = \text{و}^{\text{الا}} \left\{ \text{ا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1} \frac{\text{فر ی}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ن(ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}^{\text{ن}-2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فرلا}^{2}} + \cdots\cdots + \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ی}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} \right\}$

جو بشکلِ ذیل لکھا جا سکتا ہے :

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}} \left(\text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی}\right) = \text{و}^{\text{الا}} \left\{ \text{ا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1} \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ن(ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}^{\text{ن}-2}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{2} + \cdots\cdots + \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}} \right\} \text{ی}$$

$$\text{یا}\quad \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}} \left(\text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی}\right) = \text{و}^{\text{الا}} \left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}} \text{ی}$$

جس میں فرض کیا جاتا ہے کہ علامتی جملہ $\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}$ مسئلۂ ثنائی کے ذریعے پھیلایا جا سکتا ہے اور حاصل شدہ پھیلاؤ میں

$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ی}$، $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\text{ی}$ ...... $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ر}}\text{ی}$ کے عوض علی الترتیب

$\frac{\text{فر ی}}{\text{فرلا}}$، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فرلا}^{2}}$ ...... $\frac{\text{فر}^{\text{ر}}\text{ی}}{\text{فرلا}^{\text{ر}}}$ لکھے جاتے ہیں ۔

۱۱ ـ عام طور پر اگر فہ (لا) کسی بھی جملہ کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا کی صرف مثبت صحیح قوتیں شامل ہیں تو

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right) \text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی} = \text{و}^{\text{الا}}\,\text{فہ}\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right) \text{ی}$$

اس لیے کہ فرض کرو فہ $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)$ کو پھیلانے سے اس کی شکل

$\text{ا}_{0}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}-1} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$ ہوتی ہے

تب مسئلہ کا ضابطہ مندرجۂ بالا جملہ کی ہر ایک رقم پر حاوی ہوتا ہے اور اس لیے ان تمام رقموں کے مجموعہ پر بھی ۔ پس

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی} = \text{و}^{\text{الا}}\,\text{فہ}\left(\text{ا}+\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ی}$$

اس نتیجہ کو مندرجہ ذیل شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں جو متقل سروں والی تفرقی مساواتوں کے حل کرنے میں بہت اہمیت رکھتی ہے۔

$$\text{فہ}\left(\text{ا}+\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ی} = \text{و}^{-\text{الا}}\,\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی}$$

## ۱۲ اگر ما = جب$^{-۱}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۲}}} - (\text{۲ن}+\text{۱})\,\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} - \text{ن}^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = \text{۰}$$

یہاں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}}$ یعنی $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۱}$

پس عمل تفرق سے $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}\,\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

$$\therefore\ (\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۰}$$

لائبنٹس کے مسئلے سے

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left\{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}\right\} = (\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۲}}} - \text{۲ن}\,\text{لا}\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} - \text{ن}(\text{ن}-\text{۱})\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$$

(اس لیے کہ $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})$ کے تیسرے اور اس کے بعد کو آنے والے تفرقی سر صفر ہیں) ۔

معہذا $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = \text{لا}\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} + \text{ن}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$

اس آخری جملہ کو اس سے پہلے کے جملہ میں سے وضع کرنے سے مساوات کے سیدھے جانب کی مقدار صفر ہوتی ہے اس لیے $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۰}$ ۔ پس

$$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۲}}} - (\text{۲ن}+\text{۱})\,\text{لا}\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} - \text{ن}^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = \text{۰}$$

اور یہی ثابت کرنا مقصود تھا۔

اگر مندرجۂ بالا مساوات میں لا کو صفر لکھیں تو

$$\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}+۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+۲}}\right)_{۰} = \text{ن}^{۲}\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\right)_{۰}$$

جس میں $\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\right)_{۰}$ سے مراد $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$ کی قیمت ہے جبکہ لا صفر ہو جاتا ہے۔

چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (۱-\text{لا}^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ اور $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = -\frac{۱}{۲}(۱-\text{لا}^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}(-۲\,\text{لا})$

$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{۰} = ۱ \quad \text{اور} \quad \left(\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\right)_{۰} = ۰$$

جو رابطہ ثابت کیا گیا ہے اس میں باری باری سے ن = ۱، ۲، ۳ ... وغیرہ لکھنے سے

$$\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} = ۱^{۲}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱^{۲}$$

$$\frac{\text{فر}^{۴}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} = ۰ \text{،} \quad \frac{\text{فر}^{۵}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۵}} = ۳^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} = ۳^{۲}\,۱^{۲} \text{،} \quad \frac{\text{فر}^{۶}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۶}} = ۰ \quad \text{وغیرہ}$$

یعنے ن جب طاق صحیح عدد ہوتا ہے تو

$$\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}+۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+۲}}\right) = ۱^{۲} \times ۳^{۲} \times ۵^{۲} \times \cdots\cdots \times \text{ن}^{۲}$$

اور ن جب جفت صحیح عدد ہوتا ہے تو $\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\right) = ۰$

# مثالیں

(۱) اگر ما = لا جب لا تو $\frac{\text{فر}^{۵}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۵}}$ کی قیمت دریافت کرو اور بتاؤ کہ

$$\frac{\text{فر}^{۵}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۵}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۴\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

(۲) ما = لا لوک لا ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = (-۱)^{\text{ن}} \frac{۱\times۲\times\cdots\times(\text{ن}-۲)}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}$

(۳) ما = لوک $\sqrt{\frac{۱+\text{لا}\sqrt{۲}+\text{لا}^۲}{۱-\text{لا}\sqrt{۲}+\text{لا}^۲}} + \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}\sqrt{۲}}{۱-\text{لا}^۲}$

بتاؤ کہ $\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = -\frac{۸\sqrt{۲}\,\text{لا}^۳}{(۱+\text{لا}^۴)^۲}$

(۴) ما = $\text{و}^{\text{لا}}$ جب لا ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب}(\text{لا}+\text{ن فہ})}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{فہ}}$

جس میں فہ = $\text{مس}^{-۱}\,۱$

(۵) ما = $\text{و}^{\text{ا جب}^{-۱}\text{لا}}$ تو $(۱-\text{لا}^۲)\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ا}^۲\,\text{ما}$

(۶) ما = جب(جب لا) تو $\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{مس لا} + \text{ما جم}^۲\text{لا} = ۰$

(۷) اگر ما = $\frac{۱}{\text{ا}^۲+\text{لا}^۲}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$

$= (-۱)^{\text{ن}}\frac{\underline{\text{ن}}\;\text{جب}^{\text{ن}+۱}\text{فہ}\;\text{جب}(\text{ن}+۱)\,\text{فہ}}{\text{ا}^{\text{ن}+۲}}$

جس میں مس فہ = $\frac{\text{ا}}{\text{لا}}$

[اشارہ ۔ یہ نتیجہ ۶ کی مدد سے فوراً مستنبط ہوتا ہے اس لیے کہ

$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\left(\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right) = \frac{-\text{ا}}{\text{ا}^۲+\text{لا}^۲}$ ]

(۸) اس طرح ثابت کرو کہ

اگر ما = $\frac{\text{لا}}{\text{ا}^۲+\text{لا}^۲}$ تو $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = (-۱)^{\text{ن}}\frac{\underline{\text{ن}}\;\text{جب}^{\text{ن}+۱}\text{فہ}\;\text{جم}(\text{ن}+۱)\,\text{فہ}}{\text{ا}^{\text{ن}+۱}}$

(۹) اگر ی = لا م تو بتاؤ کہ $\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\text{ی}}{\text{فلا}^{\text{ن}}} = \text{لا}\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\text{م}}{\text{فلا}^{\text{ن}}} + \text{ن}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-۱}\text{م}}{\text{فلا}^{\text{ن}-۱}}$

(۱۰) اگر ی = $(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^{۲}$ تو $(۱-\text{لا}^{۲})\frac{\text{ف}^{۲}\text{ی}}{\text{فلا}^{۲}} - \text{لا}\frac{\text{فی}}{\text{فلا}} = ۲$

اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ

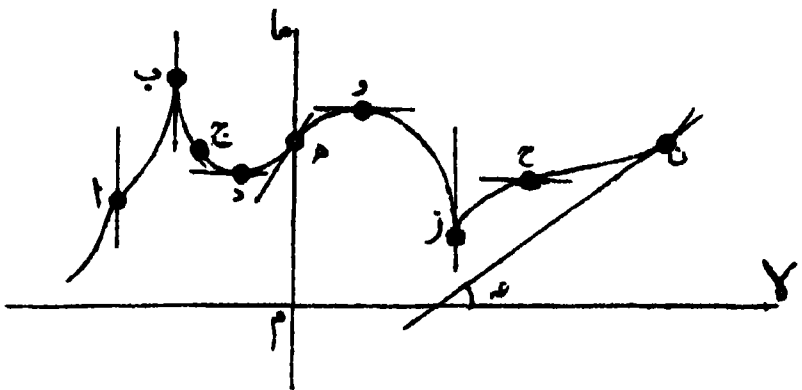
$$(۱-\text{لا}^{۲})\frac{\text{ف}^{\text{ن}+۲}\text{ی}}{\text{فلا}^{\text{ن}+۲}} - (۲\text{ن}+۱)\frac{\text{ف}^{\text{ن}+۱}\text{ی}}{\text{فلا}^{\text{ن}+۱}} - \text{ن}^{۲}\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\text{ی}}{\text{فلا}^{\text{ن}}} = ۰$$

اور $\left(\frac{\text{ف}^{\text{ن}+۲}\text{ی}}{\text{فلا}^{\text{ن}+۲}}\right) = \text{ن}^{۲}\left(\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\text{ی}}{\text{فلا}^{\text{ن}}}\right)$

[اشارہ - دیکھو ۱۲]

# چھٹا باب
## تفرقی سر (یا مشتق) کے استعمال سے متعلق چند ہندسی و دیگر مثالیں

**ع۱ـ منحنی کی سمت** ـ اگر کسی منحنی کی مساوات ما = ف (لا) ہے تو قبل ازیں بتایا گیا ہے کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = فَ (لا) = منحنی کے نقطہ (لا، ما) پر کے خطِ مماس کا ڈھلان ہے ۔ دیکھو شکل ع۱۲ـ

شکل ع۱۲ـ

اگر خطِ مماس محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مس عہ
اور منحنی کے کسی نقطہ پر اس کی سمت سے مُراد منحنی کے اس نقطہ پر کے خطِ مماس کی سمت ہے
یعنے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مس عہ = منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما) پر اس منحنی کا ڈھلان
د، و، ح جیسے نقطوں پر جہاں منحنی کی سمت محور لا کے متوازی ہے اور خطِ مماس اُفقی،

زاویہ عہ = ۰ پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۰

ا، ب، ز جیسے نقطوں پر جہاں منحنی کی سمت محور لا کے علی القوائم ہے اور خطِ مماس انتصابی،

زاویہ عہ = ۹۰° پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت نامتناہی ہو جاتی ہے۔

**توضیحی مثالیں** (۱) منحنی ما = $\frac{\text{لا}^3}{3}$ - لا$^2$ + ۲ کو مرتسم کرو اور بتاؤ کہ

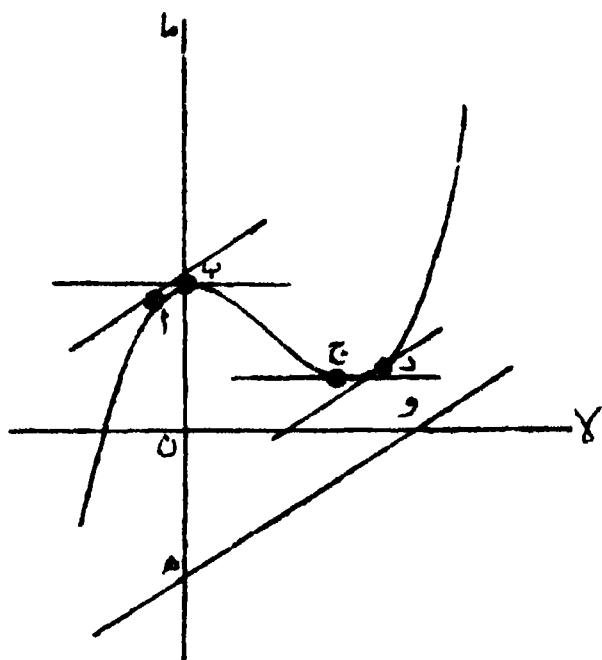
(ا) عہ کی قیمت ۱۳۵° ہے جبکہ لا = ۱

(ب) منحنی کے نقطوں (لا = ۰، ما = ۲) اور (لا = ۲، ما = $\frac{2}{3}$) پر خطِ مماس اُفقی ہے۔

(ج) منحنی کا ڈھلان اکائی ہے جہاں لا = ۱ ± $\sqrt{2}$

(د) منحنی کی سمت خطِ مستقیم ۲ لا - ۳ ما = ۸ کے متوازی ہے جہاں

لا = ۱ ± $\sqrt{\frac{5}{3}}$

**حل**۔ شکل ۱۳ میں دیے ہوئے منحنی اور خطِ مستقیم کی ترسیمیں کھینچی گئی ہیں۔

ما = $\frac{\text{لا}^3}{3}$ - لا$^2$ + ۲ کو تفرق کرنے سے

فرما/فرلا = لا² - ۲ لا = مس عہ

شکل ۱۳

(و) جہاں لا = ۱ وہاں مس عہ = ۱-۲ = -۱

لہٰذا عہ = °۱۳۵

(ب) فرما/فرلا = مس عہ = ۰ جبکہ عہ = ۰

پس لا² - ۲ لا = ۰ یعنے لا (لا-۲) = ۰

پس لا = ۰ یا لا - ۲ = ۰ یعنے لا = ۲

لا کی جب یہ قیمتیں منحنی کی مساوات (ما = لا³/۳ - لا² + ۲) میں تعویض کی جاتی ہیں تو ما کی قیمت = ۲ حاصل ہوتی ہے جبکہ لا = ۰ اور ما = ۲/۳ جبکہ لا = ۲ لہٰذا خطِ مماس منحنی کے نقطوں ب (یعنے ۰، ۲) اور ج (یعنے ۲، ۲/۳) پر اُفقی ہوتا ہے۔

(ج) جبکہ عہ = ۴۵° مس عہ = ۱ ∴ لا$^2$ - ۲لا = ۱ اس مساوات کو حل کرنے سے لا کی قیمت ۱ ± √۲ حاصل ہوتی ہے۔ پس اس طرح ان نقطوں کی تعیین ہو جاتی ہے جہاں منحنی کا ڈھلان اکائی ہے۔

(د) چونکہ دیے ہوئے خط کی مساوات ۲لا - ۳ما = ۶ لہٰذا ۳ما = ۲لا - ۸
یعنے ما = $\frac{۲}{۳}$ لا - ۲ پس خطِ مستقیم کا ڈھلان $\frac{۲}{۳}$ ہے۔ منحنی کا یہ ڈھلان ہونے کے لیے مس عہ = $\frac{۲}{۳}$ یعنے لا$^2$ - ۲لا = $\frac{۲}{۳}$ اس مساوات کو حل کرنے سے لا کی قیمت ۱ ± $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ برآمد ہوتی ہے۔

پس منحنی کی سمت دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی ان نقطوں پر ہوتی ہے جہاں لا کی قیمت ۱ + $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ یعنے ۲٫۲۹ یا ۱ - $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ یعنے ۰٫۲۹ ہوتی ہے۔
شکل میں یہ نقطے ج اور د بتائے گئے ہیں۔

چونکہ کسی نقطہ پر منحنی کی سمت وہی ہوتی ہے جو اس نقطہ پر کے خطِ مماس کی سمت ہوتی ہے۔ دو منحنیوں کا درمیانی زاویہ ان کے مشترک نقطہ پر ان کے اس نقطہ پر کے مماسی خطوں کا درمیانی زاویہ ہے۔

**توضیحی مثال (۲)** ۔ مندرجۂ ذیل دائروں کی ترسیمیں کھینچو اور اُن کا زاویۂ تقاطع دریافت کرو :۔

(ا) لا$^2$ + ما$^2$ - ۴ما = ۱

(ب) لا$^2$ + ما$^2$ - ۲لا = ۹

**حل**۔ لا، ما کی ان دو ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے نقاطِ تقاطع کے محدد (لا = ۲، ما = ۳) اور (لا = -۲، ما = ۱) برآمد ہوتے ہیں دیکھو شکل ۱۴۔

فرض کرو کہ م$_1$ دائرہ (ا) کے نقطہ (لا، ما) پر کے خطِ مماس کا ڈھلان ہے۔
اور م$_2$ " (ب) . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

تب (ا) کے لیے $م_1 = \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا}{۲-ما}$

اور (ب) ..... $م_2 = \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱-لا}{ما}$

شکل ۱۴

نقطۂ تقاطع (۲، ۳) پر کے خطِ مماس کے لیے

$$م_1 = \frac{۲}{۲-۳} = -۲$$

اور $م_2 = \frac{۱-۲}{۳} = -\frac{۱}{۳}$

پس اِن مماسی خطوں کے درمیانی زاویہ طہ کے لیے

مس ط = (م۱ − م۲) / (۱ + م۱ م۲) = (−۲ + ۱/۳) / (۱ + ۲/۳)

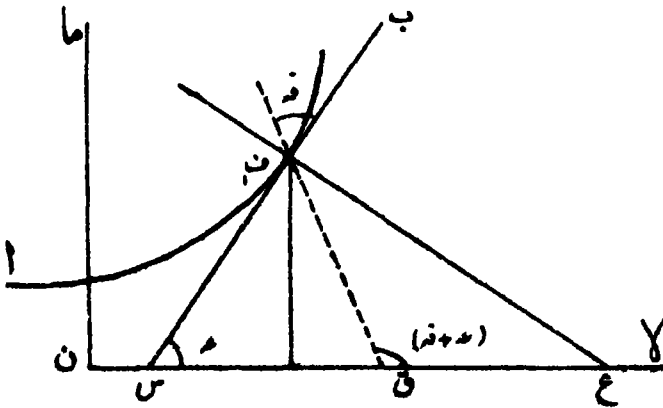
= −۱ پس ط = ۱۳۵°

اسی طرح نقطۂ تقاطع (−۲، ۱) پر کے خطوطِ مماس کا درمیانی زاویہ ۴۵° یا ۱۳۵° برآمد ہوتا ہے۔

## ۲ـ خطِ مماس اور عماد کی مساواتیں

۔ ایسے خطِ مستقیم کی مساوات جو نقطہ لا۱، ما۱ میں سے گزرتا ہے اور جس کا ڈھلان م ہے۔

(ما − ما۱) = م (لا − لا۱) ہے

اگر یہ خطِ منحنی اب کو نقطہ ف۱ پر مس کرتا ہے (یعنے ف۱ پر کا خطِ مماس ہے)

شکل ۱۵

اور ف۱ کے محدد لا۱، ما۱ ہیں تو م اس نقطہ پر منحنی کا ڈھلان ہے۔ م کی اس خاص قیمت کو م۱ سے تعبیر کرو۔ پس نقطۂ تماس ف۱ (لا۱، ما۱) پر منحنی کے خطِ مماس س ف۱ کی مساوات

ما - ما۱ = م۱ (لا - لا۱) ہے ......... (۱)

چونکہ عماد خطِ مماس کے علی القوائم ہوتا ہے اس لئے ڈھلان م۱ کا منفی متکافی ہے - اور چونکہ وہ نقطۂ تماس ف۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے اس لیے عماد ف۱ ع کی مساوات

ما - ما۱ = - ۱/م۱ (لا - لا۱) ہے ......... (۲)

خطِ مماس کا وہ حصّہ جو نقطۂ تماس اور محور ن لا کے مابین مقطوعہ ہے - (یعنی س ف۱) خطِ مماس کا طول کہلاتا ہے - اور اس کا ظل محور لا پر (یعنی س د) زیرِ مماس کا طول کہلاتا ہے - اس طرح ف۱ ع عماد کا طول ہے - اور د ع زیرِ عماد کا طول ہے۔

مثلث س ف۱ د میں مس عہ = م۱ = د ف۱ / س د

∴ س د = د ف۱ / م۱ = زیرِ مماس کا طول ..... (۳)

مثلث د ف۱ ع میں مس عہ = م۱ = د ع / د ف۱

∴ د ع = م۱ (د ف۱) = م۱ ما۱ = زیرِ عماد کا طول ..... (۴)

[واضح ہو کہ زیرِ مماس س کے سیدھے جانب واقع ہے تو مثبت سمجھا جاتا ہے اور اگر بائیں جانب ہو تو منفی - اسی طرح اگر زیرِ عماد د کے سیدھے جانب واقع ہو تو مثبت سمجھا جاتا ہے اور اگر عماد کے بائیں جانب ہو تو منفی۔]

ان کی مدد سے خطِ مماس س ف۱ اور عماد ف۱ ع کا طول فوراً معلوم کر لیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ معلوم بازووں والے قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر ہیں۔ (دیکھو شکل ۱۵)۔

جب کسی منحنی پر کے نقطہ کے زیرِ مماس و زیرِ عماد کا طول معلوم ہو جاتا ہے تو اس کا خطِ مماس اور عماد بآسانی تیار کر لیا جا سکتا ہے۔

## ۳۔ ایسے خط کی مساوات جو کسی منحنی کو دیے ہوئے زاویہ پر قطع کرے

خط ف۱ ق کی مساوات مطلوب ہے جو منحنی کو نقطہ لا۱، ما۱ پر منقطع کرے اور اس کے ساتھ زاویہ فہ بنائے۔ دیکھو شکل ۱۵۔

منحنی کی مساوات ما = ف (لا) فرض کرو۔ فَ (لا) یعنے $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}$ = م،

چونکہ خطِ مماس کا ڈھلان عہ ہے اس لیے خط زیر بحث کا ڈھلان (عہ + فہ) ہے

$$\text{پس م} = \text{مس (عہ + فہ)} = \frac{\text{مس عہ + مس فہ}}{\text{۱ - مس عہ مس فہ}}$$

$$= \frac{\text{م}_{۱} + \text{مس فہ}}{\text{۱ - م}_{۱}\,\text{مس فہ}}$$

لہذا خط مذکور کی مساوات

$$\text{ما - ما}_{۱} = \frac{\text{م}_{۱} + \text{مس فہ}}{\text{۱ - م}_{۱}\,\text{مس فہ}}\,(\text{لا - لا}_{۱})$$

# مثالیں

(۱) مصرحۂ بالا تعریف کے بموجب بتاؤ کہ خطِ مماس کا طول $\frac{\text{ما}_{۱}}{\text{م}_{۱}}\sqrt{۱ + (\text{م}_{۱})^{۲}}$ ہے۔

(۲) ............... عماد کا طول $\text{ما}_{۱}\sqrt{۱ + (\text{م}_{۱})^{۲}}$ ہے۔

(۳) منحنی ما = ۳ $\text{لا}^{۲}$ + ۴ کے نقطہ (۱، ۷) پر ثابت کرو کہ خطِ مماس کی مساوات ما - ۶ لا - ۱ = ۰ ہے اور عماد کی مساوات لا + ۶ ما - ۴۳ = ۰ ہے۔

(۴) بتاؤ کہ منحنی $\text{ما}^{۲}$ - ۴ لا = ۰ کو نقطہ ۹، ۶ پر ۴۵° زاویہ پر قطع کرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ۲لا - ما - ۱۲ = ۰ ہے۔

(۵) خط ناقص $\frac{\text{لا}^{۲}}{۹} + \frac{\text{ما}^{۲}}{۴}$ = ۱ کے پہلے ربعی حصّہ میں نقطہ لا = ۱ پر زیرِ مماس کا طول ۳ اور زیرِ عماد کا طول $\frac{۹}{۴}$ ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ص}^{۲}$ کے نقطہ لا، ما پر خطِ مماس کی

مساوات لا لا۱ + ما ما۱ = ص۲ ہے اور عماد کی مساوات لا۱ ما − ما۱ لا = ۰

(۷) خطِ زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ لاَ، ماَ پر خطِ مماس کی مساوات $\frac{لا\ لاَ}{ا^2} - \frac{ما\ ماَ}{ب^2} = ۱$ ہے اور عماد کی مساوات

$$\frac{لا\ ما_۱}{ا^2} + \frac{ما_۱\ لا}{ب^2} = لا_۱\ ما_۱ \left(\frac{۱}{ا^2} + \frac{۱}{ب^2}\right)$$ ہے۔

(۸) بتاؤ کہ خطِ مکافی کا ما۲ = ۲ ا لا کے زیرِ عماد کا طول ا ہے اور اس لیے خطِ مذکور کے ہر نقطہ کے لیے مستقل ہے۔ نیز یہ بھی بتاؤ کہ اس کا زیرِ مماس راس پر اس کی تنصیف کرتا ہے۔

(۹) منحنی لا ما = ا۲ کے خطوطِ مماس اور محددوں کے محوروں کے مابین جو مثلث تیار ہوتا ہے اس کا رقبہ مستقل ہے اور = ۲ ا۲

(۱۰) بتاؤ کہ ما = و^لا کے زیرِ مماس کا طول = ۱

(۱۱) زنجیرہ $ما = \frac{ا}{۲}\left(و^{\frac{لا}{ا}} + و^{-\frac{لا}{ا}}\right)$ کے کسی بھی نقطہ پر کے عماد کا طول متغیّر اور = $\frac{ما^2}{ا}$ ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ (ا) ورتدویر (hypocycloid) $\left\{\begin{matrix} لا = ا\ جم^3 طہ \\ ما = ا\ جب^3 طہ \end{matrix}\right\}$ کے ایسے نقطہ پر جہاں طہ = طہ. خطِ مماس کی مساوات

ما − ا جب۳ طہ. = − مس طہ. (لا − جم۳ طہ.) ہے

اور عماد کی مساوات ما − ا جب۳ طہ = مم طہ. (لا − جم۳ طہ) ہے

اور (ب) اس خطِ مماس کے قطع کا جو لا و ما کے محوروں سے منقطع ہے طول ا ہے۔

(۱۳) منحنی لوک (لا۲ + ما۲) = ۲ مس−۱ $\frac{ما}{لا}$ کے ساتھ خطِ مستقیم ما = م لا جو زاویہ بناتا ہے مستقل اور = $\frac{π}{۴}$ ہے۔

(۱۴) لبلابی سسائیڈ (Cissoid)

$$\text{ما}^{2} = \frac{\text{لا}^{3}}{2\text{ا} - \text{لا}}$$

کی ترسیم کھینچو۔ اور بتاؤ کہ (ا) اس کے نقطہ (ا، ا) پر کے خطِ مماس کی مساوات ما = ۲ لا - ا ہے اور عماد کی مساوات ۲ ما + لا = ۳ ا ہے۔
اور (ب) اس کے زیر مماس کا طول ا/۲ اور زیر عماد کا طول ۲ ا ہے۔
نیز (ج) اس کے خطِ مماس کا طول ا/۲ √۵ ہے اور عماد کا طول ا √۵ ہے۔

(۱۵) دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۸ ا لا اور لبلابی (Cissoid) $\text{ما}^{2} = \frac{\text{لا}^{3}}{2\text{ا} - \text{لا}}$
(ا) مبداء پر باہم دیگر علی القوائم ہیں۔
(ب) دوسرے دو نقطوں پر ایک دوسرے کو ۴۵° زاویہ پر منقطع کرتے ہیں۔

## ۷ واحد متغیر کے تفاعلوں کی اعظم و اقل قیمتوں پر تمہیدی بحث

**تمہیدی بحث**۔ خالص اور اطلاقی ریاضیات جن میں کے کثیر التعداد سوالوں میں ایسے تغیر پذیر مقادیر سے سابقہ پڑتا ہے جو ان سے عین پہلے اور عین بعد کو آنے والے مقادیر سے زائد (یا کمتر) قیمت کے ہوتے ہیں۔ یہاں ہم مسلسل تفاعلوں کی ان اعظم اور اقل قیمتوں کی تعیین کے مسائل پر بحث کرینگے۔

**تعریفات**۔ (۱) اگر ف (لا) کا بڑھنا ختم ہو جاتا ہے اور گھٹنا شروع ہوتا ہے جبکہ لا، لا۱ میں سے گزرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا = لا۱ پر ف (لا) کا ایک اعظم ہے۔ اور اس کی قیمت ف (لا۱) ہے۔

(۲) اگر ف (لا) کا گھٹنا ختم ہو جاتا ہے اور بڑھنا شروع ہوتا ہے جیسے کہ لا، لا۱ میں سے گزرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا = لا۱ پر ف (لا) کا ایک اقل ہے۔ اور اس کی قیمت ف (لا۱) ہے۔

[یہاں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ کسی تفاعل کی ایک اعظم (یا ایک اقل) قیمت لازماً سب سے بڑی (یا سب سے چھوٹی) قیمت ہوتی ہے۔ وہ صرف ایک معیّنہ وقفہ کے اندر کی سب سے

بڑی (یا سب سے چھوٹی) قیمت ہے]۔

**اعظم کے لیے شرایط۔** کسی تفاعل کا لا = لا، پر بڑھنا ختم ہوجاتا ہے اور گھٹنا شروع ہوتا ہے (یا بالفاظِ دیگر اس تفاعل کا لا = لا، پر ایک اعظم ہوتا ہے) اگر مشتق فَ (لا) یعنے ف (لا) کا تفرقی سر لا، سے عین پہلے کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہے۔ اور اس سے عین بعد کی تمام قیمتوں کے لیے منفی ہے۔

**اقل کے لیے شرائط۔** کسی تفاعل کا لا = لا، پر گھٹنا ختم ہوجاتا ہے اور بڑھنا شروع ہوتا ہے (یا بالفاظِ دیگر اس تفاعل کا لا = لا، پر ایک اقل ہوتا ہے) اگر مشتق ف (لا) یعنے ف (لا) کا تفرقی سر لا، سے عین پہلے کی تمام قیمتوں کے لیے منفی ہے۔ اور اس سے عین بعد کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہے۔

واضح ہو کہ مصرحۂ بالا شرائط واقعات ذیل کے نتائج ہیں جن کو ہم یہاں ثبوت کا محتاج نہیں سمجھتے:۔

(۱) لا کے بڑھنے سے ف (لا) بڑھتا ہے اگر فَ (لا) مثبت ہے۔

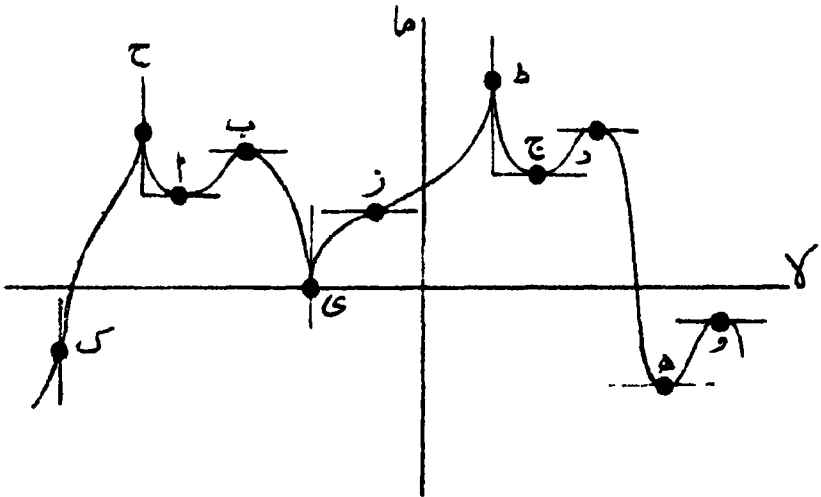
(۲) لا کے بڑھنے سے ف (لا) گھٹتا ہے اگر فَ (لا) منفی ہے۔

**تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتوں کے پاس تفرقی سر یا مشتق کی کیفیت۔** کسی تفاعل کے مشتق پر غور کرکے اس تفاعل کی اعظم و اقل قیمتوں کے مقام دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ شکل ۱۶ کے لاحظہ سے مندرجۂ ذیل امور کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

(۱) مسلسل مشتق والے تفاعل کی اعظم و اقل قیمتیں صرف ایسے نقطوں پر پائی جاتی ہیں جہاں یہ مشتق (یعنے تفاعل کے منحنی کا ڈھلان) صفر ہوتا ہے۔ لاحظہ ہو نقطے ا، ب، ج، د، ھ، و۔

(۲) اعظم قیمتیں صرف اس صورت میں رونما ہوتی ہیں جبکہ لا کے بڑھنے سے تفاعل کے مشتق کی علامت بدلتی ہے اور وہ بالترتیب +، ۰، − ہوتا ہے۔ جیسے ب، د اور و پر۔

(۳) اقل قیمتیں صرف ایسے نقطوں یا موقعوں پر پائی جاتی ہیں جہاں لا کے بڑھنے سے مشتق کی علامت تبدیل ہوتی ہے اور وہ بالترتیب -، ۰، + ہوتا ہے۔ جیسے ا، ج، ہ پر۔

(۴) مشتق ایسے نقطوں پر بھی صفر ہوتا ہے جہاں نہ تو اعظم قیمتیں ہوتی ہیں اور نہ اقل قیمتیں۔ جیسے ز پر۔ ان نقطوں پر مشتق کی علامت نہیں بدلتی۔

شکل ۱۶

اطلاقی ریاضیات میں کسی تفاعل کے اعظم و اقل میں عموماً مشتق کی تبدیلی علامت پر غور کیے بغیر امتیاز کیا جاسکتا ہے۔ سوال کی نوعیت ہی سے عام طور پر اس امر کا بآسانی تصفیہ ہوجاتا ہے۔

## ف (لا) کے اعظم و اقل دریافت کرنے کا طریقۂ عمل۔

(۱) ف (لا) کو بلحاظ لا تفرق کرکے اس کا مشتق فَ (لا) معلوم کیا جائے۔

(۲) فَ (لا) کو صفر کے مساوی لکھ کر اس مساوات کو حل کرکے اس کی حقیقی اصلیں $لا_۱$، $لا_۲$، $لا_۳$..... دریافت کی جائیں۔

(۳) اگر ممکن ہو تو مطالعہ ہی سے معلوم کیا جائے آیا $لا_۱$، $لا_۲$، $لا_۳$..... سے اعظم یا اقل قیمتیں مل جاتی ہیں۔ ورنہ

(ا) فَ (لا) میں لا کی بجائے ($لا_۱$ + ھ) لکھا جائے جس میں ھ کافی چھوٹی مقدار ہے۔

تب $لا_۱$ پر ایک اعظم ہوگا اگر { فَ($لا_۱$ + ھ) مثبت ہے جبکہ ھ منفی ہے۔ فَ ($لا_۱$ + ھ) منفی ہے جبکہ ھ مثبت ہے۔

یا ایک اقل ہوگا { فَ ($لا_۱$ + ھ) منفی ہے جبکہ ھ منفی ہے۔ فَ ($لا_۱$ + ھ) مثبت ہے جبکہ ھ مثبت ہے۔

**توضیحی مثال** (۱) ف(لا) = $لا^۵ + \frac{۵}{۲}لا^۴ - ۵لا^۳ - ۲۰لا^۲ - ۲۰لا + ۱۵$

کا اس کی اعظم و اقل قیمتوں کے لحاظ سے امتحان کرو۔

**حل** ف (لا) کو تفرق کرنے سے

$$فَ(لا) = ۵لا^۴ + ۱۰لا^۳ - ۱۵لا^۲ - ۴۰لا - ۲۰$$
$$= ۵(لا^۴ + ۲لا^۳ - ۳لا^۲ - ۸لا - ۴)$$
$$= ۵\{(لا^۴ + ۲لا^۳ + لا^۲) - (۴لا^۲ + ۸لا + ۴)\}$$
$$= ۵\{لا^۲(لا^۲ + ۲لا + ۱) - ۴(لا^۲ + ۲لا + ۱)\}$$
$$= ۵(لا^۲ - ۴)(لا + ۱)^۲ = ۵(لا + ۲)(لا - ۲)(لا + ۱)^۲$$

اس مشتق کو صفر کے مساوی لکھ کر مساوات کو حل کرنے سے

لا = −۲، +۲، −۱، −۱ حاصل ہوتا ہے۔

(ا) لا = −۲ تو فَ (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (−۲ + ھ) لکھنے سے، (جس میں ھ کافی چھوٹی مقدار ہے) فَ (−۲ + ھ) = ۵ ھ (−۴ + ھ) $(-۱ + ھ)^۲$

جب ھ منفی ہے تو فَ (−۲ + ھ) مثبت ہے۔

جب ھ مثبت ہے تو فَ $(-۲ + ھ)$ منفی ہے۔

پس ف (لا) نقطہ لا = -۲ پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے اور وہ +۲۳ ہے۔

(ب) لا = +۲ تو فَ (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (۲ + ھ) لکھنے سے

$$فَ(۲ + ھ) = ۵ (۴ + ھ)(ھ)(۳ + ھ)^{۲}$$

جب ھ منفی ہے تو فَ (۲ + ھ) منفی ہے۔

جب ھ مثبت ہے تو فَ (۲ + ھ) مثبت ہے۔

پس ف (لا) نقطہ لا = +۲ پر ایک اقل قیمت رکھتا ہے اور وہ -۳، ہے

(ج) لا = -۱ تو فَ (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (-۱ + ھ) لکھنے سے

$$فَ(-۱ + ھ) = ۵ (۱ + ھ)(-۳ + ھ) ھ^{۲}$$

جب ھ منفی ہے تو فَ (-۱ + ھ) منفی ہے

جب ھ مثبت ہے تو فَ (-۱ + ھ) منفی ہے

یعنے اس صورت میں ھ منفی سے مثبت میں تبدیل ہونے پر فَ (-۱ + ھ) کی علامت نہیں بدلتی وہ منفی ہی رہتا ہے۔ پس نقطہ لا = -۱ پر تفاعل کا نہ کوئی اعظم ہے اور نہ کوئی اقل۔

**توضیحی مثال (۲)** ف (لا) = $قو^{لا} \sqrt{لا}$ کا اس کی اعظم اور اقل قیمتوں کے لحاظ سے امتحان کرو۔

**حل۔** ف (لا) کو تفرق کرنے سے $فَ(لا) = \frac{قو^{لا}(۱ - ۲لا)}{۲ لا^{\frac{۱}{۲}}}$

فَ (لا) کو صفر کے مساوی لکھنے سے لا = $\frac{۱}{۲}$ حاصل ہوتا ہے۔

اب فَ (لا) کے جملہ میں بجائے لا کے $\frac{۱}{۲}$ + ھ لکھنے سے (جس میں ھ کافی چھوٹی مقدار ہے)۔

$$فَ(\frac{۱}{۲} + ھ) = \frac{قو^{-(\frac{۱}{۲} + ھ)}(-ھ)}{(\frac{۱}{۲} + ھ)^{\frac{۱}{۲}}}$$

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ فَ $(\frac{۱}{۲} + ھ)$ مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتا ہے

جبکہ ھ منفی سے مثبت میں تبدیل ہوتا ہے - پس ف (لا) کی نقطہ لا = $\frac{1}{2}$ پر ایک اعظم قیمت ہے اور وہ = (۲ و)$^{\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{\sqrt{2و}}$ ہے۔

**ف (لا) کی اعظم و اقل قیمتیں جبکہ فَ (لا) لامتناہی ہوتا ہے اور ف (لا) مسلسل تفاعل ہے۔** شکل ۱۶ کے ملاحظہ سے معلوم ہوگا کہ ح یا ط پر ف (لا) مسلسل ہے اور ایک اعظم قیمت رکھتا ہے لیکن فَ (لا) لا متناہی ہو جاتا ہے اس لیے کہ خط مماس ان نقطوں پر محور ما کے متوازی ہے - نقطہ ی پر ف (لا) مسلسل ہے اور ایک اقل قیمت رکھتا ہے لیکن یہاں بھی فَ (لا) لا متناہی ہو جاتا ہے - ایسی صورتوں میں چونکہ فَ (لا) = ∞

$$\therefore \quad \frac{1}{فَ(لا)} = ۰$$

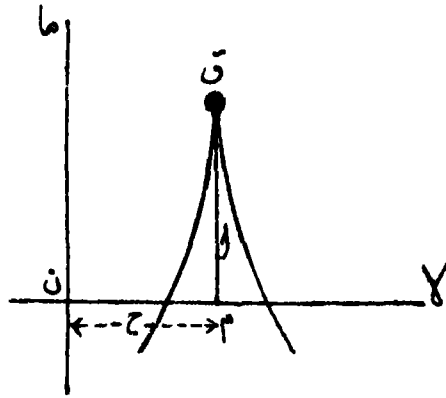
دیکھو کہ لا کی کس "فاصل" (critical) قیمت کے لیے $\frac{1}{فَ(لا)}$ = ۰ - اگر یہ قیمت لا₁ ہے تو دیکھو کہ لا کی لا₁ سے خفیف سی چھوٹی قیمت کے لیے آیا فَ (لا) مثبت ہے اور لا₁ سے خفیف سی بڑی قیمت کے لیے فَ (لا) منفی ہے - اگر ایسا ہے تو ف (لا) نقطہ لا₁ پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے - لیکن اگر پہلی صورت میں یعنے لا کی لا₁ سے خفیف سی چھوٹی قیمت کے لیے فَ (لا) منفی ہے اور دوسری صورت میں یعنے لا کی لا₁ سے خفیف سی بڑی قیمت کے لیے فَ (لا) مثبت ہے تو نقطہ لا₁ پر ف (لا) ایک اقل قیمت رکھتا ہے۔

شکل ۱٦ میں منحنی کے نقطہ ک پر بھی فَ (لا) لا متناہی ہو جاتا ہے لیکن یہاں تفاعل نہ تو ایک اعظم قیمت رکھتا ہے اور نہ ایک اقل قیمت۔

**توضیحی مثال** - تفاعل ا - ب (لا - ج)$^{\frac{2}{3}}$ کا اس کی اعظم و اقل قیمتوں کے لیے امتحان کرو۔

**حل** - تفرق کرنے سے

$$\text{فَ}(\text{لا}) = -\frac{\text{۲ ب}}{\text{۳}(\text{لا} - \text{ج})^{\frac{۱}{۳}}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{۱}}{\text{فَ}(\text{لا})} = -\frac{\text{۳}(\text{لا} - \text{ج})^{\frac{۱}{۳}}}{\text{۲ ب}}$$

شکل ۱۷

چونکہ لا = ج ایک فاصل قیمت ہے جس کے لیے $\frac{\text{۱}}{\text{فَ}(\text{لا})}$ = ۰ (اور فَ (لا) = ∞)
لیکن جس کے لیے ف (لا) لامتناہی نہیں ہے پس مصرحہ بالا قاعدہ کے لحاظ سے
اس تفاعل کا لا = ج نقطہ پر اعظم و اقل قیمتوں کے لیے امتحان ہو سکتا ہے۔
چنانچہ

جب لا < ج ، فَ (لا) = مثبت

جب لا > ج ، فَ (لا) = منفی

پس جب لا = ج = ن م (دیکھو شکل ۱۷) ، اس تفاعل کی ایک اعظم
قیمت ف (ج) = ا = ق م ہے۔

# مثالیں

(۱) ذیل کے تفاعل کا اعظم و اقل قیمت کے لیے امتحان کرو :

$۳لا^{۵} - ۵لا^{۳} + ۱۵$ جواب لا = -۱ پر اعظم قیمت = ۱۷، لا = ۱ پر اقل قیمت = ۱۳، لا = ۰ پر نہ اعظم نہ اقل۔

(۲) امتحان کرکے بتاؤ کہ تفاعل $\frac{۱}{۳}لا^{۳} - \frac{۱}{۲}لا^{۲} - ۲لا + ۲$

لا = -۱ پر اعظم قیمت = $۳\frac{۱}{۶}$ رکھتا ہے اور لا = ۲ پر اقل قیمت = $-۱\frac{۱}{۳}$

(۳) $\frac{(لا - ا)(ب - لا)}{لا^{۲}}$ نقطہ لا = $\frac{۲اب}{ا+ب}$ پر اعظم = $\frac{(ب-ا)^{۲}}{۴اب}$ ہے،

(۴) $(۲لا - ا)^{\frac{۱}{۳}}(لا - ا)^{\frac{۲}{۳}}$ نقطہ لا = $\frac{۲ا}{۳}$ پر اعظم = $\frac{ا}{۳}$ ہے،

لا = ا پر اقل = ۰ اور لا = $\frac{ا}{۲}$ پر، نہ اعظم نہ اقل۔

(۵) $\frac{(ا - لا)^{۳}}{ا - ۲لا}$ نقطہ لا = $\frac{ا}{۴}$ پر اقل = $\frac{۲۷}{۳۲}ا^{۲}$ ہے۔

## اعظم و اقل قیمتوں کے اطلاقی سوالات کے لیے عام ہدایات۔

اکثر سوالات میں مقدمات کے شرائط کے بموجب پہلے خود اس تفاعل کو تیار کرنا ہوتا ہے جس کی اعظم و اقل قیمتیں مطلوب ہیں۔ بعض اوقات اس تیاری میں بڑی دقت پیش آتی ہے۔ اور کوئی ایسا قاعدہ جو تمام صورتوں پر حاوی ہوبتایا نہیں جاسکتا۔ البتہ ذیل کی ہدایات بہت سارے سوالات کے حل میں کارآمد ہوسکتی ہیں :-

**عام ہدایات۔** (۱) پہلے وہ تفاعل تیار کرلیا جائے جس کا اعظم یا اقل مطلوب

سوال میں شامل ہے۔

(ب) اگر اس تفاعل کا جملہ ایک سے زائد متغیر پر مشتمل ہے تو سوال ہی کے شرائط سے ان متغیروں کے مابین کافی رابطے مہیا ہو سکینگے، جس کی وجہ سے تمام متغیر ایک واحد متغیر کی رقموں میں لکھے جا سکینگے۔

(ج) واحد متغیر کے احصل تفاعل پر اعظم و اقل قیمتوں کی تعیین کا قبل ازیں مصرحہ قاعدہ عائد کیا جائے۔

(د) عمل کی تنقیح کے لیے تفاعل کی ترسیم بھی کھینچ لی جائے۔

اعظم و اقل قیمتوں کی تعیین مندرجۂ ذیل اصول کی مدد سے (جو بدیہی تصور کیے جا سکتے ہیں) اکثر آسان ثابت ہو سکتی ہے۔

(ا) مسلسل تفاعل کی اعظم و اقل قیمتیں متبادلاً صورت پذیر ہونی چاہئیں۔

(ب) ک جب ایک مثبت مستقل ہوتا ہے ک ف (لا) ایک اعظم ہوتا ہے یا اقل لا کی ایسی اور صرف ایسی قیمتوں کے لیے جو ف (لا) کو اعظم یا اقل بناتی ہیں۔ [پس لا کی فاصل قیمتوں کی تعیین اور تفاعل کے اعظم و اقل کے امتحان میں مستقل جزو ضربی متروک کر دیا جا سکتا ہے]۔

اسی طرح اگر ک ایک منفی مستقل ہے تو ک ف (لا) اعظم ہے جبکہ ف (لا) اقل ہے اور ک ف (لا) اقل ہے جبکہ ف (لا) اعظم ہے۔

(ج) اگر ک ایک مستقل ہے تو لا کی جس قیمت پر ف (لا) کی قیمت اعظم یا اقل ہوتی ہے ک + ف (لا) کی قیمت بھی لا کی اسی قیمت پر اعظم یا اقل ہوتی ہے۔ [پس لا کی فاصل قیمتوں کی تعیین اور تفاعل کے امتحان میں مستقل رقم متروک کر دی جا سکتی ہے]

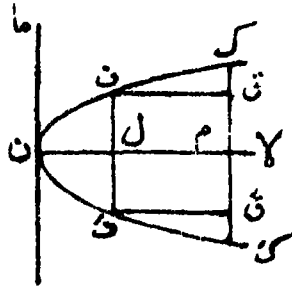
**توضیحی مثالیں۔** (۱) خط مکانی سے دیے ہوئے قطع ن ک کَ میں جو مستطیل کھینچا جا سکتا ہے اس کا رقبہ اعظم ہوتا ہے جبکہ اس کی چوڑائی محوری طول ط کا ۲/۳ حصہ ہوتی ہے۔

حل۔ ن م = ط، فرض کرو اور ن ل = لا

اور ل ف = ما

پس مستطیل کا رقبہ = ف فَ × ل م

= ۲ ما ( ط - لا)

شکل ۳۵

چونکہ ف خطِ مکانی پر ہے اس لیے ما$^{۲}$ = ۲ ا لا پس ما = $\sqrt{\text{۲ ا لا}}$

اور رقبہ = ۲ (ط - لا) ( ۲ ا لا)$^{\frac{۱}{۲}}$

$$\frac{\text{فر (رقبہ)}}{\text{فر لا}} = ۲ \left\{ (\text{ط - لا}) \frac{\text{فر (۲ ا لا)}^{\frac{۱}{۲}}}{\text{فر لا}} + (\text{۲ ا لا})^{\frac{۱}{۲}} \frac{\text{فر (ط - لا)}}{\text{فر لا}} \right.$$

$$= ۲ \left\{ (\text{ط - لا})^{\frac{۱}{۲}} (\text{۲ ا لا})^{-\frac{۱}{۲}} \text{ ۲ ا} - (\text{۲ ا لا})^{\frac{۱}{۲}} \right\}$$

جب یہ رقبہ اعظم ہوتا ہے تو $\frac{\text{فر (رقبہ)}}{\text{فر لا}} = ۰$

یعنے $\frac{\text{ا (ط - لا)}}{(\text{۲ ا لا})^{\frac{۱}{۲}}} = (\text{۲ ا لا})^{\frac{۱}{۲}}$ ∴ ( ط - لا) ا = ۲ ا لا

پس ط - لا = ۲ لا لا = $\frac{\text{ط}}{۳}$

پس ط - لا = ط - $\frac{\text{ط}}{۳}$ = $\frac{۲}{۳}$ ط

سوال کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رقبہ کے لیے جو تفاعل لا لکھا گیا ہے اس کا مشتق صفر ہوتا ہے تو اس کی اعظم قیمت ہی صورت پذیر ہوتی ہے۔

(۳) اعظم حجم کے اُسطوانہ کا نصف قطر اور بلندی دریافت کرد جو ص نصف قطر اور ب بلندی کے قائم دائری مخروط کے اندر تیار ہو سکتا ہے۔

**حل** - فرض کرو کہ صَ اور بَ مخروط کا اندرونی اُسطوانہ ہے۔ اس کا حجم ح = ٣ صَ٢ بَ جو دو متغیروں کا تفاعل ہے۔ ہم سوال کے ہندسہ کی مدد سے ایک متغیر کو دوسرے کی رقموں میں تعبیر کر سکتے ہیں۔ چنانچہ شکل ۱۹ سے واضح ہے کہ متشابہ مثلثوں کے خواص سے

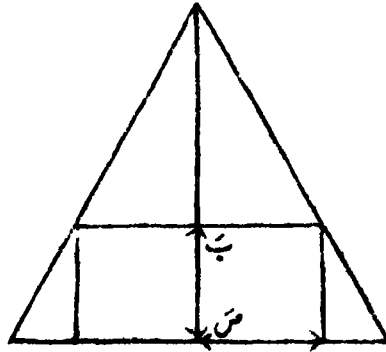
شکل ۱۹

$$\frac{ب - بَ}{صَ} = \frac{ب}{ص}$$

$$\therefore\ بَ = ب - \frac{صَ\,ب}{ص}$$

$$پس\ حجم\ ح = ٣\ صَ^{٢}\left(ب - \frac{صَ\,ب}{ص}\right)$$

اس کو تفرق کرنے سے $\frac{د ح}{د صَ} = ٣\ صَ^{٢}\left(-\frac{ب}{ص}\right) + ٢\,٣\ صَ\left(ب - \frac{صَ\,ب}{ص}\right)$

$$= \frac{٣\ ب}{ص}\left(-\ ٣\ صَ^{٢} + ٢\ صَ\ ص\right)$$

اس جملہ کو صفر کے مساوی لکھ کر صَ کے لیے حل کرنے سے صَ کی قیمت صفر یا $\frac{٢ ص}{٣}$ برآمد ہوتی ہے۔

واضح ہے کہ ص = ۰ تفاعل کی اقل قیمت سے متعلق ہے اور ص = $\frac{۲ ص}{۳}$
اس کی اعظم قیمت ہے۔
پس مطلوبہ اعظم اسطوانہ کی بلندی ب - $\frac{۲}{۳}$ ب یعنے $\frac{ب}{۳}$ ہے۔

# مثالیں

ثابت کرو کہ :-

(۱) نصف قطر ص والے کرہ میں اعظم حجم کا جو قائم دائری مخروط بن سکتا ہے اس کی بلندی $\frac{۴}{۳}$ ص ہے۔

(۲) ایک دیے ہوئے کرہ کے اندر اعظم حجم کا جو قائم دائری اسطوانہ تیار کیا جا سکتا ہے، اس کی بلندی کرہ کے نصف قطر کی $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ہے۔

(۳) نصف قطر ص والے کرہ کے گرد اقل حجم کا جو قائم دائری مخروط بنایا جا سکتا ہے اس کا ارتفاع (یعنے بلندی) = ۴ ص

(۴) $ب^۲ لا^۲ + ا^۲ ما^۲ = ا^۲ ب^۲$ خطِ ناقص کے اندر اعظم متساوی الساقین مثلث جس کا راس ناقص کے محور اقل کے سرے پر واقع ہے $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ا ب رقبہ رکھتا ہے۔

(۵) دیے ہوئے محیط کے اعظم رقبہ والے دائری قطع کا مرکز دائرہ پر کا زاویہ ۲ نیم قطریاں ہے۔

(۶) اقل مجموعی رقبہ سطح کے ایک دیے ہوئے حجم والے قائم دائری مخروط کے لیے $\frac{بلندی}{نصف قطر}$ کی نسبت ۲ $\sqrt{۲}$ ہے۔

(۷) $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے ناقص کے اندر جو اعظم مستطیل کھینچا جا سکتا ہے، اس کے ضلعوں کا طول $\sqrt{۲}$ ا اور $\sqrt{۲}$ ب ہے۔

(۸) ڈائن اگنیسی ( Witch of Agnesi ) کی مساوات

$$ما = \frac{۸ ا^۳}{لا^۲ + ۴ ا^۲}$$ ہے۔

اس کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ مستطیل جس کا قاعدہ محور لا پر ہو اور جس کے دو راس ڈائن پر ہوں اس کا اعظم رقبہ = ۴ ر۲

(۹) مستطیل شہتیر کی مضبوطی اس کی چوڑائی اور اس کی موٹائی کے مکعب کے حاصل ضرب کے لحاظ سے بدلتی ہے ۔ اعظم مضبوطی کی مستطیل شہتیر کے ابعاد دریافت کرو جو ص نصف قطر والے اسطوانہ سے تراشی جا سکتی ہے ۔

جواب ۔ چوڑائی = ص، موٹائی = ص $\sqrt{3}$

(۱۰) دائری لچھے پر سے گزرنے والی برقی رو کا مقناطیسی میدان ایسے نقطہ پر جو لچھے کے محور پر (یعنی خطِ مستقیم جو اس کے مستوی کے علی القوائم اور اس کے مرکز میں سے گزرتا ہو) مرکز سے لا فاصلہ پر واقع ہو $\frac{لا}{(ص^2 + لا^2)^{\frac{5}{2}}}$ کے متناسب ہے ۔ جس میں ص لچھے کا نصف قطر ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ میدان اعظم ہے جبکہ لا = $\frac{ص}{2}$

## ۵ ۔ تفاعل کے تفرقی سر یا مشتق کا تصور بطور شرح تبدیلی تفاعل ۔

اِس احصار کی کتاب کے ابتدائی بابوں میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ما = ف (لا)

تو $\frac{مف\ ما}{مف\ لا}$ = ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا جبکہ لا بدل کر لا + مف لا ہوتا ہے ۔

اگر ما = ھ لا + ج جس میں ھ اور ج مستقل ہیں تو $\frac{مف\ ما}{مف\ لا}$ = ھ ایک مستقل ۔ یعنے ما کی اوسط شرحِ تبدیلی بلحاظ لا خطِ مستقیم کی ڈھلان ھ کے مساوی ہے اور مستقل ہے ۔ صرف اِس صورت ہی میں ما کی تبدیلی (مف ما) جبکہ لا اپنی کسی قیمت لا سے بدل کر لا + مف لا ہو جاتا ہے، شرح تبدیلی ھ مضروب مف لا کے مساوی ہے ۔

**آنی شرح تبدیلی** ۔ جیسا کہ قبل ازیں بیان ہو چکا ہے، اگر

لا سے لا + مف لا کا وقفہ گھٹتا ہے اور مف لا ← ۰ تب ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا اس وقفہ کے اندر انتہائی حالت میں ما کی آنی شرح تبدیلی بلحاظ لا ہو جاتی ہے۔ پس، مسلمہ طریق کتابت میں

$\frac{فرما}{فرلا}$ = ما کی آنی شرح تبدیلی بلحاظ لا، لا کی ایک معین قیمت کے لیے

مثلاً اگر ما = لا$^{2}$ تو $\frac{مف ما}{مف لا} = \frac{(لا + مف لا)^{2} - مف لا}{مف لا}$ = ۲لا + مف لا

اگر لا = ۵ اور مف لا = ۰٫۵ تو $\frac{مف ما}{مف لا}$ = ۱۰٫۵ اور ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا جبکہ لا کی قیمت ۵ سے بڑھ کر ۵٫۵ ہوتی ہے تو ۱۰٫۵ ہے۔ اور چونکہ

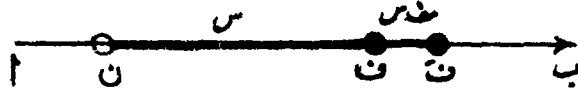
$\frac{فرما}{فرلا}$ = ۲لا اس لیے ما کی آنی شرح بلحاظ لا = ۲ × ۵ یعنے ۱۰ اکائیاں فی اکائی تبدیلی لا۔ اکثر اوقات لفظ "آنی" متروک کر دیا جاتا ہے۔

تفاعل لا کی ترسیم کھینچ کر آسانی بتایا جا سکتا ہے کہ ما کی ترسیم کے کسی نقطہ ف (محدد لا، ما) پر اس کی آنی شرح تبدیلی نقطہ ف پر کے خطِ مماس کی مستقل شرح تبدیلی ہے۔

جبکہ لا = لا تب ما یعنے فَ (لا) کی آنی شرح تبدیلی = فَ (لا)۔ اب اگر لا بدل کر لا + مف لا ہوتا ہے ما کی صحیح (exact) تبدیلی فَ (لا) مف لا کے مساوی نہیں ہوتی ہے الا اس صورت کے جبکہ فَ (لا) مستقل ہے، جیسا کہ خطِ مستقیم کی مساوات میں مشاہدہ ہوا۔ بریں ہم ہم آگے چل کر دیکھینگے کہ یہ حاصل ضرب مف ما کے تقریباً مساوی ہے جبکہ مف لا کافی چھوٹا ہوتا ہے۔

## مستقیم خطی حرکت میں رفتار۔

تغیر تبوع جب وقت ہوتا ہے تو تفاعل کا تفرقی سر یا مشتق شرح بلحاظ وقت یا زمانی شرح کہلاتا ہے۔ اِس کی سادہ ترین مثال مستقیم خطی حرکت میں ملتی ہے۔ فرض کرو

شکل ع۲۰ میں ایک نقطہ ف خطِ مستقیم ا ب پر حرکت کر رہا ہے۔ اس کا

فاصلہ کسی ثابت نقطہ ن سے اس کے کسی مقام تک س ہے اور اس کا متناظر وقت و ہے۔ و کی ہر قیمت کے ساتھ ف کا بھی ایک مقام معین ہے۔ پس فاصلہ س وقت و کا ایک تفاعل ہے۔ یعنے

س = ف (و)

اب اگر و میں اضافہ مف وَ ہوتا ہے تو س میں اضافہ مف س صورت پذیر ہوتا ہے، جو وقت مف و میں طے شدہ فاصلہ ہے۔ اور

$\frac{\text{مف س}}{\text{مف و}}$ = نقطہ ف کی اوسط رفتار جبکہ وہ ف سے فَ تک وقفۂ وقت مف و میں حرکت کرتا ہے۔ اگر ف کی حرکت یکساں ہے یعنے رفتار مستقل ہے تو وقت کے ہر وقفہ کے لیے نسبت $\frac{\text{مف س}}{\text{مف و}}$ کی ایک ہی قیمت ہوگی اور وہ کسی آن کی بھی رفتار ہوگی

حرکت کی عام قسم کے لیے خواہ یکساں ہو یا غیر یکساں کسی آن کی رفتار (یعنے فاصلہ کی زمانی شرح) کی یوں تعریف کی جاسکتی ہے کہ وہ اوسط رفتار کی انتہا ہے جبکہ مف و بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے۔ یعنے

$$ر = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}$$

**مربوط یا متعلق (Related) شرحیں** ۔ اکثر سوالوں میں کئی متغیروں سے سابقہ پڑتا ہے جن میں سے ہر ایک وقت کا تفاعل ہوتا ہے۔

سوال کے شرائط کے لحاظ سے پہلے ان متغیروں کے مابین رابطے قائم کیے جاتے ہیں اور بعد ازاں عملِ تفرق کے ذریعے ان کی تبدیلی کی بلحاظ وقت "شرحوں" میں رابطے دریافت کیے جاتے ہیں۔

شرح کے سوالات حل کرنے میں مندرجۂ ذیل ہدایات مفید ہیں :-

(۱) سوال کی توضیح کے لیے ایک شکل کھینچ لی جائے۔ وقت کے لحاظ سے جو مقادیر بدلتے ہیں ان کو لا، ما، ی وغیرہ سے تعبیر کرو۔

(۲) جن متغیروں سے بحث ہو اُن کے مابین ایسے ضابطے حاصل کرو جو کسی آن کے لیے بھی صحیح ہوں۔

(۳) وقت کے لحاظ سے تفرق کرو۔

(۴) دیے ہوئے مقادیر اور مطلوبہ مقادیر کی ایک فہرست تیار کرو۔

(۵) تفرق کے عمل سے جو نتیجہ دریافت ہوا ہو اس کے اندر معلوم مقادیر کو تعویض کرو۔ اور غیر معلوم مقادیر کی مساواتوں کو حل کرو۔

**توضیحی مثالیں** (۱) ل سمر طول کے سادہ رقاص کے ایک کامل اہتزاز کے وقتِ دَوران کا ضابطہ کسی مقام پر $\text{و} = ۰٫۲۰۷ \sqrt{\text{ل}}$ ثانیہ ہے رقاص کے طول کے لحاظ سے وقتِ دَوران کی تبدیلی کی شرح دریافت کرو جبکہ ل = ۲۵ سمر۔ اور اس کے ذریعے بتاؤ کہ وقتِ دَوران میں کیا تقریبی تبدّل واقع ہوگا جبکہ ل ۲۵ سمر سے بڑھ کر ۲۵٫۵ سمر ہو جائیگا۔

حل - چونکہ $\text{و} = ۰٫۲۰۷ (\text{ل})^{\frac{1}{2}}$ ∴ $\frac{\text{فرو}}{\text{فرل}} = \frac{۰٫۲۰۷}{۲} (\text{ل})^{-\frac{1}{2}}$

ل جب ۲۵ سمر ہے تو $\frac{\text{فرو}}{\text{فرل}} = \frac{۰٫۲۰۷}{۲ \times ۵} = ۰٫۰۲۰۷$ ثانیہ فی سمر

اور ل جب ۲۵ سمر سے بڑھ کر ۲۵٫۵ سمر ہوتا ہے تو و میں تقریبی تبدّل

$۰٫۰۲۰۷ \times ۰٫۵ = ۰٫۰۱۰۳۵$ ثانیہ ہوتا ہے۔

(۲) ایک ذرہ خطِ مکافی $\text{ما}^{2} = ۹\,\text{لا}$ میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ لا کی قیمت جب ۴ ہے تو فصلہ بشرح ۶ فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے۔ بتاؤ اُس وقت معیّن کے بڑھنے کی کیا شرح ہے۔

حل۔ چونکہ $\text{ما}^{2} = ۹\,\text{لا}$ ∴ وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$۲\,\text{ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} = ۹\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}$$

یعنی

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} = \frac{۹}{۲\,\text{ما}}\;\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

لیکن از روئے مساوات خطِ مکافی $\text{ما} = \pm ۳\sqrt{\text{لا}}$

پس

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر د}} = \pm \frac{۹}{۲ \times ۳\sqrt{\text{لا}}}\;\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

$$= \pm \frac{۳}{۲\sqrt{\text{لا}}}\;\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

یعنی مکافی کے کسی نقطہ پر بھی معیّن کی تبدیلی کی شرح $\pm \frac{۳}{۲\sqrt{\text{لا}}}$ شرح تبدیلی فصلہ ہے لا کی قیمت جب ۴ ہے تو دیا گیا ہے کہ $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} = ۶$ فٹ فی ثانیہ

اس لیے درانحالیکہ لا = ۴، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} = \pm \frac{۳}{۲ \times ۲} \times ۶$ فٹ فی ثانیہ

$= \pm \frac{۹}{۲} = \pm ۴\frac{۱}{۲}$ فٹ فی ثانیہ

واضح ہو کہ لا کی ہر ایک قیمت پر ما کی دو مساوی قیمتیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی پس لا = ۴ کی صورت میں خطِ مکافی کا ایک معیّن بشرح $۴\frac{۱}{۲}$ فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے اور اس کے مقابل کا معیّن بشرح $۴\frac{۱}{۲}$ فٹ فی ثانیہ گھٹتا ہے۔

## مثالیں

(۱) ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعے ایک ایک فٹ لمبے ہیں۔ اگر وہ

بشرح $\frac{1}{2}$ انچ فی منٹ بڑھتے جائیں تو بتاؤ کہ مثلث کے رقبے کے بڑھنے کی شرح ۲؍۱ $\sqrt{3}$ مربع انچ فی منٹ ہے۔

(۲) گردشی مجسم ناقص نما شکل کے غبارہ کا سب سے بڑا محور اس کے ایک چھوٹے محور کا دو چند ہے اور دوسرے چھوٹے محور کا سہ چند۔ اگر غبارہ میں گیس بشرح ۱۲۰ مکعب فٹ فی منٹ بھری جا رہی ہے جبکہ وہ ۱۲ فٹ لمبا ہے اور یکساں پھولتا جا رہا ہے تو ثابت کرو کہ اس کے طول کے بڑھنے کی شرح $\frac{10}{\pi}$ فٹ فی منٹ ہے۔

[اشارہ۔ گردشی مجسم ناقص نما کا حجم $\frac{4\pi}{3}$ ا ب ج ہے جس میں ا، ب، ج مجسم کے نصف محور ہیں]۔

(۳) ۱۲ فٹ قطر کے نصف کروی کٹورے میں مائع بشرح ۹ مکعب فٹ فی منٹ ڈالا جا رہا ہے۔ اگر کٹورے کی آدھی گہرائی بھر گئی ہو تو بتاؤ کہ اُس وقت مائع کی سطح کے بلند ہونے کی شرح $\frac{8}{27\pi}$ فٹ فی منٹ ہے۔

[اشارہ۔ کروی قطاع کا حجم = $\frac{1}{6}\pi$ ب (۳ ص$^2$ + ب$^2$) جس میں ص مستوی سطح کا نصف قطر ہے اور ب اس کی بلندی]

(۴) ایک سیڑھی ۱۳ فٹ لمبی ہے۔ اس کا اوپر کا سرا ایک انتصابی دیوار سے لگا ہوا ہے اور نیچے کا سرا سطح زمین پر ٹکا ہوا ہے۔ اگر یہ نیچے کا سرا دیوار سے مخالف سمت میں بشرح ۳ فٹ فی ثانیہ کھینچا جائے جبکہ وہ دیوار سے ۵ فٹ دور ہو تو بتاؤ کہ اوپر کا سرا دیوار پر سے بشرح $\frac{5}{4}$ ۱ فٹ فی ثانیہ نیچے اُترتا جائیگا۔

(۵) حرناگزار طریقہ پر گیس کی ایک مقدار دبائی جا رہی ہے۔ اگر کسی وقت ۵۶ پونڈ فی مربع انچ دباؤ کے تحت اس کا حجم ۱۰ مکعب فٹ ہے۔ اور بشرح ایک مکعب فٹ فی ثانیہ گھٹتا جا رہا ہے تو دریافت کرو کہ دباؤ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے حرناگزار استحالوں کا ضابطہ د ح$^{1.4}$ = مستقل ہے۔

[جواب۔ تقریباً ۹،۷ پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ اضافہ]

(ب) آسان هندسی و طبیعی مسائل میں متواتر تفرق کا استعمال۔

## ۶۔ منحنی کے مڑنے کی سمت اور اس کے ذریعہ اعظم و اقل قیمتوں کی پہچان کا طریقہ۔

شکل ۲۱ میں ف فَ ا ب ق قَ ایک منحنی ہے جو ایک نقطہ (محدد لا، ما) کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ نقطہ سے جیسے جیسے منحنی کو مرتسم ہوتا ہے اُس پر منحنی کے مماس کا ڈھلان بدلتا جاتا ہے۔ خطِ مماس جب منحنی کے اوپر واقع ہوتا ہے تو اس حصہ میں منحنی کا قوس نیچے کی طرف مجوّف ہوتا ہے اور جب خطِ مماس منحنی کے نیچے واقع ہوتا ہے تو یہاں منحنی کا قوس اوپر کی طرف مجوّف ہوتا ہے۔ شکل میں منحنی کا ڈھلان گھٹتا جاتا ہے جبکہ نقطہ قوس ف ا کو مرتسم کرتا ہے۔ اس حصہ میں ما یعنے فہ (لا) (منحنی جس کی ترسیم ہے) لا کا ایک گھٹنے والا تفاعل ہے۔ اس کے علی الرغم نقطہ (لا، ما) جبکہ قوس ب فَ کو مرتسم کرتا ہے

شکل ۲۱

تو ڈھلان بڑھتا جاتا ہے اور اس حصہ میں فہ (لا) لا کا ایک بڑھنے والا تفاعل ہے

پس اول الذکر صورت میں فہَ (لا) کا تفرقی سر یعنے فہً (لا) ایک منفی مقدار ہے اور ثانی الذکر صورت میں فہً (لا) مثبت مقدار ہے - پس کس نقطہ پر منحنی کے مڑنے کی سمت کا اس طرح پتہ چل سکتا ہے:-

ما = فہ (لا) کی ترسیم نیچے کی طرف مجوّف ہوتی ہے اگر ما کا دوسرا مشتق بلحاظ لا منفی ہے اور اوپر کی طرف مجوّف ہوتا ہے جبکہ یہ مشتق مثبت ہوتا ہے۔ نقطہ ا پر قوس نیچے کی طرف مجوّف ہے اور منحنی کا معیّن ایک اعظم قیمت رکھتا ہے - یعنے فہَ (لا) = ۰ اور فہً (لا) منفی ہے - نقطہ ب پر قوس اوپر کی طرف مجوّف ہے اور منحنی کا معیّن ایک اقل قیمت رکھتا ہے۔ یعنے فہَ (لا) = ۰ اور فہً (لا) مثبت ہے - پس تفاعل فہ (لا) کی اعظم و اقل قیمتیں دریافت کرنی ہوں تو

(۱) تفاعل کا مشتق دریافت کرلیا جائے (۲) اس مشتق کو صفر کے مساوی لکھ کر متغیر کی فاصل قیمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات حل کی جائے اور اس کی حقیقی اصلیں حاصل کرلی جائیں (۳) تفاعل کا ثانوی مشتق معلوم کیا جائے (۴) اور اس ثانوی مشتق میں متغیر کی بجائے اس کی ہر ایک فاصل قیمت تعویض کی جائے - اگر اس طرح ایک منفی مقدار حاصل ہوتی ہے تو تفاعل اس فاصل قیمت پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے۔ اور اگر ایک مثبت مقدار حاصل ہوتی ہے تو تفاعل ایک اقل قیمت رکھتا ہے -

جب فہً (لا) = ۰ یا غیر موجود ہے تو یہ طریقہ بیکار ہو جاتا ہے اگرچہ اس صورت میں بھی تفاعل کی ایک اعظم یا اقلّ قیمت ہو سکتی ہے - ایسی صورت میں قبل ازیں جو اساسی طریقہ (دیکھو ۔۔) بتایا گیا ہے کارآمد ثابت ہوگا - حالیہ طریقہ عموماً کام دیتا ہے اور جب تفاعل کے ثانوی مشتق کی تعیین ضرورت سے زیادہ طویل یا مشقت طلب نہیں ہوتی ہے تو یہی طریقہ سب سے مختصر پایا جاتا ہے -

**توضیحی مثال** - مندرجۂ بالا طریقہ سے تفاعل ما = ۳ لا$^{۴}$ - ۴ لا$^{۳}$ - ۳۶ لا$^{۲}$ + ۶۰ کا اعظم و اقلّ قیمتوں کے لیے امتحان کرو -

**حل** : ما = ۳ لا$^{۴}$ - ۴ لا$^{۳}$ - ۳۶ لا$^{۲}$ + ۶۰

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۱۲ لا$^{۳}$ - ۱۲ لا$^{۲}$ - ۷۲ لا

اس کو صفر کے مساوی لکھنے سے $لا\,(لا^{۳} - لا^{۲} - ۶لا) = ۰$ ۔ $لا\,(لا - ۳)\,(لا + ۲) = ۰$
یعنے $لا = ۰$ یا $لا = ۳$ یا $لا = -۲$
یہ معلوم کرنے کے لیے کہ آیا لا کی ان فاصل قیمتوں پر ما اعظم ہے یا اقل
$\frac{فر^{۲}\,ما}{فر\,لا^{۲}} = ۳\,لا^{۲} - ۲\,لا - ۶$ پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر
$لا = ۰$ تو $\frac{فر^{۲}\,ما}{فر\,لا^{۲}} = -۶$ اور چونکہ یہ منفی ہے اس لیے $لا = ۰$ پر
ما اعظم ہے اور اس کی قیمت $-۶$ ہے۔
اگر $لا = ۳$ تو $\frac{فر^{۲}\,ما}{فر\,لا^{۲}} = ۲۷ - ۶ - ۶ = ۱۵$ جو مثبت ہے اس لیے
$لا = ۳$ پر ما اقل ہے اور اس کی قیمت $۲۴۳ - ۱۰۸ - ۳۲۴ + ۶۰ = -۱۲۹$ ہے۔
اگر $لا = -۲$ تو $\frac{فر^{۲}\,ما}{فر\,لا^{۲}} = ۱۲ + ۴ - ۶ = ۱۰$ جو مثبت ہے اس لیے
$لا = -۲$ پر ما اقل ہے اور اس کی قیمت $۴۸ + ۳۲ - ۱۴۴ + ۶۰ = -۴$ ہے۔

# مثالیں

(۱) $ما = لا^{۳} - ۳\,لا^{۲} - ۹\,لا + ۵$ کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ $لا = -۱$ پر اس کی اعظم قیمت ۱۰ ہے اور $لا = ۳$ پر اقل قیمت $-۲۲$ ہے۔

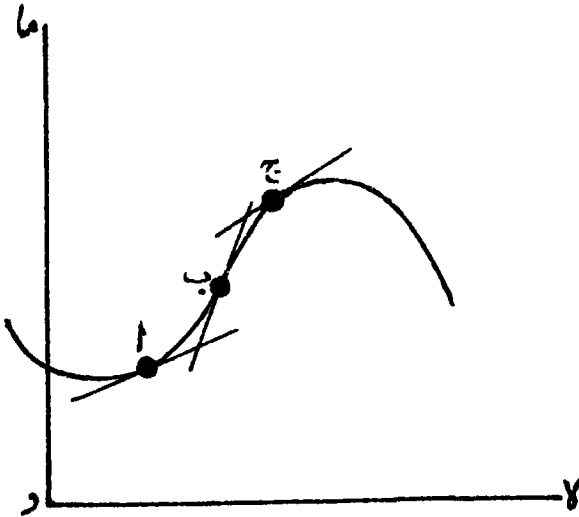
(۲) ثابت کرو کہ $ما = \frac{ا\,لا}{لا^{۲} + ا^{۲}}$ کی اعظم قیمت $= \frac{۱}{۲}$ جو $لا = ا$ پر واقع ہوتی ہے اور اقل قیمت $= -\frac{۱}{۲}$ جو $لا = -ا$ پر واقع ہوتی ہے۔

(۳) $لا^{۵} - ۵\,لا^{۳} - ۲۰\,لا + ۱۰$ کی اعظم قیمت $(= ۵۸)$ $لا = -۲$ پر واقع ہوتی ہے اور اقل قیمت $(= -۳۸)$ $لا = ۲$ پر واقع ہوتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے قطر کے دائرے کے اندر کھینچے ہوئے مثلثوں میں مثلث متساوی الاضلاع کا رقبہ سب سے بڑا ہے۔

(۵) دو قصبے ا اور ب ایک ریل کی سیدھی سڑک ج د سے علی الترتیب ۴ اور ۸ میل فاصلوں پر واقع ہیں۔ اگر قصبۂ ا کے لیے ریل کی سڑک کا قریب ترین مقام ج ہے اور قصبۂ ب کے لیے قریب ترین مقام د اور ج د = ۹ میل تو بتاؤ کہ ریل کا اسٹیشن کہاں قائم کیا جائے تاکہ اس سے ا اور ب تک کی سڑکوں کا مجموعی طول اقل ہو۔　　[جواب = ج سے ۳ میل]

**۲۱۔ نقاطِ عطف** ۔ منحنی کے نقطۂ عطف سے مراد وہ نقطہ ہے جو مڑنے کی باہم دیگر مخالف سمتوں میں مڑنے والی قوسوں کو ایک دوسرے سے علیحدہ کرتا ہے۔ نقطۂ عطف کے ایک طرف اگر منحنی کی قوس ایک لحاظ سے مجوّف ہے تو اس کے دوسرے طرف اسی لحاظ سے منحنی کی قوس محدّب ہے۔

شکل ۲۲ میں ب منحنی کا ایک نقطۂ عطف ہے۔ ا پر منحنی کی قوس اوپر سے

شکل ۲۲

مجوّف ہے اور ج پر اسی لحاظ سے محدب منحنی کا مُرسّم نقطہ جب نقطہ عطف ب سے گزرتا ہے تو وہاں تفاعل کے ثانوی مشتق کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے اور اگر منحنی مسلسل ہے تو یہ مشتق اس نقطہ پر معدوم ہوتا ہے۔ پس نقطہ عطف پر فہً (لا) = ۰
اس مساوات کو حل کرنے سے نقاطِ عطف کے فصلے معلوم ہو جاتے ہیں کسی نقطہ عطف کے قریب منحنی کے مُڑنے کی سمت دریافت کرنے کے لیے پہلے اس نقطہ کے فصلہ سے ذرا سی کمتر قیمت اور پھر ذرا سی زائد قیمت کا فصلہ لے کر دیکھو کہ تفاعل کے ثانوی مشتق کی علامت کیا ہے۔ اس سے پتہ چل جائیگا کہ نقطہ عطف کے قریب منحنی کے کس طرف قوس مجوّف ہے اور کس طرف محدب۔ شکل کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ جہاں منحنی کا حصّہ اوپر کی طرف مجوّف ہے جیسے کہ ا کے پاس، یہاں منحنی خطِ مماس کے اوپر واقع ہوگا اور جہاں نیچے کی طرف مجوّف ہے جیسے ج کے پاس، وہاں منحنی خطِ مماس کے نیچے واقع ہوگا۔ نقطہ عطف ب پر خطِ مماس منحنی پر سے گزر جاتا ہے۔

پس منحنی ما = فہ (لا) کے کسی نقطہ عطف کی پہچان کے لیے پہلے فہً (لا) دریافت کرو۔ پھر اس کو صفر کے مساوی لکھ کر مساوات کی حقیقی اصلیں معلوم کرو۔ اس کے بعد ایک ایک اصل سے خفیف سی کمتر اور پھر خفیف سی زائد قیمت کا فصلہ لے کر دیکھو کہ آیا فہً (لا) کی علامت تبدیل ہوتی ہے اگر تبدیل ہوتی ہے تو وہاں نقطہ عطف واقع ہے۔ اس آخری عمل سے پہلے بعض اوقات فہً (لا) کو اس کے اجزاء ضربی کی رقموں میں لکھنا مفید ہوتا ہے۔

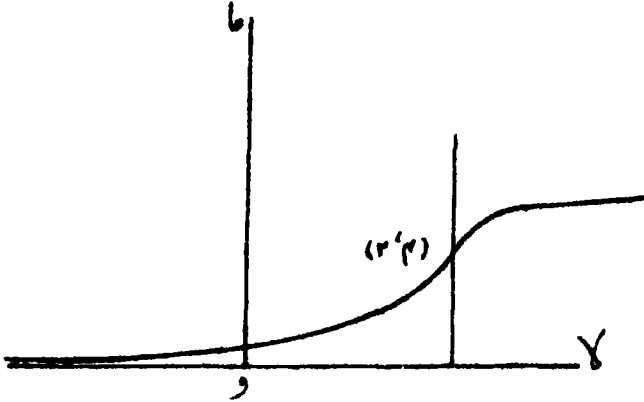
ہم ذیل میں ایک ایسی مثال پیش کرتے ہیں جس میں فہَ (لا) اور فہً (لا) دونوں لامتناہی ہیں۔

**مثال۔** منحنی $(\text{ما} - ۲)^{۳} = (\text{لا} - ۴)$ کا نقطہ عطف تلاش کرو۔

چونکہ $\text{ما} = ۲ + (\text{لا} - ۴)^{\frac{۱}{۳}}$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{۳}(\text{لا} - ۴)^{-\frac{۲}{۳}}$$

اور $$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \frac{-۲}{۹}(\text{لا} - ۴)^{-\frac{۵}{۳}}$$

جبکہ لا = ۴ پہلا اور دوسرا دونوں مشتق لامتناہی ہوجاتے ہیں ۔

شکل ۲۳

جبکہ لا < ۴ $\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ = مثبت

اور جبکہ لا > ۴ $\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ = منفی

جہاں لا = ۴ تو ما = ۲

پس نقطہ (۴، ۲) پر کا خطِ مماس محور لا کے علی القوائم ہے اور اس نقطہ کے بائیں جانب منحنی اوپر کی طرف مجوف ہے اور اس کے سیدھے جانب نیچے کی طرف مجوف ۔ لہذا (۴، ۲) ایک نقطہ عطف ہے ۔

# مثالیں

(۱) ما = لا^۳ - ۳ لا^۲ - ۴ کی ترسیم کا امتحان کرکے بتاؤ کہ اس کا کونسا حصہ مقعر ہے اور کونسا محدب ۔ اور نیز ثابت کرو کہ نقطہ (۱، -۶) اس کا ایک نقطۂ عطف ہے ۔

(۲) ما = (لا^۲ - ۱)^۲ کا اُس کے مڑنے کی سمتوں اور نقاطِ عطف سے

متعلق امتحان کرو۔ [جواب۔ نقاطِ عطف کے محدد $(\frac{۱}{\sqrt{۳}}، \frac{۴}{۹})$ $(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}، \frac{۴}{۹})$ ہیں]

(۳) بتاؤ کہ ما = لا$^{۳}$ مبداء کے بائیں جانب نیچے کی طرف مقعر ہے اور اس کے سیدھے جانب اوپر کی طرف محدب ہے۔ لیکن ما = لا$^{۴}$ ہر مقام پر اوپر کی طرف مقعر ہے۔

**۸۔ ترسیم منحنیات** — مستوی ہندسۂ تحلیلی میں طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ جب کسی منحنی کی مساوات خطی محدّدوں کی رقموں میں دی جاتی ہے تو اس کی ترسیم کھینچنے کے لیے عموماً مساوات کو حل کرکے (اگر وہ حل ہوسکتی ہے) ما یا لا کے لیے ایک جملہ حاصل کیا جاتا ہے اور لا یا ما کی موزوں عددی قیمتیں مان کر ما یا لا کی متناظر قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں اور اس طرح منحنی کے کافی نقطوں کے محدّد معلوم کرکے ترسیم تیار کرلی جاتی ہے۔ یہ طریقہ اول تو مساوات کے حل ہونے پر استعمال ہوسکتا ہے اور کسی حالت میں بھی بہت مشقّت طلب ہے۔ اکثر اوقات صرف منحنی کی عام شکل معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثلاً یہ کہ منحنی کہاں مقعر ہے اور کہاں محدب، ایک سمت سے دوسری سمت میں کس کس مقام پر مُڑتی ہے وغیرہ وغیرہ ان امور کی فوری تعیین احصار کے ذریعے بآسانی عمل میں آسکتی ہے، جیسا کہ مندرجہ ذیل مثال سے معلوم ہوگا۔

**مثال۔** منحنی ما = لا$^{۴}$ - ۲ لا$^{۲}$ + ۱۰ کی ترسیم کھینچو۔

چونکہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ سے منحنی کا ہر مقام پر ڈھلان معلوم ہوجاتا ہے اس لیے (ا) تفاعل کا پہلا مشتق (یعنے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$) دریافت کرکے صفر کے مساوی لکھا جائیگا۔ پھر اس کو حل کرکے منحنی کے اعظم اور اقل نقطوں کے فصلوں کا پتہ چلایا جائیگا یعنے لا کی وہ قیمتیں معلوم کرلی جائینگی جن کے لیے ما کی قیمتیں اعظم یا اقل ہیں۔ اس کے بعد (ب) تفاعل کا دوسرا مشتق (یعنے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$) دریافت کیا جائیگا اور اس کو صفر کے مساوی مان کر منحنی کے نقاطِ عطف کے فصلوں کا پتہ چلایا جائیگا۔ پھر (ج) جن نقطوں کے فصلے

پہلے دو عملوں سے معلوم ہو چکے ہیں اُن کے متناظر معینوں کی قیمتیں محسوب کر لی جائینگی۔ بعد ازاں (د) منحنی کی شکل معلوم کرنے کے لیے جتنے بھی اور نقطوں کے محدد لا یا ما کی مناسب قیمتیں فرض کر کے دریافت کیے جا سکتے ہیں دریافت کر لیے جائینگے۔ اس طرح جو نقطے دریافت ہو جائیں ان کے محددوں وغیرہ کی ایک جدول تیار کر لی جائیگی۔ پھر اس کے بموجب نقشہ کشی کے کاغذ پر نشانات لگا دیے جائینگے۔ اور اُن نشانات پر سے ایک صاف گزر منحنی کھینچ دیا جائیگا۔

(ا) چونکہ ما = لا$^{۴}$ − ۲لا$^{۲}$ + ۱۰، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۴لا$^{۳}$ − ۴لا

جب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ تو ۴لا$^{۳}$ − ۴لا = ۰ یعنے ۴لا(لا$^{۲}$ − ۱) = ۰

∴ لا = ۰ یا لا = ±۱

(ب) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ = ۱۲لا$^{۲}$ − ۴ پس جب $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ = ۰ تو ۱۲لا$^{۲}$ − ۴ = ۰

∴ لا$^{۲}$ = $\frac{۱}{۳}$ یعنے لا = ± $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

(ج) لا = ۰ تو ما = +۱۰

لا = +۱ تو ما = +۹

لا = −۱ تو ما = +۹

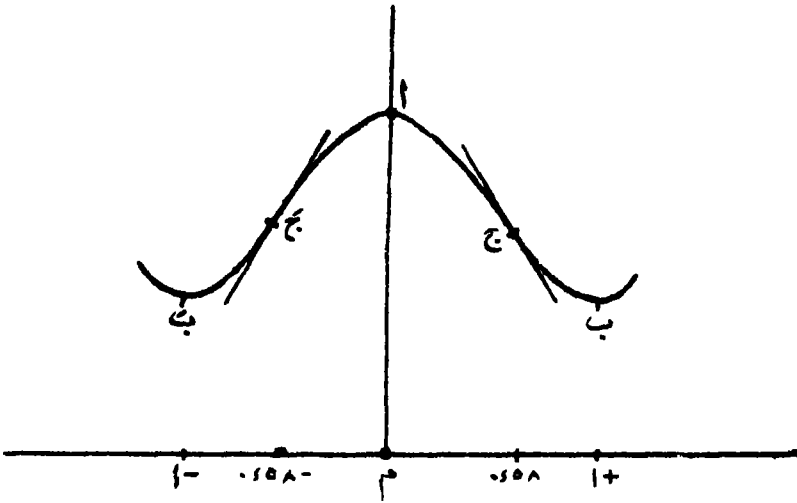
لا = +$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ تو ما = +۹$\frac{۴}{۹}$، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = −$\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$

اور لا = −$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ تو ما = +۹$\frac{۴}{۹}$، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = +$\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$

(د)

| لا | ما | $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ | $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ | کیفیت | منحنی کی سمت |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | +۱۰٫۰ | ۰ | -۴ | اعظم کا نقطہ | نیچے کی جانب مقعر |
| ±۰٫۱ | +۹٫۹۸ | ∓۰٫۴۰ | -۳٫۹ | | |
| ±۰٫۲ | +۹٫۹۲ | ∓۰٫۷۷ | -۳٫۵ | | |
| ±۰٫۳ | +۹٫۸۳ | ∓۱٫۰۹ | -۲٫۹ | | |
| ±۰٫۴ | +۹٫۷۱ | ∓۱٫۳۴ | -۲٫۱ | | |
| ±۰٫۵ | +۹٫۵۶ | ∓۱٫۵۰ | -۱٫۰ | | |
| $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ تقریباً ۰٫۵۸ | +۹٫۴۴ | $\mp\frac{5}{3\sqrt{3}}$ | ۰ | عطف کا نقطہ | |
| ±۰٫۶ | +۹٫۴۱ | ∓۱٫۵۴ | +۰٫۳ | | اوپر کی جانب مقعر |
| ±۰٫۷ | +۹٫۲۶ | ∓۱٫۴۳ | +۱٫۹ | | |
| ±۰٫۸ | +۹٫۱۳ | ∓۱٫۱۵ | +۳٫۷ | | |
| ±۰٫۹ | +۹٫۰۴ | ∓۰٫۶۸ | +۵٫۷ | | |
| ±۱٫۰ | +۹٫۰ | ۰ | +۸ | | |
| ±۱٫۱ | ۹٫۰۴ | ±۰٫۹۲ | +۱۰٫۵ | اقل کا نقطہ | |

اس جدول میں تیرہ نقطوں کے محدد وغیرہ درج ہیں۔ عام طور پر اتنی زحمت اٹھانے کی ضرورت نہیں نقاط اعظم و اقل وعطف کے علاوہ اگر ان کے قریب کے تین چار اور نقطے دریافت کر لیے جائیں تو کافی ہوگا۔

جدول میں لا کی قیمتیں ± اور ان کے متناظر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمتیں ∓ لکھی گئی ہیں۔ اس کا یہ مفہوم ہے کہ اگر لا کی قیمت + ۰٫۱ ہے تو اس کے متناظر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت - ۰٫۴۰ ہے اور اگر لا = - ۰٫۱ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = + ۰٫۴۰ لیکن $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمت ہر دو صورتوں میں - ۳٫۹ ہے۔

شکل ۲۴

شکل ۲۴ کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ لا = ۰ (یعنے مبداء) پر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۰ اور ما کی قیمت اعظم اور = ۱۰ پھر جیسے جیسے لا کی قیمت مثبت سمت میں بڑھتی ہے ما کی قیمت گھٹتی ہے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت منفی اور علداً بڑھتی جاتی ہے۔ $\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ کی قیمت منفی اور علداً گھٹتی جاتی ہے۔ یہاں تک کہ لا = $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ = (۰٫۵۸ تقریباً) پر پہنچ کر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت $-\frac{8}{3\sqrt{3}}$ = (−۱٫۵۴ تقریباً) ہوجاتی ہے جو علداً سابقہ اور بعد کو آنے والی قیمتوں سے بڑی ہے۔ یہاں $\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ کی قیمت علداً گھٹ کر لیکن جبری نقطۂ نظر سے بڑھ کر صفر ہو جاتی ہے۔ یہاں تک وہ منفی مقدار تھی اب مثبت ہو جاتی ہے اور اس کے بعد جیسے جیسے لا کی قیمت بڑھتی ہے وہ عدداً اور نیز جبری نقطۂ نظر سے بڑھتی جاتی ہے۔ یعنے اعظم کے نقطہ ا سے عطف کے ایک نقطہ ج تک $\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ کی قیمت منفی اور بالآخر صفر ہوتی ہے اس کے بعد سے وہ مثبت ہوتی ہے۔ منحنی کے جس حصہ میں وہ منفی ہے وہ حصّہ نیچے کی جانب مقعّر ہے اور جس حصہ میں وہ مثبت ہے وہ اوپر کی جانب محدّب۔

نقطۂ عطف پر پہنچنے کے بعد $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت منفی ہی رہتی ہے۔ لیکن عدداً گھٹتی جاتی ہے حتیٰ کہ لا = + ۱٫۰۰ پر پہنچ کر وہ صفر ہو جاتی ہے۔ یہاں سے وہ آگے چل کر مثبت ہو جاتی ہے۔

طالب علم لا کی منفی قیمتوں کے متعلق بھی اس طرح شکل کے مطالعہ سے نتائج قلمبند کر سکینگے۔

# مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ ما = لا³ - ۹ لا² + ۲۴ لا - ۷ نقطہ لا = ۲ پر اعظم ہے اور لا = ۴ پر اقل اور لا = ۳ پر اس کا نقطۂ عطف ہے۔

اس شکل کی ترسیم بھی کھینچو۔

(۲) مندرجۂ ذیل منحنیوں کو مصرحۂ بالا طریقہ سے مرتسم کرو:-

(ا) ما = $\frac{\text{۶ لا}}{\text{لا}^2 + 1}$ جواب [اعظم (۱، ۳) اقل (-۱، -۳) نقاطِ عطف (۰، ۰) اور (± $\sqrt{3}$ ، ± $\frac{3\sqrt{3}}{2}$)]

(ب) ما = - $\frac{1}{4}$ لا³ + $\frac{3}{4}$ لا² - ۱ جواب [اعظم (۲، ۰) اقل (۰، -۱)]

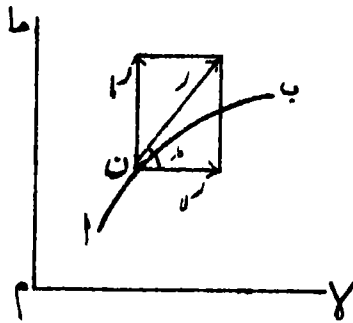
## ۹۔ چال، رفتار اور اسراع کی تفرقی سروں یا مشتقوں کے ذریعہ تعبیر

طالب نے حرکیات کی ابتدائی کتابوں میں پڑھا ہوگا کہ اگر کوئی ذرہ خطِ مستقیم یا منحنی مدار میں مساوی فاصلے مساوی وقتوں میں طے کرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ اس کی چال مستقل یا یکساں ہے۔ چال کی تعیین مدت مقررہ میں طے شدہ فاصلہ کو مدت مقررہ پر تقسیم کرنے سے ہوتی ہے۔ اگر ذرہ کی چال یکساں نہ ہو تو کسی مقام پر اس کی تعیین ذیل کے ضابطے سے ہوتی ہے:-

$$\text{چال} = \left[ \text{نہا}_{\text{مف و} \to 0} \frac{\text{مف لا}}{\text{مف و}} \right] = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

جس میں مف لا وہ فاصلہ ہے جو ذرہ اپنے مدار (خطِ مستقیم یا منحنی) میں مقررہ نقطہ سے وقت مف و میں طے کرتا ہے۔ واضح ہو کہ چال ہمیشہ ایک مثبت مقدار ہوتی ہے۔ لیکن رفتار ایک سمتی مقدار ہے اور اس میں (۱) چال (۲) سمت اور (۳) جانب یعنے سمت کا مثبت یا منفی مفہوم یہ تینوں امور مضمر ہیں۔ اگر ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو اس کی رفتار کسی آن میں

$$ر = \text{نہا}_{\text{مف و} \leftarrow \cdot} \frac{\text{مف س}}{\text{مف و}} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}$$

جس میں مف س وہ فاصلہ ہے جو ذرہ مف و وقت میں طے کرتا ہے اور یہ مثبت ہے یا منفی بلحاظ اس امر کہ ذرہ خطِ مذکور کے مثبت یا منفی جانب کو حرکت کرتا ہے۔ اگر ذرہ ایک مستوی منحنی ا ب میں حرکت کرتا ہے (دیکھو شکل ۲۵) تو

شکل ۲۵

نقطہ ن پر اس کی رفتار لا اور ما دو معیّنہ محوروں کی سمتوں میں تحلیل کی جاتی ہے اگر رفتار کا سمتی محور لا کے ساتھ زاویہ طہ پر مائل ہے تو

محور لا کی سمت میں اس کا جزوِ ترکیبی $ر_{لا}$ = ر جم طہ

اور ما ........... $ر_{ما}$ = ر جب طہ

ان اجزاءِ ترکیبی کی رقموں میں ر کی مقدار = $\sqrt{ر_{لا}^2 + ر_{ما}^2}$

اور ر کی سمت یعنے زاویہ طہ = مس$^{-1}$ $\frac{ر_ہا}{ر_لا}$

ر لا اور ر ہا کی علامت کے لحاظ سے جانب کا مفہوم دریافت ہوتا ہے ۔

اسراع بھی ایک سمتی مقدار ہے اور اس کی تعریف وقت کے لحاظ سے رفتار کی شرح تبدیلی ھے ۔ اگر ذرّہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو رفتار کی صرف مقدار اور جانبِ حرکت (مثبت یا منفی) میں تبدیلی واقع ہو سکتی ہے ۔ ایسی صورت میں

$$\text{اسراع} \quad ا = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر}^2 \text{س}}{\text{فر و}^2}$$

اگر حرکت مستوی منحنی میں ہو تو ذرّہ کا حاصل مجموعی اسراع اس کے لا، ہا کی سمتوں والے اسراعوں ( $ا_لا = \frac{\text{فر ر}_لا}{\text{فر و}}$ اور $ا_ہا = \frac{\text{فر ر}_ہا}{\text{فر و}}$ ) کا سمتی حاصل مجموع ہے جو لا اور ہا کی سمتوں میں بلحاظ وقت رفتار ر کی تبدیلی کی شرحیں ہیں ۔ پس حاصل مجموعی اسراع کی مقدار

$$ا = \sqrt{ا_لا^2 + ا_ہا^2}$$

اور اس کا زاویہ میلان محور لا کے ساتھ

$$\text{فہ} = \text{مس}^{-1} \frac{ا_ہا}{ا_لا}$$

واضح ہو کہ اسراع ہمیشہ منحنی مدار کی مقعر سمت میں واقع ہوتا ہے ۔

**اسراع کے مماسی اور عمادی اجزاءِ ترکیبی** ۔ اکثر ایسے مسائل میں جن میں ذرّہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے اس کے اسراع کو اس کے مدار کے مماس اور عماد کی سمتوں میں تحلیل کرنا مفید ہوتا ہے ۔ چنانچہ اگر ذرّہ کی چال ر ہے اور کسی نقطہ پر اس کے مدار کا زاویۂ میلان طہ تو

$$ر_لا = \text{ر جم طہ} \qquad \text{اور} \qquad ر_ہا = \text{ر جب طہ}$$

چونکہ ر اور طہ عموماً وقت و کے تفاعل ہوتے ہیں لہذا تفرق کے عمل سے

$$\text{ل}_{\text{لا}} = \frac{\text{فر ر}_{\text{لا}}}{\text{فر و}} = \text{جم طہ} \frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} - \text{ر جب طہ} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر و}}$$

لیکن $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر س}} \cdot \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}$ اور $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر س}} = \frac{1}{\text{ص}}$ جس میں

ص = نصف قطرِ انحناء۔

[ واضح ہو کہ نصف قطرِ انحناء سے اس مماسی دائرہ کا نصف قطر مراد ہے، جو نقطۂ تماس کے پاس منحنی سے قریب ترین انطباق رکھتا ہے۔ اس دائرہ کو دائرۂ انحنا کہتے ہیں اور دائرۂ انحناء عموماً منحنی کو نقطہ مذکور پر قطع بھی کرتا ہے۔ لفظ انحناء سے مراد $\frac{1}{\text{ص}}$ ہی ہے۔ اس مسئلہ پر آگے چل کر تفصیل سے بحث کی جائیگی۔ یہاں صرف اتنا بتا دیا جاتا ہے کہ

$$\frac{1}{\text{ص}} = \frac{\frac{\text{فر}^2 \text{ا}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1 + \left(\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

اس کا ثبوت ایک دوسرے باب میں دیا جائیگا۔ ]

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = \text{ر}$$ یعنے ذرّہ کی چال

$$\text{پس } \text{ل}_{\text{لا}} = \text{جم طہ} \frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} - \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}} \text{ جب طہ}$$

$$\text{اسی طرح } \text{ل}_{\text{ا}} = \text{جب طہ} \frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} + \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}} \text{ جم طہ}$$

$$\text{پس اسراع ل} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}\right)^2}$$

جس میں $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}}$ اور $\frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$ اسراع ل کے علی القوائم اجزائے ترکیبی ہیں چونکہ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}}$ خطِ مماس کی سمت میں ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$ ذرّہ کے مدار کے علی القوائم ہے۔ پس اس سے واضح ہے کہ اسراع کا مماسی جزوِ ترکیبی بالکلیہ

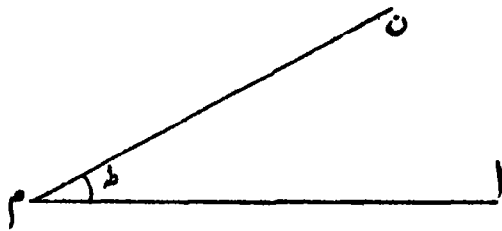
چال کی تبدیلی کے تابع ہوتا ہے - اگر چال بڑھتی جاتی ہے تو مماسی جزو ترکیبی سمت حرکت میں مثبت ہے اور اگر چال گھٹتی جاتی ہے تو سمت حرکت میں منفی ہے -

اسراع کا مماسی جزو ترکیبی $لم = \frac{فر ر}{فر و} = \frac{فر^۲ س}{فر و^۲}$

چال کی تبدیلی کے ساتھ یا تبدیلی بغیر حرکت کی سمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس سے صرف اسراع کا عمادی جزو ترکیبی ( $ل_ع$ ) پیدا ہوتا ہے - اس جزو کی سمت مدار کے مقعر جانب ہوتی ہے - اس کا ضابطہ

$$ل_ع = \frac{ر^۲}{ص}$$

جس میں ر = ذرہ کی چال اور ص = نقطہ زیر بحث پر مدار کا نصف قطر انحنا ر

**زاویئی رفتار اور زاویئی اسراع** - شکل ۲۶ میں نیمقطر سمتی ( radius vector ) م ن پر غور کرو جو خط م ا کے ساتھ زاویہ ط بنا رکھا ہے

شکل ۲۶

اور م مرکز کے گرد مستوی ا م ن میں گھوم رہا ہے - اس حرکت میں اگرچہ م ن کے کوئی سے دو نقطوں کی رفتار مساوی نہیں ہے، تاہم م ن کے گھومنے کی شرح سے ان تمام نقطوں کی رفتار معین ہو جاتی ہے - بدیں وجہ زاویئی رفتار کا تصور پیش کیا گیا - خط م ن کی زاویئی رفتار سے مراد وقت کے لحاظ سے زاویہ ط کی تبدیلی کی

شرح ہے۔ ہم اس کے لیے علامت سہ تجویز کرتے ہیں۔ پس

$$\text{سہ} = \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر و}}$$

اسی طریقہ پر زاویئی رفتار کی تبدیلی کی شرح زاویئی اسراع کہلاتی ہے۔ اس کے لیے ہم علامت عہ تجویز کرتے ہیں اور

$$\text{عہ} = \frac{\text{فر سہ}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر}^2\,\text{طہ}}{\text{فر و}^2}$$

مثال (۱) ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے جس کی مساوات $\text{س} = ۱۴۴\text{و} - ۱۶\text{و}^2$ ہے۔ دریافت کرو کہ $\text{و} = ۵$ پر وہ کتنا فاصلہ طے کیا ہوگا، اس کی رفتار کیا ہوگی اور اسراع کیا۔

حل۔ چونکہ $\text{س} = ۱۴۴\text{و} - ۱۶\text{و}^2$، رفتار $\text{ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = ۱۴۴ - ۳۲\text{و}$

اور $\text{و} = ۵$ پر $\text{ر} = ۱۴۴ - ۱۶۰ = -۱۶$ یعنے حرکت کے مخالف جانب

اسراع $\text{ا} = \frac{\text{فر}^2\,\text{س}}{\text{فر و}^2} = -۳۲$ جو ایک مستقل اور منفی مقدار ہے۔

مثال (۲) ایک ذرہ کی حرکت خطِ مستقیمی کی مساوات $\text{س} = \sqrt{\text{و}+۱}$ ہے ثابت کرو کہ اس کا اسراع منفی اور رفتار کے مکعب کے متناسب ہے۔

چونکہ $\text{س} = (\text{و}+۱)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore$ $\text{ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = \frac{1}{2}(\text{و}+۱)^{-\frac{1}{2}}$

اور $\text{ا} = \frac{\text{فر}^2\,\text{س}}{\text{فر و}^2} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\text{و}+۱)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\text{و}+۱)^{-\frac{3}{2}}$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\text{و}+۱)^{-\frac{1}{2}}\right\}^3 = -\frac{1}{2}\,\text{ر}^3$$

مثال (۳) ایک ذرہ منحنی $\text{ما} = \text{جب لا}$ پر سے حرکت کرتا ہے، حرکت کی سمت لا کی مثبت سمت ہے اور ذرہ کی چال ر اکائیاں فی ثانیہ ہے۔ اس کی رفتار کے لا اور ما والے اجزائے ترکیبی دریافت کرو اور نیز اس کے اسراع کے مماسی اور عمادی اجزائے ترکیبی

محسوب کرو۔

چونکہ ذرہ کی چال ر ہے اس کی رفتار سمت لا میں (یعنے $\text{ر}_{\text{لا}}$) = $\text{ر جم طہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$
اگر اس کی حرکت کے منحنی کے کسی مقام پر حرکت کی سمت محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔
اس طرح $\text{ر}_{\text{ما}} = \text{ر جب طہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}$ اور $\text{مس طہ} = \frac{\text{ر}_{\text{ما}}}{\text{ر}_{\text{لا}}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$
منحنی کی مساوات ما = جب لا ہے۔

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا} \quad \therefore \text{مس طہ} = \text{جم لا}$$

$$\text{چونکہ جم}^2\,\text{طہ} = \frac{1}{1+\text{مس}^2\,\text{طہ}} = \frac{1}{1+\text{جم}^2\,\text{لا}}$$

$$\text{اور جب}^2\,\text{طہ} = \frac{1}{1+\text{مم}^2\,\text{طہ}} = \frac{1}{1+\text{قم}^2\,\text{لا}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} = \text{ر}_{\text{لا}} = \text{ر جم طہ} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{1+\text{جم}^2\,\text{لا}}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = \text{ر}_{\text{ما}} = \text{ر جب طہ} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{1+\text{قم}^2\,\text{لا}}}$$

ماسی اسراع $\text{ا}_{\text{م}} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرو}}$ اور عمادی اسراع $\text{ا}_{\text{ع}} = \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$ جس میں ص نصف قطر انحنا ہے
ذرہ جس منحنی پر سے گزرتا ہے اس کی مساوات ما = جب لا ہے اور $\text{ص} = \frac{\left\{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرلا}^2}}$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا اور اس لیے } \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = -\text{جب لا}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\left\{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\text{جب لا}}$$

$$\text{پس } \text{ا}_{\text{ع}} = -\frac{\text{ر}^2\,\text{جب لا}}{\left(1+\text{جم}^2\,\text{لا}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

# مثالیں

ذیل کی ہر مساوات محور لا پر بوقت و ایک ذرّہ کا مقام ظاہر کرتی ہے۔ اس کی رفتار اور اسراع دریافت کرو اور بتاؤ کہ اس حرکت کی کیا خصوصیات ہیں:—

(۱) لا = ۴۰ و - ۸ و^۲　(جبکہ و = ۳)　　جواب　لا = ۴۸
ر = -۸
ا = -۱۶

(۲) لا = قو^و جب π و　　جواب　ر = قو^و (π جم π و - جب π و)
ا = قو^و [(۱-π^۲) جب π و - ۲π جم π و]

(۳) لا = و^۳ + ۱/و　جبکہ و = ۲　　جواب　ر = ۳ و^۲ - ۱/(۲(و)^{۳/۲})
= ۱۲ = ۱/(۴√۲) جبکہ و = ۲
ا = ۶ و + ۳/۴ · ۱/(و)^{۵/۲}
= ۱۲ - ۳/(۸√۲) جبکہ و = ۲

(۴) ایک ذرّہ منحنی مدار میں حرکت کرتا ہے جس کی مبدّلی مساواتیں (parametric equations)

لا = ر جم عہ (و)　اور　ما = ر جب عہ (و) - ۱/۲ ج و^۲　ہیں

اس کی رفتار اور اسراع کی مقدار اور ان کی سمتیں دریافت کرو اور بتاؤ کہ مدار کس نوعیت کا منحنی ہے۔

نوٹ۔ اکثر اوقات سہولت کی خاطر منحنی کے نقطہ کے محدّد لا اور ما ایک تیسرے متغیر یا مبدّل (parameter) کی شکل میں مساواتوں کے ذریعہ دیے جاتے ہیں۔ یہ مساواتیں مبدّلی کہلاتی ہیں۔ یہاں اس مثال میں مبدّل وقت و ہے۔ ملاحظہ ہو باب (۷)

[جواب　ر = √(ر^۲ - ۲ ر ج جب عہ (و) + ج^۲ و^۲)
رفتار کا زاویہ میلان محور لا کے ساتھ

ط = مس^{-۱} (مس عہ - ج و/(ر جم عہ))

ا = -ج، زاویہ میلان اسراع فہ = π/۲] مدار خط مکافی ہے۔

(۵) ایک ذرّہ خطِ ناقص $\frac{\text{لا}^{۲}}{۹} + \frac{\text{ما}^{۲}}{۱۶} = ۱$ پر سے موافق سمتِ ساعت حرکت کرتا ہے - دریافت کرو کہ کن مقامات پر $\text{ر}_{\text{لا}}$ اور $\text{ر}_{\text{ما}}$ مساوی ہونگے -

[جواب نقطوں $(\text{لا} = + \frac{۹}{۵}،\ \text{ما} = - \frac{۱۶}{۵})$ اور $(\text{لا} = - \frac{۹}{۵}،\ \text{ما} = + \frac{۱۶}{۵})$ پر]

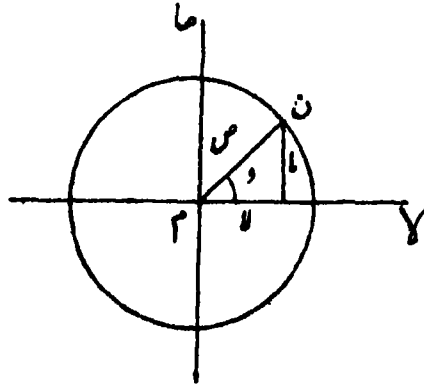
(۶) ایک ہوائی جہاز افقی خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے - اگر مبداء سے اس کا فاصلہ و گھنٹوں میں $(\frac{۱}{۲}\text{و}^{۴} - ۸\text{و}^{۳} + ۲۰\text{و}^{۲})$ ہے تو بتاؤ اس کی رفتار $۲\text{و}^{۳} - ۲۴\text{و}^{۲} + ۴۰\text{و}$ ہے اور اسراع $۶\text{و}^{۲} - ۴۸\text{و} + ۴۰$ ہے اور وہ اپنی سمتِ حرکت بدلنے کے لیے آغازِ پرواز سے ۲ اور ۱۰ گھنٹوں کے بعد ساکن ہوجاتا ہے -

# ساتواں باب

## مبدّلی اور قطبی مساواتیں علمِ ہندسہ میں ان کا استعمال

### ۱ـ منحنی کی مبدلی مساواتیں ۔ ڈھلان وغیرہ

اکثر اوقات منحنی کے کسی نقطہ کے محدد لا اور ما بطور ایک تیسرے متغیر یا مبدّل کے تفاعلوں کے ظاہر کیے جاتے ہیں۔ مثلاً بشکل

لا = ف (و) اور ما = فہ (و)

شکل ۲۷

و کی ہر ایک قیمت لا کی ایک قیمت اور ما کی قیمت دیتی ہے اور اس سے منحنی کے

ایک نقطہ کی تعیین ہو جاتی ہے۔ یہ مساواتیں منحنی کی مبدّلی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اگر ان مساواتوں میں سے و کو ساقط کر دیا جائے تو منحنی کی مستطیلی (rectangular) مساوات حاصل ہوتی ہے۔ بطور مثال

لا = ص جم و اور ما = جب و دائرہ کی مبدّلی مساواتیں ہیں (دیکھو شکل ۲۷) جن میں و مبدّل ہے۔ کیونکہ اگر ان کے مربعوں کو جمع کیا جائے تو و ساقط ہو جاتا ہے اور

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2 (\text{جم}^2 \text{و} + \text{جب}^2 \text{و}) = \text{ص}^2$$

جو دائرہ کی مستطیلی مساوات ہے۔ واضح ہے کہ اگر و کی قیمت صفر سے ۲ π تک بدلے تو نقطہ ن (یعنے لا، ما) دائرہ کا مکمل محیط مرتسم کرتا ہے۔

چونکہ ما تفاعل ہے و کا اور و تفاعل (منقلوب) ہے لا کا پس

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} \cdot \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} \cdot \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}}$$

یعنے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}} = \frac{\text{فہ (و)}}{\text{ف (و)}}$ = منحنی کا ڈھلان نقطہ ن (لا، ما) پر

اس ضابطہ سے ایسے منحنی کا جس کی مبدّلی مساواتیں دی گئی ہوں ڈھلان معلوم کر لیا جا سکتا ہے۔

**مثال (۱)** اگر فہ کسی ناقص کا خارج المرکز زاویہ ہے تو (ا) بتاؤ کہ ما = ا جم فہ اور لا = ب جب فہ اس کی مبدّلی مساواتیں ہیں۔ (ب) اس ناقص کے ایسے نقطہ پر جس کے لیے فہ = ۴۵° خطوطِ مماس و عماد کی مساواتیں دریافت کرو اور اس کے زیر مماس اور زیر عماد کے طول معلوم کرو۔

**حل (ا)** م کو مرکز مان کر ناقص کے نصف محورِ اعظم و نصف محورِ اقل ا اور ب نصف قطر کے دائرے کھینچو۔ یہ ناقص کے معاون (auxiliary) دائرے ہونگے۔ (دیکھو شکل ۲۸)۔ ایک ہی نصف قطر م ج ب کے نقطوں ب اور ج میں سے علی الترتیب ب ن ۲ اور د ج ن خطوط م ما اور م لا کے متوازی کھینچو۔ ان کے تقاطع کا نقطہ ن ناقص پر واقع ہوگا۔ اس کے محدد لا، ما فرض کرو۔

چونکہ لا = م ۲ = م ب جم فہ = ا جم فہ

اور ما = ا ن = م د = م ج جب فہ

= ب جب فہ

اس لیے $\frac{لا}{ا}$ = جم فہ اور $\frac{ما}{ب}$ = جب فہ

شکل ۲۰

پس $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ جو ناقص کی مستطیلی مساوات ہے۔

(فہ = ناقص کا خارج المرکزی زاویہ نقطہ ن پر)۔

(ب) چونکہ منحنی کی مبدّلی مساواتوں میں فہ مبدّل ہے

$\frac{فر لا}{فر فہ}$ = - ا جب فہ اور $\frac{فر ما}{فر فہ}$ = ب جم فہ

پس $\frac{فر ما}{فر لا} = -\frac{ب جم فہ}{ا جب فہ} = -\frac{ب}{ا}$ مم فہ = منحنی کا ڈھلان اس کے کسی نقطہ پر = م اگر فہ = ۴۵° تو اس سے متعلق نقطہ تماس کے لیے

لا$_1$ = $\frac{1}{2}$ و $\sqrt{2}$ اور ما$_1$ = $\frac{1}{2}$ ب $\sqrt{2}$

اور منحنی کا ڈھلان م = $-\frac{ب}{و}$

پس خطِ مماس کی مساوات ب لا + و ما = $\sqrt{2}$ و ب ہے

اور عماد کی مساوات $\sqrt{2}$ (و لا − ب ما) = و$^2$ − ب$^2$ ہے

اس طرح زیرِ مماس کا طول = $\frac{1}{2}$ ب $\sqrt{2}$ $(-\frac{و}{ب})$ = $-\frac{1}{2}$ و $\sqrt{2}$

اور زیرِ عماد کا طول = $\frac{1}{2}$ ب $\sqrt{2}$ $(-\frac{ب}{و})$ = $-\frac{1}{2}$ $\frac{ب^2}{و}$ $\sqrt{2}$

**مثال (۲)** (ا) طہ کو مبدّل مان کر خطِ تدویر (cycloid) کی مبدّلی مساواتیں حاصل کرو اور (ب) نقطہ لا$_1$، ما$_1$ پر جہاں طہ = طہ$_1$ منحنی کے زیرِ مماس زیرِ عماد اور عماد کے طول دریافت کرو۔

حل (ا) فرض کرو ثابت اساس م لا پر دائرہ د ن ب (مرکز ج) مبداء م سے شروع کر کے سیدھے جانب کو بغیر پھسلے لڑھکتا ہے (ملاحظہ ہو شکل ۲۹)

شکل ۲۹

اس حرکت میں اِس کے محیط کا کوئی نقطہ ن جو منحنی مرتسم کرتا ہے خطِ تدویر کہلاتا ہے۔

جب دائرہ لڑھکتے ہوئے محولہ بالا شکل کی وضع میں پہنچتا ہے تو اس کا نقطہ د اساس کو چھوتا ہے۔ اور دائرہ کی قوس دن کا طول اساس کے جزو م د کے مساوی ہے۔ اگر زاویہ د ج ن = طہ اور دائرہ کا نصف قطر = ا تو

$$\text{لا} = \text{م ع} = \text{م د} - \text{ع د} = \text{ا طہ} - \text{ا جب طہ} = \text{ا (طہ - جب طہ)}$$

$$\text{اور ما} = \text{ن ع} = \text{د ج} - \text{ا ج} = \text{ا} - \text{ا جم طہ} = \text{ا (۱ - جم طہ)}$$

خطِ تدویر کی یہ مبدلی مساواتیں ہیں۔ اور طہ دائرہ کے لڑھکنے کا زاویہ طہ مبدل ہے۔ م ہ = ۲π ا خطِ تدویر کی ایک کمان کا اساس کہلاتا ہے۔ اور ر اس کا راس۔ طہ کو ساقط کرنے سے مستطیلی مساوات

$$\text{لا} = \text{ا قوس جم}\left(\frac{\text{ا - ما}}{\text{ا}}\right) - \sqrt{\text{۲ ا ما} - \text{ما}^2}$$

(ب) منحنی کی مبدلی مساواتوں کو بلحاظ طہ تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}} = \text{ا (۱ - جم طہ)} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر طہ}} = \text{ا جب طہ}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ - جم طہ}} = \text{م} = \text{منحنی کا ڈھلان اس کے کسی بھی نقطہ پر}$$

$$\text{جبکہ طہ} = \text{طہ}_1\text{،} \quad \text{ما} = \text{ما}_1 = \text{ا (۱ - جم طہ}_1\text{)}\text{،} \quad \text{م} = \text{م}_1 = \frac{\text{جب طہ}_1}{\text{۱ - جم طہ}_1}$$

$$\text{زیر مماس س ع} = \frac{\text{ا (۱ - جم طہ}_1\text{)}^2}{\text{جب طہ}_1} \quad \text{زیر عماد ع د} = \text{ا جب طہ}_1$$

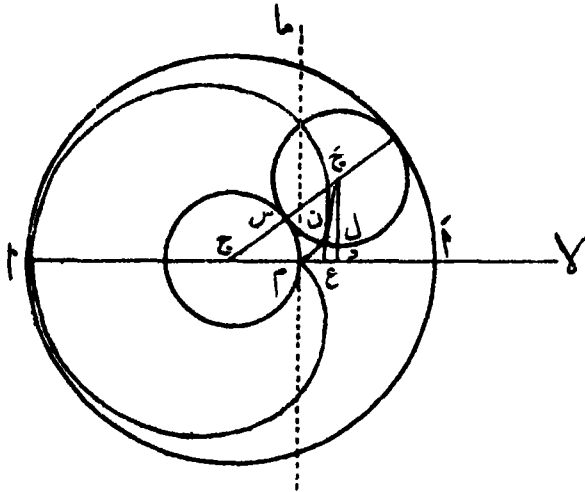
$$\text{اور عماد د ن} = \text{ا}\sqrt{\text{۲ (۱ - جم طہ}_1\text{)}} = \text{۲ ا جب}\frac{\text{طہ}_1}{\text{۲}}$$

منحنی کے اُفقی اور اِنتصابی خطوط مماس کے نقاطِ تماس کی تعیین کے لیے علی الترتیب $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر طہ}} = ۰$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}} = ۰$ کو حل کرکے طہ کی قیمتیں معلوم کرنا چاہیے۔

مثال (۳) خطِ صنوبری ( cardioid ) کے قرن (cusp) کو مبدا مان کر اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کو اگر محور لا مانیں اور اس کے علی القوائم خط کو محور ما (دیکھو شکل ۲۔۸) تو منحنی کی مبدلی مساواتیں

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ا جم طہ} - \tfrac{1}{2}\ \text{ا جم ۲ طہ} - \tfrac{1}{2}\ \text{ا} \\ \text{اور}\quad \text{ما} &= \text{ا جب طہ} - \tfrac{1}{2}\ \text{ا جب ۲ طہ} \end{aligned}\right\}$$

لکھی جا سکتی ہیں، جن میں طہ مبدّل ہے۔ منحنی کے افقی و انتصابی مماسوں کے نقاطِ تماس دریافت کرو۔

منحنی ا م ن خطِ صنوبری ہے یہ ایک برتدویر (epicycloid) ہے جس کو جَ مرکز والے دائرہ کے محیط کا نقطہ ن مرتسم کرتا ہے جبکہ یہ دائرہ مساوی نصف قطر اور ج مرکز والے دائرہ کے محیط پر سے بغیر پھسلے لڑھکتا ہے۔

شکل ۳۰

ص ان دائروں کا نصف قطر ہے اور جَ ج م = زاویہ طہ دی ہوئی مساواتوں کا مبدّل ہے۔ اگر ن ابتداءً م سے منطبق تھا تو اوپر والے دائرہ کے لڑھکنے سے قوس س ن = قوس س م اور چونکہ دونوں دائرے مساوی ہیں اس لیے زاویہ س جَ ن = زاویہ س ج م = طہ

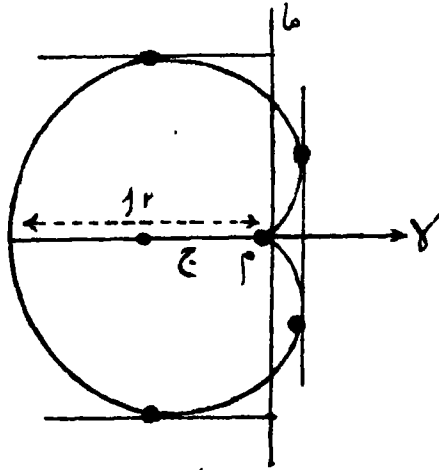
ص اور طہ کی رقموں میں خطِ صنوبری کے نقطہ ن کے محدد بآسانی معلوم

کرلیے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ جؔ سے اگر محور لا پر عمود جؔ ل د گرایا جائے اور ن سے عمود ن ع اور ن ل (دیکھو شکل ۳۱) تو ج کو مبدا مان کر

لا = ج ع = ج د ۔ ع د = ۲ ص جم طہ ۔ ن ل

لیکن ن ل = ن جؔ جب ∠ ن جؔ ل = ص جم ۲ طہ

∴ لا = ۲ ص جم طہ ۔ ص جم ۲ طہ

اور ما = ن ع = جؔ د ۔ جؔ ل = ۲ ص جب طہ ۔ ص جب ۲ طہ

شکل ۳۱

اگر مبدا بجائے ج کے م تصور کیا جائے تو چونکہ ص = $\frac{1}{2}$ ا خطِ صنوبری کی مبدّلی مساواتیں

لا = ا جم طہ ۔ $\frac{1}{2}$ ا جم ۲ طہ ۔ $\frac{1}{2}$ ا
اور ما = ا جب طہ ۔ $\frac{1}{2}$ ا جب ۲ طہ
} ہوجاتی ہیں ] ۔

حل $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}}$ = ا (۔جب طہ + جب ۲ طہ) اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرطہ}}$ = ا (جم طہ ۔ جم ۲ طہ)

افقی مماسوں کی تعیین کے لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرطہ}}$ = ۰ اس لیے جم طہ = جم ۲ طہ
= ۲ جم$^2$ طہ ۔ ۱

∴ ۲ جم$^2$ طہ ۔ جم طہ ۔ ۱ = ۰

اس دو درجی مساوات کو حل کرنے سے جم طہ = ۱ یا $-\frac{1}{۲}$ ∴ طہ = ۰ یا °۱۲۰ یا °۲۴۰

انتصابی مماسوں کی تعیین کے لیے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}}$ = ۰ اس لیے − جب طہ + جب ۲ طہ = ۰

∴ ۲ جب طہ جم طہ − جب طہ = ۰ پس جب طہ = ۰ اور جم طہ = $\frac{۱}{۲}$

∴ طہ = ۰ یا °۶۰ یا °۳۰۰

واضح ہو کہ مشترک اصل ( root ) طہ = ۰ کو مسترد کر دینا چاہیے۔ اس لیے کہ ایسی صورت میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صفر ہو جاتے ہیں اس لیے منحنی کا ڈھلان غیر معین ہو جاتا ہے۔ منحنی کی دی ہوئی مبدّلی مساوات سے ظاہر ہے کہ لا = ما = ۰ جبکہ طہ = ۰ یہ نقطہ م قرن کہلاتا ہے۔

طہ کی دوسری قیمتیں دی ہوئی مساواتوں میں تعویض کرنے سے

افقی مماسوں کے نقاطِ تماس = ( $-\frac{۳}{۴}$ ا ، ± $\frac{۳}{۴}$ ا $\sqrt{۳}$ )

اور انتصابی = ( $\frac{۱}{۴}$ ا ، ± $\frac{۱}{۴}$ ا $\sqrt{۳}$ )

شکل سے واضح ہے کہ انتصابی مماس باہمدیگر منطبق ہو کر ایک "دوہرا خط مماس" پیدا کرتے ہیں۔

یہ تمام خطوطِ مماس شکل ۳۲ میں بتائے گئے ہیں۔

نوٹ۔ شکل ۳۱ کے مطالعہ سے طالب علم بہایت آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتا ہے کہ خطِ صنوبری آتشی منحنی (caustic curve) ہے جبکہ مبداء نور ۱ پر واقع ہوتا ہے اور شعاعیں ۲ ا قطر والے دائرہ کے محیط پر سے منعکس ہوتی ہیں۔

# مثالیں

مندرجۂ ذیل منحنیوں کے مصرحہ نقطوں پر کے خطوط مماس و عماد کی مساواتیں لکھو اور ان کے زیر مماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو:۔

(۱) لا = جب و
ما = جم ۲ و　نقطہ و = $\frac{۳۲}{۶}$ پر

جواب:
مماس کی مساوات ۴ لا + ۲ ما − ۳ = ۰
عماد ...... ۴ ما − ۲ لا − ۱ = ۰
زیر مماس کا طول = − $\frac{۱}{۴}$
زیر عماد ...... = − ۱

(۲) لا = جم و
ما = جب ۲ و　نقطہ و = $\frac{۳۲}{۳}$ پر

(۳) لا = و$^{۳}$
ما = و$^{۲}$　نقطہ و = − ۱ پر

(۴) ثابت کرو کہ
منحنی لا = ۲ + ۵ جم ط، ما = ۳ + ۵ جب ط کے افقی مماسوں کے نقاطِ تماس (۲، − ۲) اور (۲، ۸) ہیں۔ اور انتصابی مماسوں کے ...... (− ۳، ۳) اور (۷، ۳) ہیں۔

ذیل کے منحنی مرتسم کرو اور ان کے افقی و انتصابی مماسی خطوط کے نقاطِ تماس دریافت کرو:-

(۵) لا = ۴ جب ط
ما = ۲ (۱ − جم ط)

(۶) لا = $\frac{۲ و^{۲} − ۱}{و^{۴}}$
ما = $\frac{۱}{و}$

(۷) لا = جم$^{۳}$ و
ما = جب$^{۳}$ و

ذیل کے منحنیوں کے کسی بھی نقطہ پر کے (ا) زیر مماس، (ب) زیر عماد (ج) مماس، (د) عماد کے طول دریافت کرو:-

(۸) لا = ا (جم و + و جب و)
ما = ا (جب و − و جم و)

جواب: (ا) ما م و، (ب) ما مس و، (ج) $\frac{ما}{جب و}$، (د) $\frac{ما}{جم و}$

(۹) در تدویر (hypocycloid)
لا = ۴ ا جم$^{۳}$ و
ما = ۴ ا جب$^{۳}$ و

جواب: (ا) − ما م و، (ب) − ما مس و، (ج) $\frac{ما}{جب و}$، (د) $\frac{ما}{جم و}$

(۱۰) پتّا منحنی ( folium )

$$\left\{\begin{array}{l} لا = \frac{۳ و}{۱ + و^۳} \\ ما = \frac{۳ و^۲}{۱ + و^۳} \end{array}\right.$$

(۱۱) زائدی لولبی (Hyperbolic spiral)

$$\left\{\begin{array}{l} لا = \frac{ل}{و} جم و \\ ما = \frac{ل}{و} جب و \end{array}\right.$$

## ۲۔ مبدّلی مساواتیں۔ دوسرے مشتق کی تعیین۔

۱ کے شروع میں بتایا گیا تھا کہ

$$ما' \equiv \frac{فر ما}{فر لا} = \frac{\frac{فر ما}{فر و}}{\frac{فر لا}{فر و}} = \text{نقطہ ن یعنے (لا، ما) پر منحنی کا ڈھلان۔}$$

اس کو ضابطہ (۱) کہو۔

واضح ہے کہ $\frac{فر ما}{فر لا}$ جو ما کا بلحاظ لا پہلا مشتق ہے ضابطہ (۱) سے و کا تفاعل ہے۔
پس اگر ما' = ھ (و) لکھیں تو اسی ضابطہ سے بجائے ما کے ما' لکھنے سے

$$ما'' = \frac{فر ما'}{فر لا} = \frac{\frac{فر ما'}{فر و}}{\frac{فر لا}{فر و}} = \frac{ھ' (و)}{ف' (و)} \quad \text{........ ضابطہ (ب)}$$

اگر جیسا کہ ۱ کے شروع میں لکھا گیا تھا لا = ف (و)

**توضیحی مثال۔** خطِ تدویر

$$\left\{\begin{array}{l} لا = ل (ط - جب ط) \\ ما = ل (۱ - جم ط) \end{array}\right. \text{کے لیے}$$

ما'' یعنے $\frac{فر^۲ ما}{فر و^۲}$ دریافت کرو۔

حل ۔ا۔ کی توضیحی مثال میں ہم نے دریافت کیا تھا کہ یعنے $\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{جب طہ}{ا - جم طہ}$

اور $\frac{فر لا}{فر طہ} = ا (ا - جم طہ)$ ۔

تفرق کرنے سے $\frac{فر مَا}{فر طہ} = \frac{(ا - جم طہ) جم طہ - جب^۲ طہ}{(ا - جم طہ)^۲} = \frac{جم طہ - ا}{(ا - جم طہ)^۲}$

$= - \frac{ا}{(ا - جم طہ)}$

ضابطہ (ب) سے $مً = \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} = \frac{\frac{فر مَا}{فر و}}{\frac{فر لا}{فر و}} = \frac{- \frac{ا}{(ا - جم طہ)}}{ا (ا - جم طہ)} = - \frac{ا}{ا (ا - جم طہ)^۲}$

چونکہ مً منفی ہے، منحنی نیچے کی طرف مقعر ہے جیسا کہ شکل ۳۰ سے ظاہر ہے۔

# مثالیں

(۱) ذیل کے سوالوں میں $\frac{فر ما}{فر لا}$ اور $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ کو مبدل و کی رقموں میں دریافت کرو :۔

(ا) لا = ا جم و، ما = ب جب و

(ب) لا = ۲ (ا - جب و)، ما = ۴ جم و

(ج) لا = جب و، ما = جب ۲ و

(د) لا = جم ۲ و، ما = جب و

(۲) ثابت کرو کہ منحنی لا = قط طہ، ما = مس طہ کا کوئی نقطہ عطف نہیں ہے۔

(۳) منحنی لا = ۲ ا مم طہ، ما = ۲ ا جب^۲ طہ کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ اس کا نقطۂ اعظم (۰، ۲ ا) ہے اور نقاطِ عطف $\left(\pm \frac{۲ ا}{\sqrt{۳}}، \frac{۳ ا}{۲}\right)$ ہیں

(۴) منحنی لا = مس و، ما = جب و جم و کو مرتسم کرو اور بتاؤ کہ اس کا نقطۂ اعظم $(۱، \frac{۱}{۲})$ ہے، نقطۂ اقل $(-۱، -\frac{۱}{۲})$ اور نقاطِ عطف $(-\sqrt{۳}، -\frac{\sqrt{۳}}{۴})$، $(۰، ۰)$ اور $(\sqrt{۳}، \frac{\sqrt{۳}}{۴})$

(۵) برتدویر ( epicycloid[۲] ) $\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = ۳\text{ا جم طہ} - \text{ا جم ۳ طہ} \\ \text{ما} = ۳\text{ا جب طہ} - \text{ا جب ۳ طہ} \end{array} \right.$

کو مرتسم کرو (جس میں ا نصف قطر والا دائرہ بغیر پھسلے ۲ا نصف قطر والے دائرہ کے محیط پر لڑھکتا ہے اور مساواتیں بڑے دائرہ کے مرکز کو مبداء مان کر حاصل کی گئی ہیں) اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور $\frac{\text{فر}^۲ \text{ما}}{\text{فر لا}^۲}$ کو مبدّل طہ کی رقموں میں دریافت کرو۔

[نوٹ - ترسیم کے مطالعہ سے طالب علم بآسانی معلوم کرلیگا کہ یہ برتدویر آتشی منحنی ہے جبکہ ۴ا نصف قطر والے دائرہ کے محیط پر سے متوازی شعاعیں منعطف ہوتی ہیں۔]

## ۳ - منحنی کی قطبی مساوات - نیم قطر سمتی اور خطِ مماس کا درمیانی زاویہ -

فرض کرو کہ قطبی محدّدوں میں منحنی کی مساوات $ر = \text{ف} (\text{طہ})$ ہے

ہم ثابت کرینگے کہ $\text{مس پسا} = \frac{ر}{رَ}$ ......... (۱)

جس میں $رَ = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}$

شکل ۳۲ میں ن ف منحنی ف ق کا مبداء ن سے کھینچا ہوا نیم قطر سمتی ہے۔ ف کے قطبی محدد ر اور طہ ہیں۔ ق منحنی پر ف کے قریب ہی کا ایک نقطہ ہے اور اس کے قطبی محدد ر + مف ر اور طہ + مف طہ ہیں۔ ف ق میں سے خطِ قاطع ا ب کھینچو اور ف ع نیم قطر سمتی ن ق پر عمود گراؤ۔
تب زاویہ ف ن ق = مف طہ، ف ع = ر جب مف طہ

اور ن ع = ر جم مف ط

معہذا مس ف ق ع = مس پ = ف ع / ع ق

= ف ع / (ن ق - ن ع) = ر جب مف ط / (ر + مف ر - ر جم مف ط)

شکل ۳۲

نیم قطر سمتی ن ف اور ف پر کے خط مماس منحنی ف س کا درمیانی زاویہ پ ہے۔ اگر اب زاویہ مف ط گھٹتے گھٹتے بطور انتہا صفر ہو جائے تو نقطہ ق بالآخر ف کو پہنچ جائیگا۔ قاطع ا ب نقطہ ف کے گرد گھوم کر بالآخر اپنی انتہائی وضع میں خط مماس ف س سے مل جائیگا۔ اور زاویہ ف ق ع = پ بطور انتہا پ ہو جائیگا۔

پس مس پ = نہا (مف ط ← ۰) ر جب مف ط / (ر + مف ر - ر جم مف ط)

= نہا (مف ط ← ۰) ر جب مف ط / (ر (۱ - جم مف ط) + مف ر) = نہا (مف ط ← ۰) ر جب مف ط / (۲ ر جب² (مف ط / ۲) + مف ر)

$$= \text{نہا}_{\text{مف طہ} \to \cdot} \frac{\text{ر} \dfrac{\text{جب مف طہ}}{\text{مف طہ}}}{\text{ر جب} \dfrac{\text{مف طہ}}{2} \cdot \dfrac{\text{جب} \frac{\text{مف طہ}}{2}}{\frac{\text{مف طہ}}{2}}}$$

بحالیکہ مف طہ ← ۰۔ نہا $\dfrac{\text{جب مف طہ}}{\text{مف طہ}} = 1$ اور نہا $\dfrac{\text{جب} \frac{\text{مف طہ}}{2}}{\frac{\text{مف طہ}}{2}} = 1$ مزید اجب $\dfrac{\text{مف طہ}}{2} = \cdot$

$$\text{اور نہا} \frac{\text{مف ر}}{\text{مف طہ}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} = \text{رَ}$$

$$\therefore \text{مس پہ} = \frac{\text{ر}}{\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}} = \frac{\text{ر}}{\text{رَ}}$$

منحنی کے ڈھلان کی قیمت قطبی محددوں میں مثلث ن ف س میں ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ثہ} = \text{طہ} + \text{پہ}$

$$\therefore \text{مس ثہ} = \text{مس} (\text{طہ} + \text{پہ}) = \frac{\text{مس طہ} + \text{مس پہ}}{1 - \text{مس طہ مس پہ}} = \frac{\text{مس طہ} + \frac{\text{ر}}{\text{رَ}}}{1 - \text{مس} \frac{\text{ر}}{\text{رَ}}}$$

## ۴ ۔ دو منحنیوں کا زاویۂ تقاطع جبکہ ان کی مساواتیں قطبی محددوں میں دی گئی ہوں

شکل ۳۳ میں فرض کرو کہ منحنیاں نقطہ ف پر متقاطع ہیں جہاں ان کے اور نیم قطر سمتی کے مابین زاویہ علی الترتیب $\text{پہ}_1$ اور $\text{پہ}_2$ ہے۔



شکل ۳۳

اور اس لیے نقطہ مذکور پر ان منحنیوں کا درمیانی زاویہ $\text{فہ} = \text{پ}_2 - \text{پ}_1$

چونکہ $\text{مس فہ} = \text{مس}(\text{پ}_2 - \text{پ}_1) = \dfrac{\text{مس پ}_2 - \text{مس پ}_1}{1 + \text{مس پ}_2 \ \text{مس پ}_1}$

اور $\text{مس پ}_1 = \dfrac{\text{سر}}{\text{سر}'_1}$ اور $\text{مس پ}_2 = \dfrac{\text{سر}}{\text{سر}'_2}$ اس لیے مس فہ اور فہ فوراً معلوم کر لیے جا سکتے ہیں۔

## ۵۔ منحنی کے مماسی خط کی قطبی محددوں میں مساوات۔

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات $\text{سر} = \text{ف}(\text{ط})$ ہے اور اس کے ثابت نقطہ $\text{ف}_1$ پر کا مماسی خط $\text{ف}_1\text{ق}$ ہے۔ دیکھو شکل ۳۴۔ اس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مبدا، ن میں سے اس پر عمود ن ق گراؤ۔ خطِ مماس کے کسی نقطۂ ف کے محدد سر اور ط مانو۔

شکل ۳۴

شکل سے واضح ہے کہ $\text{سر جب پ} = \text{سر}_1 \text{ جب پ}_1$

اور $\text{ثہ} = \text{ط}_1 + \text{پ}_1 = \text{ط} + \text{پ}$

پس نقطہ ف۱ پر کے مماسی خط کی مساوات

ر جب (طہ۱ + پہ۱ − طہ) = ر۱ جب پہ۱ ہے

جس میں ر۱ = ف(طہ۱) اور پہ۱ = مس^-۱ (ر۱ ÷ (فر۱ ÷ وطہ۱)) = مس^-۱ (ر۱ ÷ ر̄۱)

## ۶۔ قطبی زیر مماس اور قطبی زیر عماد کے طول۔

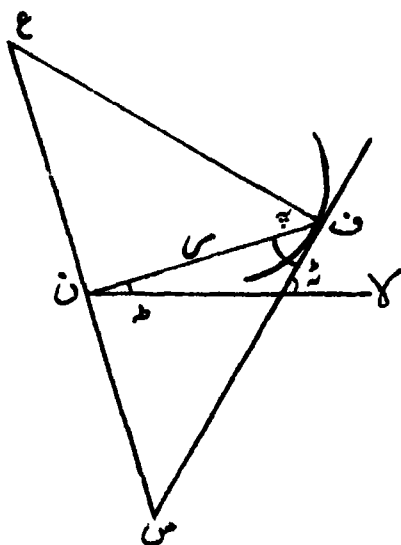
شکل ۳۵ میں نقطہ ف پر ف س خطِ مماس ہے اور ف ع عماد۔ ع ن س مبدا ن میں سے نیمقطر سمتی ن ف کے علی القوائم کھینچا گیا ہے۔

پس ن س = نقطہ ف پر منحنی کے قطبی زیر مماس کا طول

اور ن ع = " " قطبی زیر عماد کا طول

مثلث ن ف س میں ن س = ر مس پہ = ر² (فطہ ÷ فر)

اور مثلث ن ف ع میں ن ع = ر ÷ مس پہ = فر ÷ فطہ

شکل ۳۵

[نوٹ:۔ ر کے ساتھ جب ط بھی بڑھتا ہے تو $\frac{\text{فرط}}{\text{فرر}}$ مثبت ہوتا ہے اور پہ (جیسا کہ شکل ۳۶ میں کھینچا گیا ہے) زاویہ حادّہ ہے۔ ایسی صورت میں زیر مماس ن س مثبت ہے اور مبدا ر ن پر سے اگر کوئی شاہد نمقطر سمتی ن ف کا مطالعہ کررہا ہو تو اس کے سیدھے جانب ناپا جاتا ہے۔ جب $\frac{\text{فرط}}{\text{فرر}}$ منفی ہوتا ہے تو زیر مماس منفی ہوتا ہے اور مشاہد کے بائیں جانب ناپا جاتا ہے]

قطبی مماس کا طول یعنے ف س اور قطبی عماد کا طول یعنے ف ع شکل کے مطالعہ سے بآسانی معلوم کر لیے جاتے ہیں اس لیے کہ یہ دونوں قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر ہیں۔

## توضیحی مثالیں۔

(۱) دائرہ ر = ۲ ا جم ط کے ایسے نقطہ پر کا ڈھلان دریافت کرو جہاں ط = $\frac{\pi}{٦}$

حل $\frac{\text{فرر}}{\text{فرط}}$ = -۲ا جب ط پس مس پہ = $\frac{\text{ر}}{\frac{\text{فرر}}{\text{فرط}}}$ = $\frac{\text{۲ا جم ط}}{\text{-۲ا جب ط}}$

= - تم ط

ایسے نقطہ کے لیے جس پر ط = $\frac{\pi}{٦}$ مس پہ = - تم $\frac{\pi}{٦}$ = - $\sqrt{۳}$

پس ڈھلان = مس ثہ = $\frac{\frac{1}{\sqrt{۳}} - \sqrt{۳}}{1 + \sqrt{۳}\cdot\frac{1}{\sqrt{۳}}}$ = - $\frac{1}{\sqrt{۳}}$

(۲) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ر جب ط = ۲ ا اور خطِ مکافی ر = ا قط² $\frac{\text{ط}}{۲}$ زاویہ ۴۵° پر باہمدیگر متقاطع ہیں۔

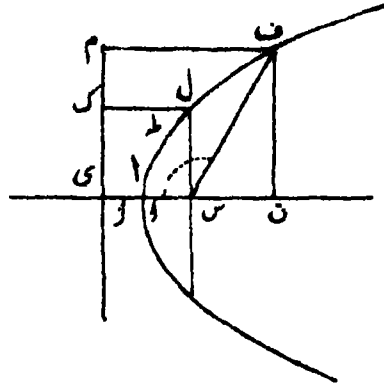
حل۔ شکل ۳۶ میں ا ل ف خطِ مکافی ہے جس کی قطبی مساوات ا قط² $\frac{\text{ط}}{۲}$ ہے۔

[واضح ہو کہ اس مساوات کے لیے محدّدوں کا مبدا ماسکہ س ہے اور زاویہ ط یعنے ا س ف موافق سمتِ ساعت ناپا جاتا ہے]۔

کتاب کی پہلی جلد صفحہ ۲۳۲ میں مخروطیوں کے لیے عام قطبی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}$ = ۱ + ز جم ط حاصل کی گئی تھی جس میں ل = س ل اور ز =

قطبی کا خروج المرکز۔ مکانی کی صورت میں $ل = ۲ا$ اور $ز = ۱$

پس $\frac{۲ا}{ر} = ۱ + جم ط = ۱ + ۲ جم^۲ \frac{ط}{۲} - ۱ = ۲ جم^۲ \frac{ط}{۲}$

$\therefore ر = ا قط^۲ \frac{ط}{۲}$

شکل ۳۶

خط ل ک دیا ہوا خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات $ر جب ط = ۲ا$ ہے
نقطۂ تقاطع پر خطِ مکانی اور خطِ مستقیم دونوں کا نیمقطر سمتی $ر$ مساوی ہے

یعنے $\frac{۲ا}{جب ط} = ا قط^۲ \frac{ط}{۲}$ $\therefore$ مس $\frac{ط}{۲} = ۱$ اور $ط = \frac{\pi}{۲}$

خطِ مستقیم کے لیے مس $پ_۲ = \frac{ر}{\frac{ءر}{ءط}} = \frac{ر}{- ر مم ط} = -$ مس ط

اور خطِ مکانی کے لیے مس $پ_۱ = \frac{ا قط^۲ \frac{ط}{۲}}{ا قط^۲ \frac{ط}{۲} مس \frac{ط}{۲}} = مم \frac{ط}{۲}$

نقطۂ تقاطع پر مس $پ_۲ = -$ مس $\frac{\pi}{۲}$ $\therefore پ_۲ = \frac{\pi}{۲}$

مس $پ_۱ = مم \frac{ط}{۲}$ $\therefore پ_۱ = \frac{\pi}{۴}$

پس نقطۂ تقاطع پر زاویہ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

(۳) لوکارثمی لولبی سر = ا^ط جس میں ا صفر سے بڑا ہے کے زیر مماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو۔

حل۔ زیر مماس کا طول = $\frac{\text{سر}^2}{\frac{\text{فر سر}}{\text{فر ط}}}$ اور زیر عماد کا طول = $\frac{\text{فر سر}}{\text{فر ط}}$

عملِ تفرق کے لیے لوک سر = ط لوک ا

$\therefore$ $\frac{\text{فر لوک سر}}{\text{فر سر}} \cdot \frac{\text{فر سر}}{\text{فر ط}}$ = لوک ا یعنی $\frac{1}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{فر سر}}{\text{فر ط}}$ = لوک ا

$\therefore$ $\frac{\text{فر سر}}{\text{فر ط}}$ = سر لوک ا = زیر عماد کا طول

اور $\frac{\text{سر}^2}{\frac{\text{فر سر}}{\text{فر ط}}}$ = $\frac{\text{سر}}{\text{لوک ا}}$ = زیر مماس کا طول

## مثالیں

(۱) خطِ مکافی سر = ا قطِ^۲ $\frac{\text{ط}}{2}$ میں ثابت کرو کہ ٹ + پ = π

(۲) بتاؤ کہ ارشمیدس کے لولبی سر = اط میں مس پ = ط اور اگر ط = ۲π اور ۴π تو پ کی قیمت علی الترتیب ۸۰° ۵۷′ اور ۸۵° ۲۷′ ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ لوکارثمی لولبی سر = ا^ط میں پ مستقل ہے یعنی خطِ مماس نیمقطر سمتی کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے [ اسی وجہ سے اس منحنی کو متساوی الزاویہ لولبی بھی کہتے ہیں ]

(۴) بتاؤ کہ خطوطِ صنوبری سر = ا (۱ + جب ط) اور سر = ا (۱ − جب ط) ایک دوسرے کو علی القوائم منقطع کرتے ہیں۔

(۵) ثابت کرو کہ ر = ا جب ۲ طہ اور ر = ا جم ۲ طہ منحنیوں کے تقاطع کا زاویہ فہ = مس⁻¹ $\frac{۴}{۳}$

(۶) مندرجۂ ذیل منحنیوں کے جوڑوں کا زاویۂ تقاطع فہ دریافت کرو۔

(ا) ر جم طہ = ۲ ا ، ر = ۵ ا جب طہ [جواب قوس مس $\frac{۳}{۴}$ ]

(ب) ر = ا جب طہ ، ر = ا جب ۲ طہ [جواب مبدا پر صفر درجہ اور دوسرے دو نقطوں پر قوس مس ۳ $\sqrt{۳}$ ]

(ج) ر = ۲ جم طہ ، ر = ۲ (۱ + جم طہ) [جواب °۳۰ ]

(۷) بتاؤ کہ متکافی لولبی ر طہ = ا کے قطبی زیر مماس کا طول مستقل ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ لولبی ر = ق^طہ کے ہر نقطہ پر (ا) مماس کا طول = عماد کا طول اور (ب) زیر مماس کا طول = زیر عماد کا طول۔

(۹) ثابت کرو کہ چشمہ منحنی یا ایٹرن ر² = ا² جم ۲ طہ کے قطبی زیر عماد کا طول $\frac{ر^۳}{ا^۲ \text{ جب } ۲ \text{ طہ}}$ یا ± ا $\sqrt{\text{جم } ۲ \text{ طہ}}$ ہے اور اس کے قطبی زیر عماد کا طول = $\frac{ا^۲ \text{ جب } ۲ \text{ طہ}}{ر}$ یا ± ا مس ۲ طہ $\sqrt{\text{جب } ۲ \text{ طہ}}$ ہے۔

# آٹھواں باب

## صغاریے اور تفرقے

**۱۔ صغاریے۔** احصاء میں ایسے متغیروں سے سابقہ پڑتا ہے جن کی انتہا صفر ہوتی ہے۔ ایسے متغیر صغاریے کہلاتے ہیں۔

[ نوٹ ۔ واضح ہو کہ ایک مستقل خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو، صغاریہ نہیں ہے۔ صغاریہ کی جو تعریف اوپر لکھی گئی ہے اس میں اس کا بھی شائبہ نہیں ہے کہ صغاریہ کی قیمتیں صرف چھوٹی ہی ہوتی ہیں ۔ اگرچہ فی الواقعی صغاریہ کی کوئی خاص قیمتوں پر جب غور کیا جاتا ہے تو یہ قیمتیں صفر کے قریب ہی کی ہوتی ہیں ۔ ]

بطور مثال مف لا اور مف ا صغاریے ہیں جبکہ نہا (مف لا ← ۰) مف ا / مف لا = فَ(لا)۔

**صدر صغاریہ** (Principal Infinitesimal) —

دو صغاریے جب ایک دوسرے سے مربوط ہوتے ہیں تو ہم ان میں سے کسی ایک کو **متغیر متبوع** منتخب کر سکتے ہیں۔ جس کو بھی اس طرح متغیر متبوع منتخب کیا جاتا ہے اس کو **صدر صغاریہ** کہتے ہیں۔ چنانچہ تفاوتوں کے حاصل تقسیم (difference-quotient) مف ا / مف لا میں مف لا عموماً صدر صغاریہ تصور کیا جاتا ہے۔

**صغاریوں کا اضافہ رتبہ** ۔۔ اگر عہ اور بہ دو صغاریے

ہوں اور نہا $\frac{به}{عه}$ = ج تو عه اور به کے اضافہ رتبہ کی اس طرح تعریف کی جاتی ہے :-

(۱) اگر ج = ۰ تو به بہ نسبت عه کے برتر یا بلند تر رتبہ کا صفاریہ ہے۔

(۲) اگر ج ایک محدود مستقل ہے جو صفر سے مختلف ہے تو به اور عه ایک ھی رتبہ کے ہیں۔

(۳) اگر ج نا متناہی ہو تو به بہ نسبت عه کے کمتر یا پست تر رتبہ کا ہے۔

مسئلہ (۱) اگر دو صفاریوں میں تفاوت ان میں سے کسی ایک کے صرف بلند تر رتبہ کا صفاریہ ہے تو ان کی نسبت کی انتہا اکائی ہے۔ یعنی نہا $\frac{به}{عه}$ = ۱ بشرطیکہ به ـ عه = صه جس میں صه بہ مقابل عه یا به کے بلند تر رتبہ کا ہو۔

ثبوت۔ نسبت $\frac{به}{عه} = \frac{عه + صه}{عه} = ۱ + \frac{صه}{عه}$

اور نہا $\frac{به}{عه}$ = ۱ + نہا $\frac{صه}{عه}$

لیکن $\frac{صه}{عه}$ = ۰ چونکہ بمقابل عه کے بلند تر رتبہ کا ہے۔ پس

نہا $\frac{به}{عه}$ = ۱

اِس مسئلہ کا ضد بھی صحیح ہے۔ یعنے اگر دو صفاریوں کی نسبت کی انتہا اکائی ہو تو ان میں تفاوت، ان میں سے کسی ایک سے بلند تر رتبہ کا صفاریہ ہوتا ہے۔

ثبوت۔ اگر یہ مانا جائے کہ نہا $\frac{به}{عه}$ = ۱

تب $\frac{به}{عه}$ = ۱ + يه جس میں يه صفاریہ ہے۔

یعنے به = عه + عه يه

پس ب - ع = ع ب

یہاں ع ب بمقابل ع کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے اور چونکہ ب اسی رتبہ کا ہے جو ع کا ہے، ع ب بمقابل ب کے بلند تر رتبہ کا ہے۔ اس لیے ع اور ب میں تفاوت، ان میں سے کسی ایک سے بھی بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

مسئلہ (۲)۔ دو صغاریوں کی نسبت کی انتہا معلوم کرتے وقت ہر ایک صغاریہ کی جگہ ایک دوسرا صغاریہ تعویض کیا جا سکتا ہے جو اس سے بلند تر رتبہ کا تفاوت رکھتا ہے۔ یعنے

$$\text{نہا}\ \frac{\text{ب}}{\text{ع}} = \text{نہا}\ \frac{\text{بَ}}{\text{عَ}}$$

بشرطیکہ ب - بَ = ص بہ نسبت ب کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے اور ع - عَ = ی بہ نسبت ع کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

ثبوت۔ نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ع}} = \frac{\text{بَ} + \text{ص}}{\text{عَ} + \text{ی}} = \frac{\text{بَ}}{\text{عَ}} \left( \frac{1 + \frac{\text{ص}}{\text{بَ}}}{1 + \frac{\text{ی}}{\text{عَ}}} \right)$

اور $\text{نہا}\ \frac{\text{ب}}{\text{ع}} = \text{نہا}\ \frac{\text{بَ}}{\text{عَ}}\ \text{نہا} \left( \frac{1 + \frac{\text{ص}}{\text{بَ}}}{1 + \frac{\text{ی}}{\text{عَ}}} \right)$

لیکن نہا $\frac{\text{ص}}{\text{بَ}}$ = ۰ کیونکہ ص بہ نسبت ب کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے اور اس لیے بَ کے بہ نسبت بھی۔ اسی طرح نہا $\frac{\text{ی}}{\text{عَ}}$ = ۰

$$\text{پس نہا}\ \frac{\text{ب}}{\text{ع}} = \text{نہا}\ \frac{\text{بَ}}{\text{عَ}}$$

مثال (۱) صغاریوں ب = ۳ ع + ۲ ع² اور ع کا اضافی رتبہ دریافت کرو۔

حل: $\text{نہا} \left( \frac{3\text{ع} + 2\text{ع}^2}{\text{ع}} \right) = \text{نہا}\ 3 + 2\text{ع} = 3$

پس به اور عه دونوں ایک ہی رتبہ کے صغاریے ہیں۔

مثال (۲)۔ صغاریوں به = $\sqrt[4]{\text{عه}^6 - 4\,\text{عه}^5}$ اور عه کا اضافی رتبہ دریافت کرو۔

$$\text{حل: } \underset{\text{عه}\to 0}{\text{نہا}} \left(\frac{\sqrt[4]{\text{عه}^6 - 4\,\text{عه}^5}}{\text{عه}}\right) = \underset{\text{عه}\to 0}{\text{نہا}} \sqrt[4]{\frac{\text{عه}^6 - 4\,\text{عه}^5}{\text{عه}^4}}$$

$$= \underset{\text{عه}\to 0}{\text{نہا}} \sqrt[4]{\text{عه}^2 - 4\,\text{عه}} = 0$$

اس لیے به بنسبت عه کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

مثال (۳)۔ بتاؤ کہ طه اور مس طه صغاریے ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

$$\text{حل: } \underset{\text{طه}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مس طه}}{\text{طه}} = \left(\underset{\text{طه}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب طه}}{\text{طه}}\right)\left(\underset{\text{طه}\to 0}{\text{نہا}} \frac{1}{\text{جم طه}}\right)$$

$$= (1)(1) = 1$$

پس دونو صغاریے ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

## مثالیں

(۱) صغاریوں به = جم$^2$ ۲ عه − ۱ اور عه میں بتاؤ کہ به کا بلند تر رتبہ ہے۔

(۲) به = $\sqrt[3]{3\,\text{عه} + 5\,\text{عه}^3 + 2\,\text{عه}^4}$ اور عه صغاریوں میں ثابت کرو کہ به پست تر رتبہ کا ہے۔

(۳) مندرجۂ ذیل صغاریوں کی جوڑیوں کا اضافی رتبہ دریافت کرو۔

(ا) به = جب$^2$ عه، مس$^2$ عه — جواب: دونوں ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

(ب) به = ۱ − جم عه، عه — جواب: به کا رتبہ بلند تر ہے۔

(ج) فه = مس طه − طه، طه — جواب: فه کا رتبہ بلند تر ہے۔

(د) ما = $(\sqrt{1+لا} - \sqrt{1-لا})$ لا جواب۔ دونوں ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

## ۲۔ صغاریٔ اضافہ کا صدر جزو۔

جب تفاعل ما = ف(لا) اور اس کا مشتق

$$\lim_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فَ (لا)} \qquad \text{فَ (لا)} \neq 0$$

دیے جاتے ہیں تو تفاوتوں کے حاصل تقسیم کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فَ (لا)} + \text{صہ}$$

جس میں صہ ← ۰ جبکہ مف لا ← ۰۔ اس لیے

$$\text{مف ما} = \text{فَ (لا) مف لا} + \text{صہ مف لا}$$

اس لحاظ سے اضافہ مف ما دو صغاریٔ رقموں میں تحلیل کیا جاتا ہے، اس طور پر کہ پہلی رقم بہ نسبت دوسری رقم کے کمتر درجہ کا صغاریہ ہے۔ ان رقموں کا اضافی رتبہ ذیل کی تحریر سے بخوبی واضح ہو جاتا ہے:

$$\lim_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{صہ مف لا}}{\text{فَ (لا) مف لا}} = \lim_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{صہ}}{\text{فَ (لا)}} = 0$$

کمتر رتبہ کا ہونے کی وجہ سے، فَ (لا) مف لا بلحاظ صہ مف لا کے بہت بڑا ہے، بشرطیکہ فَ (لا) ≠ ۰۔ اور مف لا کافی چھوٹا ہے۔ بدیں وجہ وہ ما کے اضافہ کا **صدر جزو** کہلاتا ہے۔

## ۳۔ کسی تفاعل کے تفرقہ (Differential) کی تعریف

**تفاعل ما = ف (لا) کا تفرقہ، اس تفاعل کے مشتق اور متبوع متغیر کے اضافہ کا حاصل ضرب ہے۔**

ا کے تفرقہ کی تعبیر علامت ذما ( dy ) سے کی جاتی ہے۔

پس ذما = فَ (لا) مف لا

یعنے (باستثنار اس صورت کے جبکہ ف َ(لا) = ۰) تفرقہ تفاعل کے اضافہ کا صدر جز ہے۔

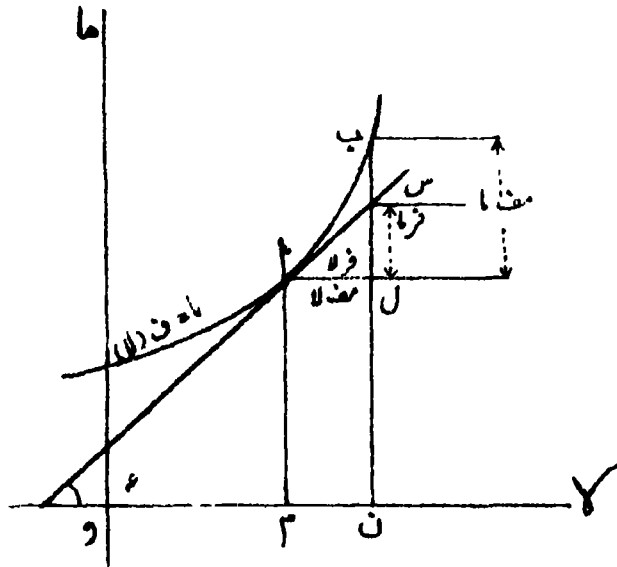
بلحاظِ تعریف، متبوع متغیر کا تفرقہ فرلا = $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ (لا) . مف لا = مف لا

اس لیے ما کے تفرقہ میں مف لا کے بجائے فرلا لکھا جا سکتا ہے یعنے

$$\text{فرما} = \text{ف}'\,(\text{لا})\ \text{فرلا}$$

## ۴۔ تفرقہ کی ہندسی تعبیر۔

شکل ۳۷ میں منحنی ما = ف (لا) پر نقطہ ۴ کے محدد لا، ما فرض کرو نقطہ ب منحنی پر ۴ کے قریب کا ایک نقطہ ہے اس کے محدد لا + مف لا، ما + مف ما ہونگے۔

شکل ۳۷

خط ا س منحنی کا نقطہ ا پر کا مماسی خط ہے جس کا زاویۂ میلان محور و لا کے ساتھ عہ ہے۔ ا ل محور و لا کے متوازی کھینچا گیا ہے۔
ا م = ما اور ب ن = ما + مف ما
ب ن خطِ مماس ا س کو نقطۂ س پر منقطع کرتا ہے۔
محدد ب ن کا قطعہ ل س تفرقہ فرما کو تعبیر کرتا ہے۔ کیونکہ
ل س = مس عہ مف لا = فَ (لا) فرلا = فرما
عموماً فرما اور مف ما غیر مساوی ہوتے ہیں بجز اس صورت کے جبکہ منحنی خطِ مستقیم ہو۔

**۵۔ متواتر یا بلند تر رتبہ کے تفرقے** فرما = فَ (لا) فرلا کا تفرقہ ما کا دوسرا تفرقہ کہلاتا ہے۔ اور علامت فر۲ ما سے اس کی تعبیر کی جاتی ہے۔ اس کی قیمت اس طرح حاصل ہوتی ہے۔

چونکہ فرما = فَ (لا) فرلا

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ [ فَ (لا) فرلا ] = فً (لا) فرلا

اس لیے کہ فرلا متغیر لا کا کوئی تفاعل نہیں ہے

∴ فر [ فرما ] = [ فً (لا) فرلا ] فرلا

یہ فرض کرکے کہ دونوں فرلا مساوی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے:

فر۲ ما = فً (لا) فرلا۲

دو سے بلند تر رتبہ کے تفرقے بھی اس کے مماثل طریقہ سے حاصل ہوتے ہیں۔ چنانچہ ما کا ن۔ واں تفرقہ

فرن ما = ف(ن) (لا) فرلان

مثال (۱) ما = $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ کا تفرقہ یعنے فرما دریافت کرو

$$\text{حل فرما} = \frac{(\text{و}^2-\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,۲\text{لا} - \frac{1}{2}(\text{و}^2-\text{لا}^2)^{-\frac{1}{2}}(-۲\,\text{لا})\,\text{لا}^2}{(\text{و}^2-\text{لا}^2)}$$

$$= \frac{۲\text{لا}(\text{و}^2-\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}} + \text{لا}^3(\text{و}^2-\text{لا}^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\text{و}^2-\text{لا}^2)}$$

$$= \frac{۲\text{لا}(\text{و}^2-\text{لا}^2) + \text{لا}^3}{(\text{و}^2-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{۲\text{و}^2\text{لا} - \text{لا}^3}{(\text{و}^2-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال (۲) مساوات $\text{ر}^2\,\text{جم طہ} - \text{و}^2\,\text{جب}\,۳\,\text{طہ} = ۰$ دی جاتی ہے فرر دریافت کرو۔

حل۔ عملِ تفرق سے $۲\,\text{ر فر ر جم طہ} - \text{ر}^2\,\text{جب طہ فرطہ} - ۳\,\text{و}^2\,\text{جم}\,۳\,\text{طہ فرطہ} = ۰$

یعنے $\text{فرر}\,(۲\,\text{ر جم طہ}) = (\text{ر}^2\,\text{جب طہ} + ۳\,\text{و}^2\,\text{جم}\,۳\,\text{طہ})\,\text{فرطہ}$

$$\therefore\ \text{فرر} = \frac{(\text{ر}^2\,\text{جب طہ} + ۳\,\text{و}^2\,\text{جم}\,۳\,\text{طہ})}{۲\,\text{ر جم طہ}}\,\text{فرطہ}$$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تفاعلوں کا پہلا تفرقہ دریافت کرو:

(۱) $\text{ما} = \frac{\sqrt{\text{و}^2-\text{لا}^2}}{\text{و}-\text{لا}}$　　جواب $\text{فرما} = \frac{\text{و فرلا}}{(\text{و}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}(\text{و}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}}$

(۲) $\text{ما} = \frac{\text{قطلا}}{\text{قطلا}+۱}$　　جواب $\text{فرما} = \frac{\text{قطلا مس لا فرلا}}{(\text{قطلا}+۱)^2}$

(۳) $\text{ما} = \text{مس}^{-1}(\text{لوک لا})$　　جواب $\text{فرما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(۱+\text{لوک}^2\,\text{لا})}$

(۴) $\text{ف}(\text{و}) = \text{و}^{\sqrt{\text{جب و}}}$　　جواب $\text{فرف}(\text{و}) = \text{و}^{\sqrt{\text{جب و}}}\left(\frac{\sqrt{\text{جب و}}}{\text{و}} + \frac{\text{جم و لوک و}}{۲\sqrt{\text{جب و}}}\right)\text{فرو}$

(۵) فہ (س) = (لوک س + ۱)^س جواب فرفہ (س) = (لوک س + ۱)^س [ ۱/(لوک س + ۱) + لوک (لوک س + ۱) ] فرس

(۶) مساوات لا^۲ + ۲ لا ما + ۲ ما^۲ = ۱۰ دی جاتی ہے۔ بتاؤ کہ

فرما = (لا + ما) فرلا / (لا + ۲ ما)

(۷) ما (۱ + مس لا) ـ جب لا = ۰ بتاؤ کہ فرما = (جم لا ـ ما قط^۲ لا)/(۱ + مس لا) فرلا

(۸) ر ـ ل قط^۲ (طہ/۲) = ۰ ثابت کرو کہ فرر = ل قط^۲ (طہ/۲) مس (طہ/۲) فرطہ

**۶۔ تفرقہ کا اطلاق بطور تقریبی قیمت** ۔ چونکہ تفرقہ تفاعل کے اضافہ کا صدر جزو ہے اس لیے وہ اضافہ کی تقریبی قیمت کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ تفرقہ کے اس طرح استعمال کرنے میں یہ فائدہ ہے کہ وہ عموماً اضافہ کی بہ نسبت زیادہ آسانی کے ساتھ دریافت ہو سکتا ہے اور اس کی تشکیل بھی زیادہ سادہ ہوتی ہے۔

مثال (۱) ما = لوک~و~ لا میں اگر لا کی قیمت ۵ سے بدل کر ۱ء۵ ہو جائے ما کا اضافہ دریافت کرو۔

حل: مف ما = لوک~و~ ۵ء۱ ـ لوک~و~ ۵ = لوک~و~ (۵ء۱/۵) = لوک~و~ ۱ء۰۲

= ۲ء۳۰ لوک~۱۰~ ۱ء۰۲ = ۲ء۳۰ × ۰۰۸۶ء۰ = ۰۱۹۸ء۰

اگر ما = لوک~و~ لا کا تفرقہ معلوم کیا جائے تو فرما = ۱/لا فرلا = ۱/۵ (۱ء۰) = ۰۲ء۰
جس سے ظاہر ہے کہ فرما اس مثال میں مف ما سے صرف بقدر ۱ فی صد بڑا ہے۔ مف لا کی کمتر قیمتوں کے مف ما اور فرما میں اس سے بھی زیادہ بہتر تقرب پایا جائیگا۔

مثال (۲)۔ ایک سادہ رقاص ایک گھنٹہ میں ۲ ثانیہ زیادہ کی خطا بتاتا ہے۔ اس کے طول میں کتنا فی صد اضافہ کرنا چاہیے تاکہ وہ صحیح وقت بتائے؟

حل۔ سادہ رقاص کے وقت دوران اہتزاز کا ضابطہ و = ۲π √(ل/ج) ہے

جس میں ل اس کا طول اور ج جاذبۂ ارض ہے۔

عملِ تفرق سے $\text{فرو} = \frac{\pi}{\sqrt{\text{ج ل}}}\,\text{فرل}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرو}}{\text{و}} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{فرل}}{\text{ل}}$$

چونکہ رقاص ایک کامل مدّتِ دوران کا $\frac{3}{60 \times 60} = \frac{1}{1200}$ حصہ بڑھ کرتا ہے

اس لیے $\frac{\text{فرو}}{\text{و}} = +\frac{1}{1200} = \frac{\text{فرل}}{2\,\text{ل}}$

$$\therefore \quad \text{فرل} = +\frac{\text{ل}}{600} = 0.0016\,\text{ل}$$

اس لیے رقاص کا طول بقدر ۰٫۱۶ فی صد بڑھایا جانا چاہیے۔

مثال (۳)۔ آواز کی رفتار ہوا میں تپش کے لحاظ سے حسب ضابطہ ذیل بدلتی ہے:

$\text{س}_{\text{ت}} = \text{س}_0 (1 + \text{عہ ت})^{\frac{1}{2}}$ جس میں $\text{س}_0$ اور $\text{س}_{\text{ت}}$ علی الترتیب صفر درجہ مئی اور ت درجہ مئی پر کی رفتاریں ہیں اور عہ ایک مستقل ہے۔

اگر ت کی پیمایش میں نصف فی صد کی خطا واقع ہو تو بتاؤ کہ رفتار میں تقریباً کیا فی صد خطا محسوب ہوگی۔

حل: $\text{س}_{\text{ت}} = \text{س}_0 (1 + \text{عہ ت})^{\frac{1}{2}}$ چونکہ $\text{س}_0$ اور عہ مستقل اعداد ہیں اس لیے عملِ تفرق سے

$$\text{فر س}_{\text{ت}} = \text{س}_0\,\frac{1}{2}\,(1 + \text{عہ ت})^{-\frac{1}{2}}\,\text{فر}(1 + \text{عہ ت})$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{س}_0\,(1 + \text{عہ ت})^{-\frac{1}{2}}\,\text{عہ فرت}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فر س}_{\text{ت}}}{\text{س}_{\text{ت}}} = \frac{\text{عہ فرت}}{2(1 + \text{عہ ت})}$$

چونکہ ت کی پیمایش میں نصف فیصد کی خطا ہے اس لیے فرت = $\frac{.005\,ت}{2}$

اور $\frac{فرکاٹ}{کاٹ} = \frac{عہ}{2(1+عہت)} \times \frac{ت}{200} = \frac{عہت}{400(1+عہت)}$

$\therefore$ فرکاٹ = $\frac{کاٹ}{100} \cdot \frac{عہت}{4(1+عہت)}$

یعنی $\frac{عہت}{4(1+عہت)}$ فی صد خطا واقع ہوگی۔

[واضح ہو کہ عہ کی قیمت $\frac{1}{273}$ ہے اس لیے

$\frac{عہت}{4(1+عہت)} = \frac{1}{4} \times \frac{ت}{273 + ت}$ یعنی

$\frac{1}{4} \cdot \frac{مئی تپش}{مطلق تپش}$ فی صد خطا واقع ہوگی۔]

# مثالیں

(۱) ۵ فٹ نصف قطر والے ایک کرہ کے قطر کی پیمایش میں ایک فی صد کی خطا اگر واقع ہوئی ہو تو بتاؤ حجم کی پیمایش میں فی الواقع کتنی فی صد خطا پیدا ہوتی ہے اور عملِ تفرق سے اس کی تقریبی قیمت کیا ہوگی۔

[جواب مف ح = ۳٫۰۳ فی صد
اور فرح = ۳ فی صد]

(۲) ایک رقاص والی گھڑیال دن بھر میں ۴ منٹ سست چلتی ہے۔ صحیح چلنے کے لیے اس کے 'طول' کو کتنا فی صد چھوٹا کرنے کی ضرورت ہوگی؟

[جواب ۰٫۵۶ فی صد]

(۳) تفاعل ف (لا) = لوک $\sqrt{\frac{3 + لا^2}{3 - لا^2}}$ میں اگر لا کی پیمایش میں ایک

قلیل مقدار فرلا کا سہو واقع ہو تو بتاؤ ف (لا) کی قیمت میں کیا سہو واقع ہوگا۔

[جواب  زف (لا) = $\frac{۱۳ \text{ فرلا}}{۳ (۳ لا + ۲)(۳ - ۲ لا)}$

(۴) ما = لا² + ۲ لا ما + ۴ ما² = ۸ ثابت کرو کہ

$$فرما = - \frac{(لا + ما) \text{ فرلا}}{لا + ۴ ما}$$

(۵) لا^{۲/۳} + ما^{۲/۳} = ا^{۲/۳} بتاؤ کہ فرما = - $\sqrt[۳]{\frac{ما}{لا}}$

(۶) جمودی سلاخ ( Inertia bar ) کے مروڑی اہتزازوں کے

وقتِ دَوران کا ضابطہ

$$و = ۲ \pi \sqrt{\frac{۲ \text{ مج ل}}{ا \pi \text{ ص}^۴}} \text{ ہے}$$

جس میں و = وقتِ دوران، مج = سلاخ کے جمود کا معیارِ اثر تار کے محور کے گرد، ل = تار کا طول　ا = تار کے مادّہ کی استواری کی شرح اور ص = تار کا نصف قطر

اگر پیمایش میں (۱) قطر کے ناپنے میں ایک فی صدی خطا ہو تو ثابت کرو کہ استواری کی محسوبہ قیمت میں ۴ فی صدی خطا پیدا ہوگی اور (۲) وقتِ دَوران کی تعیین میں ایک فی صدی خطا ہو تو استواری کی محسوبہ قیمت میں ۲ فی صدی خطا پیدا ہوگی۔

## ۷۔ علی القوائم محدّدوں میں قوس کے تفرّقہ کی تعیین

تعیین ۔ شکل ۳۸ میں قوس ا ف ق کا طول ایک معیّن نقطہ ا سے لے کر ف تک س ہے۔ اس کے اضافہ ( = قوس ف ق) کو مف س سے تعبیر کرو۔ فرض کیا جاتا ہے کہ

$$نہا \left( \frac{\text{وتر ف ق}}{\text{قوس ف ق}} \right) = ۱$$

[ بالفاظِ دیگر وتر ف ق اور اس کی متناظر قوس = مف س کے مابین مف س سے بلند تر رتبہ کے صغاریہ کا تفاوت ہے۔ ]

شکل ۳۔

شکل سے ظاہر ہے کہ

$$\text{وتر (ف ق)}^2 = (\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2$$

اس مساوات کے سیدھے جانب کے رکن کو (مف س)$^2$ سے ضرب و تقسیم کرو اور سیدھے اور بائیں دونوں ارکان کو (مف لا)$^2$ پر تقسیم کرو تو

$$\left(\frac{\text{وتر ف ق}}{\text{مف س}}\right)^2 \left(\frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^2$$

اب اگر نقطہ ق نقطہ ف سے انتہائی قریب ہو جاتا ہے تو مف لا ← ۰ اور

$$\left(\frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2$$

دونوں ارکان کو فر لا$^2$ سے ضرب دینے پر

$$\text{فر س}^2 = \text{فر لا}^2 + \text{فر ما}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اس کے بین اوپر والی مساوات کا جذرالمربع نکال کر اس کے دونوں ارکان کو فرس سے ضرب دینے سے

$$\text{فرس} = \left\{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

مساوات (۱) سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ

$$\text{فرس} = \left\{1 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرما} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

مساوات (۲) سے چونکہ $1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2} = 1 + \text{مس}^{2}\,\text{ٹہ} = \text{قط}^{2}\,\text{ٹہ}$

لہذا فرس = قط ٹہ فرلا (جذرالمربع کی مثبت علامت منتخب کر کے)۔

پس بآسانی ثابت ہو جاتا ہے کہ

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم ٹہ} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \text{جب ٹہ} \quad \ldots\ldots (4)$$

مثال۔ شکل ناقص $\text{ب}^{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ا}^{2}\,\text{ما}^{2} = \text{ا}^{2}\,\text{ب}^{2}$ کی قوس کا تفرقہ دریافت کرو۔

حل: لا کی رقموں میں

$$\text{فرس} = \left\{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

عمل تفرق سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$

$$\therefore \quad \text{فرس} = \left\{1 + \frac{\text{ب}^{4}\,\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{4}\,\text{ما}^{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

$$= \frac{\left\{\text{ا}^{2}(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}) + \text{ب}^{2}\,\text{لا}^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}}{\text{ا}\,(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}}$$

اسی طرح ما کی رقموں میں $\text{فرس} = \left\{1 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرما}$

$$\therefore \text{فرس} = \frac{\text{فرا}\left\{\text{ب}^2(\text{ب}^2 - \text{ما}^2) + \text{لا}^2\,\text{ما}^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\text{ب}\,(\text{ب}^2 - \text{ما}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

## ث - قطبی محدّدوں میں قوس کے تفرقہ کی تعیین -

چونکہ کسی بھی نقطہ کے کارتیسی اور قطبی محدّدوں میں رابطہ

$\text{لا} = \text{ر}\,\text{جم}\,\text{ط}$ اور $\text{ما} = \text{ر}\,\text{جب}\,\text{ط}$ ہے

$\text{فرلا} = \text{جم ط فرر} - \text{ر جب ط فرط}$ اور $\text{فرما} = \text{جب ط فرر} + \text{ر جم ط فرط}$

پس ت کی مساوات (۱) میں عمل تعویض، تحویل و جذر المربع سے

$$\text{فرس} = \sqrt{\text{فرر}^2 + \text{ر}^2\,\text{فرط}^2}$$

$$= \left\{\text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرط}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\text{فرط}$$

{نوٹ - ت اور ث کے ضابطوں کو یاد رکھنے کے لیے ذیل کی دو شکلوں سے مدد لی جا سکتی ہے -

شکل (ا) میں فرس ایک قائم الزاویہ مثلث کا وتر ہے جس کے ضلعے فرلا اور فرما ہیں اور فرما کے مقابل کا زاویہ ٹہ ہے - اس میں $\text{فرس} = \left\{(\text{فرلا})^2 + (\text{فرما})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

اور $\text{جم ٹہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$ اور $\text{جب ٹہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$

شکل (ب)　　　شکل (ا)

شکل (ب) میں فرس ایک قائم الزاویہ مثلث کا وتر ہے جس کے ضلعے فرر

اور س فرطہ ہیں ۔

اس میں فرس $= \{ (\text{س فرطہ})^2 + (\text{فرس})^2 \}^{\frac{1}{2}}$

فرس اور فرس کے درمیانی زاویہ کو ہپ سے تعبیر کرنے سے

$$\text{مس ہپ} = \text{س} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{س}}{\text{سَ}} \quad \text{جبکہ سَ} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} \Big]$$

**مثال** ۔ خط تدویر $\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{ا} (\text{طہ} - \text{جب طہ}) \\ \text{ما} = \text{ا} (\text{۱} - \text{جم طہ}) \end{array} \right\}$ کے لیے طہ اور فرطہ کی رقموں میں قوس کا تفرقہ دریافت کرو ۔

**حل** ۔ عملِ تفرق سے فرلا $=$ ا(۱ ـ جم طہ) فرطہ ، فرطہ $=$ ا جب طہ فرطہ

پس $\text{فرس}^2 = \text{ا}^2 (\text{۱} - \text{جم طہ})^2 \text{فرطہ}^2 + \text{ا}^2 \text{جب}^2 \text{طہ فرطہ}^2 = \text{۲} \text{ا}^2 (\text{۱} - \text{جم طہ}) \text{فرطہ}^2$

لیکن $(\text{۱} - \text{جم طہ}) = \text{۲ جب}^2 \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{طہ}$ پس فرس $= \text{۲ ا جب} \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ طہ فرط

# مثالیں

ذیل کے منحنیوں کے لیے لا اور فرلا کی رقموں میں فرس معلوم کرو :-

(۱) $\text{ما} = \text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج}$ 　[جواب فرس $= (\text{۱} + \text{ب}^2 + \text{۴ ا ب لا} + \text{۴ ا}^2 \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}$ فرلا

(۲) ما $=$ لوگ قط لا 　[جواب فرس $=$ قط لا فرلا

ذیل کے منحنیوں کے لیے ما اور فرلا کی رقموں میں فرس کی تعیین کرو :-

(۳) $\text{ما}^2 = \text{۴ ا لا}$ 　[جواب فرس $= \frac{(\text{ما}^2 + \text{۴ ا}^2)^{\frac{1}{2}} \text{فرما}}{\text{۲ ا}}$

(۴) $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ 　[جواب فرس $= \sqrt[3]{\frac{\text{ا}}{\text{ما}}}$ فرما

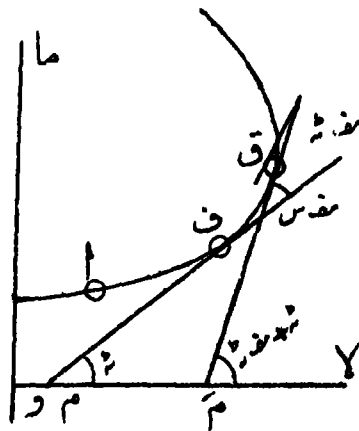
منحنیاں ذیل کے لیے طہ اور فرطہ کی رقموں میں فرس دریافت کرو :-

(۵) س $=$ ۵ جم طہ ـ ۱۲ جب طہ 　[جواب فرس $=$ ۱۳ فرطہ

(۶) س $=$ ۲ ـ ۳ جب طہ 　[جواب فرس $= (\text{۱۳} - \text{۱۲ جب طہ})^{\frac{1}{2}}$ فرطہ

## انحناء، نصف قطر انحناء اور دائرۂ انحناء

**۱۔ انحناء۔** چھٹے باب میں ہم نے منحنی کے مڑنے کی سمت کا ذکر کیا ہے۔ کسی نقطہ کے پاس منحنی کی شکل اس کے مڑنے یا تبدیلی سمت کی شرح کے تابع ہوتی ہے۔ ریاضی کی اصطلاح میں منحنی کے کسی نقطہ پر کی شرح تبدیلی سمت کو اس نقطہ پر کا انحناء کہتے ہیں۔ ہم اس کو اسے تعبیر کرینگے اور یہاں اس کے لیے ایک جملہ حاصل کرینگے۔

شکل ۳۹ میں منحنی ا ف ق پر نقطہ ف کے قریب ق ایک دوسرا نقطہ ہے

شکل ۳۹

اس منحنی کے خطِ مماس کا نقطۂ تماس جب ف سے بدل کر ق ہوتا ہے یعنے قوس ف ق (= مف س) طے کرتا ہے تو خطِ مماس زاویہ مف ٹہ میں گھوم جاتا ہے۔ یعنے مف ٹہ = خطِ مماس کے زاویۂ میلان کی تبدیلی۔

پس ہم قوس ف ق کے اوسط انحناء کو $\frac{مف\ ٹہ}{مف\ س}$ سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ اور اس لیے کسی نقطہ ف پر کا انحناء (ن) اس کے اوسط انحناء کی انتہائی قیمت ہے جبکہ فَ بالآخر ف کے انتہائی قریب پہنچ جاتا ہے

$$\therefore ن = نہا_{مف\ س \to} \frac{مف\ ٹہ}{مف\ س} = \frac{فر\ ٹہ}{فر\ س} = \text{منحنی کا نقطہ ف پر کا انحناء} \quad \ldots (۱)$$

پس انحناء سے مراد زاویۂ میلان کی بلحاظ قوس شرح تبدیلی ہے۔ چونکہ زاویہ مف ٹہ نیم قطروں میں ناپا جاتا ہے اور قوس مف س طول کی اکائیوں میں اس لیے کسی نقطہ پر کے انحناء کی اکائی ایک نیم قطری فی اکائی طول ہے۔

## ۲۔ دائرہ کا انحناء۔

دائرہ کے کسی نقطہ پر بھی اس کا انحناء نصف قطر کا متکافی ہے اور اس لیے تمام نقطوں پر اس کی ایک ہی قیمت ہوتی ہے۔

شکل ۵۰ سے واضح ہے کہ نقاط ف اور ق پر کے مماسی خطوں کا درمیانی زاویہ مف ٹہ دائرہ کے مرکز م پر کے زاویہ ف م ق کے مساوی ہے جو نصف قطروں م ف اور م ق کے مابین واقع ہے

$$\text{پس}\ \frac{مف\ ٹہ}{مف\ س} = \frac{\text{زاویہ ف م ق}}{مف\ س} = \frac{\frac{مف\ س}{ص}}{مف\ س} = \frac{۱}{ص}$$

(جس میں ص = دائرہ کا نصف قطر) اس لیے کہ زاویہ ف م ق کی نیم قطریوں میں پیمایش ہوتی ہے۔

اس کے یہ معنے ہیں کہ قوس ف ق کا اوسط انحناء ایک مستقل مقدار ہے۔

شکل نمبر ۴۷

اب فرض کرو مف س ← ۰

$$\text{تب}\qquad \frac{\text{فر ٹہ}}{\text{فر س}} = \frac{1}{\text{ص}}$$

چونکہ خطِ مستقیم کا میلان کہیں نہیں بدلتا ہے اس لیے اس کا انحناء سب جگہ صفر ہوتا ہے۔

## ۳۔ انحنا کے لیے ضابطہ۔ علی القوائم محدّدوں کی رقموں میں۔

$$\text{انحناء ن} = \underset{\text{مف س}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ٹہ}}{\text{مف س}} = \underset{\text{مف س}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ٹ}}{\sqrt{\text{مف لا}^2 + \text{مف ما}^2}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\frac{\text{مف ٹ}}{\text{مف لا}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^2}}$$

نیا $\frac{\text{مف ٹہ}}{\text{مف لا}}$ کے لیے ایک آسان جملہ اس طرح حاصل ہو سکتا ہے :

چونکہ مس ٹہ = $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اس لیے ٹہ = مس$^{-1}$ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فر ٹہ}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}}{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}$$

$$\text{پس ن} = \frac{\frac{\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}}{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}} = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\text{مًا}}{\left\{1 + (\text{مَا})^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نوٹ :۔ اگر دیے ہوئے جملہ میں تفرق بلحاظ ما آسان تر ہو تو انحنا، کو لَا اور لًا (یعنے لا کے بلحاظ ما پہلے اور دوسرے مشتق) کی رقموں میں ظاہر کیا جا سکتا ہے ۔ ایسی صورت میں

$$\text{ن} = \frac{-\text{لًا}}{\left\{1 + (\text{لَا})^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اس لیے کہ ٹہ = مم$^{-1}$ $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فر ٹہ}}{\text{فر ما}} = - \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ لا}}{\text{فر ما}^2}}{1 + \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^2}$$

یہاں یہ بات بھی یاد رکھنے کے قابل ہے کہ مساوات (۱) سے کام نہیں لیا جا سکتا

جبکہ مَا نا متناہی ہوتا ہے یعنے جبکہ نقطہ ف پر کا خطِ مماس انتصابی ہوتا ہے۔ ایسی حالت میں مساوات (۲) میں لاَ = ۰ اور ن = - لاً

ر کی جبری علامت کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مساوات (۱) میں نسب نما کی مثبت علامت منتخب کرنے سے ن اور مَاً کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ پس ن کی علامت مثبت ہوتی ہے جبکہ منحنی اوپر کی جانب مقعر ہوتا ہے اور یہ علامت منفی ہوتی ہے جبکہ منحنی نیچے کی جانب مقعر ہوتا ہے۔

**توضیحی مثال**۔ خطِ تدویر {لا = ا (طہ - جب طہ)، ما = ا (۱ - جم طہ)} کا انحناء دریافت کرو۔

حل: $\text{مَا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ - جم طہ}}$

پس $\text{۱} + (\text{مَا})^{\text{۲}} = \frac{\text{۲}}{\text{۱ - جم طہ}}$

اور $\text{مَاً} = \frac{\text{فر}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ - جم طہ}}\right)}{\text{فرطہ}} = -\frac{\text{۱}}{\text{ا(۱ - جم طہ)}^{\text{۲}}}$

$\therefore \text{ن} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}\,\text{ا}\sqrt{\text{۲ - ۲ جم طہ}}} = -\frac{\text{۱}}{\text{۴ ا جب}\,\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{طہ}}$

## ۴۔ انحناء کے لیے ضابطہ قطبی محدّدوں کی رقموں میں۔

ساتویں باب میں قطبی مساوات کے ضمن میں شکل ۲۳ بنایا گیا ہے کہ

$$\text{ثہ} = \text{طہ} + \text{پہ}$$

پس $\frac{\text{فرثہ}}{\text{فرطہ}} = \text{۱} + \frac{\text{فرپہ}}{\text{فرطہ}}$ ․․․․․․․․․․ (۱)

معہذا $\text{پ} = \text{ستا}^{-1} \frac{\text{صَ}}{\text{سَ}}$ (جس میں $\text{سَ} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر طہ}}$)

اس لیے $\frac{\text{فر پ}}{\text{فر طہ}} = \frac{\text{سَ صً} - (\text{سَ})^2}{(\text{سَ})^2 + \text{صَ}^2}$

پس مساوات (۱) کی رو سے $\frac{\text{فر ثہ}}{\text{فر طہ}} = \frac{\text{صَ}^2 + 2(\text{سَ})^2 - \text{صَ سً}}{\text{صَ}^2 + (\text{سَ})^2}$ ... (۲)

لہذا سابقہ باب کی فصل (   ) کی مساوات (   ) سے

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر طہ}} = \left\{ \text{صَ}^2 + (\text{سَ})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (۳)$$

مساوات (۲) اور مساوات (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{انحناء ن} = \frac{\text{صَ}^2 + 2(\text{سَ})^2 - \text{سَ سً}}{\left\{ \text{صَ}^2 + (\text{سَ})^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

## توضیحی مثال - مرمی (projectile) کی مساواتیں

$\text{لا} = \text{ر}(\text{جم عہ})\,\text{و}$ اور $\text{ما} = \text{ر}(\text{جب عہ})\,\text{و} - \frac{1}{2}\,\text{ج و}^2$ ہیں جن میں ر ابتدائی رفتار ہے، عہ اس ابتدائی رفتار کا اُفق کے ساتھ زاویۂ میلان، و وقت اور ج جاذبہ زمین ہے۔ اس کے بلند ترین نقطہ کے پاس منحنی کا انحناء دریافت کرو۔

حل: $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} = \text{ر جم عہ}$، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} = \text{ر جب عہ} - \text{ج و}$

ما کی قیمت اعظم ہوتی ہے جہاں پر کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} = 0$ یعنے جبکہ $\text{و} = \frac{\text{ر جب عہ}}{\text{ج}}$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}} = \frac{\text{ر جب عہ} - \text{ج و}}{\text{ر جم عہ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \frac{\frac{\text{فر}}{\text{فر و}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}}$$

$$= -\frac{\text{ج}}{\text{ر}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}$$

$$\therefore\ \text{انحناء ن} = \frac{\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1+\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\text{ج}}{\text{ر}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}}{\left\{1+\frac{\text{ر}^2\text{جب}^2\text{عہ} - 2\,\text{ر ج}(\text{جب عہ})\text{و} + \text{ج}^2\ \text{و}^2}{\text{ر}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-\text{ج ر جم عہ}}{(\text{ر}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ر}^2\ \text{جم}^2\ \text{عہ}}$$

**۵۔ نصف قطرِ انحناء۔ تعریف۔** منحنی کے کسی نقطہ کے نصف قطرِ انحناء سے مراد اس نقطہ پر کے انحناء کا متکافی ہے۔

$$\text{یعنی ص} = \frac{1}{\text{ن}} = \frac{\{1+(\text{ما}')^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{ما}''} \quad \dots\dots (1)$$

**توضیحی مثال۔** زنجیرہ کی کارتیسی مساوات $\text{ما} = \frac{\text{ل}}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)$ دیجاتی ہے۔ اس کے کسی بھی نقطہ کے نصف قطرِ انحناء کے لیے ایک ضابطہ حاصل کرو اور بتاؤ کہ اس کے سب سے نیچے کے نقطہ پر نصف قطرِ انحناء کی قیمت ل ہے۔

**حل:** $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}' = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)$ اور $\text{ما}'' = \frac{1}{2\text{ل}}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)$

$$= \frac{\text{ما}}{\text{ل}^2}$$

$$\therefore\ 1+(\text{ما}')^2 = 1+\frac{1}{4}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)^2 = \frac{\text{ما}^2}{\text{ل}^2}$$

$$\therefore\ \text{ص} = \frac{\frac{\text{ما}^3}{\text{ل}^3}}{\frac{\text{ما}}{\text{ل}^2}} = \frac{\text{ما}^2}{\text{ل}}$$

زنجیرہ کے سب سے نیچے کے نقطہ پر ما کی قیمت اقل ہے اور اس لیے

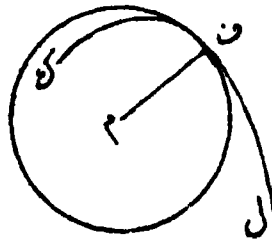
$$\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} \quad \text{یعنے} \quad \text{مَا} = \text{صفر}$$

اس کے لیے $\text{و}^{\text{لا}} = \text{و}^{-\text{لا}}$ یہ اس صورت میں ہوسکتا ہے جبکہ لا = صفر

اس نقطہ پر ما کی قیمت $= \frac{\text{ل}}{۲}(۱+۱) = \text{ل}$

پس یہاں $\text{ص} = \frac{\text{ل}^۲}{\text{ل}} = \text{ل}$

**۶۔ دائرۂ انحناء** ۔ شکل ۱۲ میں منحنی ک ف ل کے کسی نقطہ ف پر غور کرو۔ ف پر منحنی کے مماسی خط کا ڈھلان وہی ہے جو اس نقطہ پر خود منحنی کا ڈھلان ہے۔

شکل ۱۲

(۱ چھٹا باب)۔ اسی طرح ہم منحنی کے ہر نقطہ کے لیے ایک مماسی دائرہ تیار کر سکتے ہیں جس کا انحناء وہی ہے جو اس نقطہ پر منحنی کا انحناء ہے۔ اس مقصد کے لیے حسب ذیل عمل کیا جائے:

نقطہ ف پر منحنی کا ایک عماد منحنی کے مقعر جانب کھینچو۔ اور اس عماد پر فاصلہ ف م نقطہ ف پر سے نصف قطر انحناء (= ص) کے مساوی ناپو۔ م کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو نقطہ ف میں سے گزرے۔ اس دائرہ کا انحناء $\text{ن} = \frac{۱}{\text{ص}}$

جو خود منحنی کے خود نقطہ ف پر کے انحناء کے مساوی ہے۔ اس طرح جو دائرہ تیار کیا جاتا ہے منحنی کے نقطہ ف پر کا دائرۂ انحناء کہلاتا ہے۔

علی العموم منحنی کے کسی نقطہ پر کا دائرہ انحناء اس نقطہ پر منحنی کو عبور کریگا۔ چنانچہ شکل ۱۲۱ میں اس کی توضیح کی گئی ہے۔ چھٹے باب میں نقطۂ عطف پر کے مماسی خط کا جو ذکر آیا ہے اس سے مقابلہ کیا جائے۔

جیسے کہ نقطہ ف پر کا مماسی خط منحنی کے اس نقطہ پر کی سمت کو ظاہر کرتا ہے اسی طرح ف پر کا دائرۂ انحناء منحنی کے اس نقطہ پر کے انحناء کا ہندسی تخیل قائم کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے۔ اس لیے کہ منحنی اور دائرہ کے سمت کی تبدیلی کی شرح دونوں ف پر ایک ہی ہیں۔

آگے چل کر ہم دائرۂ انحناء کی اس طرح تعریف کرینگے کہ وہ ایک قاطع دائرہ کی انتہائی وضع ہے۔ یہ تعریف خطِ مماس کی تعریف کے مشابہ ہے جو متذکرۂ بالا باب میں کی گئی ہے۔

**توضیحی مثال۔** منحنی $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ کے نقطہ (۰، ب) پر کا نصف قطر انحناء دریافت کرو۔ منحنی کو مرتسم کرو اور نقطۂ مذکور پر کا دائرہ انحناء کھینچو۔

**حل:**

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{3(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\,\text{لا}\,\text{ما}^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = -\frac{3(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\left\{\text{ما}^{\frac{1}{3}} + \frac{\text{لا}}{3}\,\frac{1}{\text{ما}^{\frac{2}{3}}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right\}$$

$$= -\frac{3(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\left(\text{ما}^{\frac{1}{3}} - \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ما}^{\frac{1}{3}}}\,\frac{(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\right)$$

نقطہ (۰، ب) پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$ اور $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = -\frac{3\,\text{ب}}{\text{ا}^{2}}$

پس $\text{ص} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}} = -\frac{1}{\frac{3\,\text{ب}}{\text{ا}^{2}}} = -\frac{\text{ا}^{2}}{3\,\text{ب}}.$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل منحنیوں کے مصرحہ نقطوں پر کے نصف قطر انحنا دریافت کرو۔ اور ان منحنیوں کو مرتسم کرکے ان کے متناظر دائرہ انحنا تیار کرو:۔

(۱) قطع ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ (ا، ۰) پر

جواب $ص = \frac{ب^2}{ا}$

(۲) قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ (ا، ۰) پر

جواب $ص = \frac{ب^2}{ا}$

(۳) تساوی الاضلاع (equilateral) خط زائد لا ما = ۱۲ کے نقطہ (۳، ۴) پر

جواب $ص = \frac{۵}{۲۴}$ ۵

ذیل کے منحنیوں کے کسی بھی نقطہ (لا، ما) پر کا نصف قطر انحنا محسوب کرو:۔

(۴) $لا^{\frac{1}{2}} + ما^{\frac{1}{2}} = ا^{\frac{1}{2}}$ جواب $ص = \frac{۲(لا+ما)^{\frac{3}{2}}}{ا^{\frac{1}{2}}}$

(۵) ما = لوگ قط لا جواب ص = قط لا

ثابت کرو کہ:۔

(۶) خط صنوبری $س = ا (۱ - جم طہ)$ کے کسی بھی نقطہ $(س_1، طہ_1)$ پر کا

$$نصف قطر انحنا = \frac{۲}{۳} \sqrt{۲ ا س_1}$$

(۷) لیمنسکیٹ یا چشمہ منحنی $س^2 = ا^2 جم ۲ طہ$ کے نقطہ $(س_1، طہ_1)$ پر کا

$$نصف قطر انحنا = \frac{ا^2}{۳ س_1}$$

(۸) منحنی $س = ا جب^3 \frac{طہ}{۳}$ کے نقطہ $(س_1، طہ_1)$ کے لیے ص کی

قیمت $\frac{۳}{۴} ا جب^2 \frac{طہ_1}{۳}$ ہے۔

۷۔ **مرکز انحناء** ۔ منحنی کے کسی نقطہ ف پر کے مماسی خط کے محدد لا، ما اور پہلے مشتق مَا کی قیمتیں وہی ہوتی ہیں جو منحنی کے لیے ہوتی ہیں۔ اسی طرح منحنی کے نقطہ ف پر کے دائرۂ انحناء کے محدد لا، ما اور پہلے اور دوسرے مشتق مَا اور مًا کی قیمتیں بھی وہی ہوتی ہیں جو منحنی کے لیے ہیں۔ پس ہم کسی منحنی پر کے نقطہ ف (محدد لا، ما) کے متعلقہ مرکز انحناء (محدد عہ، بہ) کی اس طرح تعریف کرسکتے ہیں کہ وہ منحنی کے اس نقطہ پر کے دائرۂ انحناء کا مرکز ہے۔

منحنی کے کسی نقطہ ف (محدد لا، ما) کے متعلقہ مرکز انحنا کے محددوں (عہ، بہ) کی تعیین۔

چونکہ دائرۂ انحنا کی مساوات $(\text{لا}-\text{عہ})^2 + (\text{ما}-\text{بہ})^2 = \text{ص}^2$ .... (۱) ہے

پس اس مساوات کے پہلے تفرق سے $\text{ما}' = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ما}-\text{بہ}}$

اور اس کے دوسرے تفرق سے $\text{ما}'' = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = -\frac{\text{ص}^2}{(\text{ما}-\text{بہ})^3}$ .... (۲)

ص کی قیمت یعنے $\frac{\{1+(\text{ما}')^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{ما}''}$ تعویض کرنے سے مساوات

$(\text{ما}-\text{بہ})^3 = -\frac{\{1+(\text{ما}')^2\}^3}{(\text{ما}'')^3}$ حاصل ہوتی ہے۔

$\therefore \text{ما}-\text{بہ} = -\frac{1+(\text{ما}')^2}{\text{ما}''}$ .......... (۳)

پس (۲) کی پہلی مساوات اور مساوات (۳) کی مدد سے

$\text{لا}-\text{عہ} = -\text{ما}'(\text{ما}-\text{بہ}) = \frac{\text{ما}'\{1+(\text{ما}')^2\}}{\text{ما}''}$

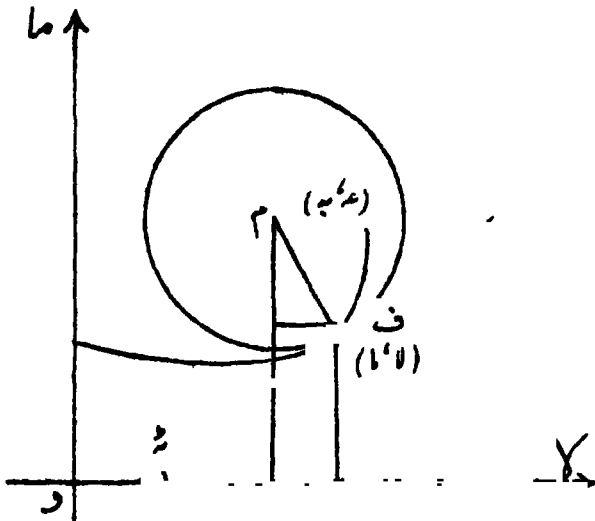
$\therefore \text{عہ} = \text{لا} - \frac{\text{ما}'\{1+(\text{ما}')^2\}}{\text{ما}''}$ اور $\text{بہ} = \text{ما} + \frac{1+(\text{ما}')^2}{\text{ما}''}$ .... (۴)

نوٹ (۱)۔ یہی نتائج ہم شکل ۴۲ کی مدد سے بھی آسانی حاصل کر سکتے ہیں۔ اس لیے کہ

عہ = لا ـ ص جب ٹہ } جن میں ٹہ = زاویہ جو ف پر کا مماسی خط محور لا
اور یہ = ما + ص جم ٹہ } کے ساتھ بناتا ہے۔ اور ص نصف قطرِ انحنائ ہے

$$\text{جب ٹہ} = \frac{\text{مَا}}{\{1 + (\text{مَا})^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad \text{اور جم ٹہ} = \frac{1}{\{1 + (\text{مَا})^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

[ملاحظہ ہو سابقہ باب کا آخری حصہ قط$^2$ ٹہ = ۱ + مس$^2$ ٹہ اور قم$^2$ ٹہ = ۱ + ځم$^2$ ٹہ کی مدد سے بھی یہ ضابطے فوراً حاصل کر لیے جا سکتے ہیں۔]

$$\text{لہذا}\quad \text{عہ} = \text{لا} - \frac{\{1 + (\text{مَا})^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{مًا}} \times \frac{\text{مَا}}{\{1 + (\text{مَا})^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \text{لا} - \frac{\text{مَا}\{1 + (\text{مَا})^2\}}{\text{مًا}}$$



شکل ۴۲

اسی طرح $\text{ب} = \text{ما} + \frac{\{1+(\text{ماَ})^2\}}{\text{ماً}}$

نوٹ (۳)۔اگر لاَ اور لاً علی الترتیب لا کے بلحاظ ما پہلے اور دوسرے مشتق ہوں تو

$$\left.\begin{aligned} \text{ع} &= \text{لا} + \frac{\{1+(\text{لاَ})^2\}}{\text{لاً}} \\ \text{اور}\quad \text{ب} &= \text{ما} - \frac{\{1+(\text{لاَ})^2\}\text{لاَ}}{\text{لاً}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{۵})$$

چونکہ $\text{ع} = \text{لا} - \text{ص جب ثہ}$ اور $\text{ب} = \text{ما} + \text{ص جم ثہ}$

اور $\text{جب ثہ} = \frac{1}{\{1+(\text{لاَ})\}^{\frac{1}{2}}}$ اور $\text{جم ثہ} = \frac{\text{لاَ}}{\{1+(\text{لاَ})^2\}^{\frac{1}{2}}}$

معہذا جیسا کہ قبل ازیں ثابت کیا جا چکا ہے (ملاحظہ ہو مساوات ۲ صفحہ ۱۵۷)

$$\text{ص} = -\frac{\{1+(\text{لاَ})^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{لاً}}$$

اس لیے $\text{ع} = \text{لا} - \text{ص جب ثہ} = \text{لا} + \frac{\{1+(\text{لاَ})^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{لاً}} \times \frac{1}{\{1+(\text{لاَ})^2\}^{\frac{1}{2}}}$

$$= \text{لا} + \frac{\{1+(\text{لاَ})^2\}}{\text{لاً}}$$

اسی طرح $\text{ب} = \text{ما} + \text{ص جم ثہ} = \text{ما} - \frac{\{1+(\text{لاَ})^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{لاً}} \cdot \frac{\text{لاَ}}{\{1+(\text{لاَ})^2\}^{\frac{3}{2}}}$

$$= \text{ما} - \frac{\{1+(\text{لاَ})^2\}\text{لاَ}}{\text{لاً}}$$

واضح ہو کہ مساواتیں (۵) اُس صورت میں کارآمد ہوتی ہیں جبکہ ماَ کی قیمت

ناممتناہی ہو جاتی ہے یا کہ تفرق بلحاظ ما آسان تر ہوتا ہے۔

**توضیحی مثال۔** خطِ زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے کسی بھی نقطہ (لا، ما) کے متعلقہ مرکزِ انحنا کے محدد (عہ، بہ) دریافت کرو۔

**حل:** $عہ = لا - \frac{ما'\{۱+(ما')^2\}}{ما''} = \frac{لا\,ما'' - ما' - (ما')^3}{ما''}$

عملِ تفرق سے $ما' = \frac{ب^2 لا}{ا^2 ما}$ اور $ما'' = -\frac{ب^4}{ا^2 ما^3}$

$$\therefore عہ = \frac{\frac{ب^4 لا}{ا^2 ما^3} + \frac{ب^2 لا}{ا^2 ما} + \frac{ب^6 لا^3}{ا^6 ما^3}}{\frac{ب^4}{ا^2 ما^3}}$$

$$= \frac{لا(ا^4 ب^4 + ا^4 ب^2 ما^2 + ب^6 لا^2)}{ا^4 ب^4} \times \frac{\frac{۱}{ما^3}}{\frac{۱}{ما^3}}$$

$$= \frac{لا ب^2(ا^2 ب^2 + ا^2 ما^2 + ب^4 لا^2)}{ا^4 ب^4}$$ جبکہ ما صفر نہیں ہے

$$= \frac{لا\{ا^2 ب^2 + ا^2(ب^2 لا^2 - ا^2 ب^2) + ب^4 لا^2\}}{ا^4 ب^2} = \frac{لا(ا^2 + ب^2) ب^2 لا^2}{ا^4 ب^2}$$

$$= \frac{لا^3(ا^2 + ب^2)}{ا^4}$$

$$بہ = ما + \frac{\{۱+(ما')^2\}}{ما''} = \frac{ما\,ما'' + ۱ + (ما')^2}{ما''}$$

$$= \frac{-\frac{ب^4}{ا^2 ما^2} + ۱ + \frac{ب^4 لا^2}{ا^4 ما^2}}{-\frac{ب^4}{ا^2 ما^3}} = \frac{ما(ا^2 ب^4 - ا^4 ما^2 - ب^4 لا^2)}{ا^2 ب^4}$$

$$= \frac{ما\{ا^2 ب^4 - ا^4 ما^2 - ب^2(ا^2 ب^2 + ا^2 ما^2)\}}{ا^2 ب^4} = -\frac{ما^3(ا^2 + ب^2)}{ب^4}$$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل منحنیوں کے مصرحہ نقطوں سے متعلق مرکزِ انحناء کے محدد معلوم کرو:

(۱) $۳\,\text{ما} = \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} - ۹\,\text{لا}$ نقطہ (۳، −۹) پر    جواب ۳، $-۸\frac{۳}{۴}$

(۲) ما = جب لا نقطہ ($\frac{\pi}{۲}$ ، ۱) پر    جواب $\frac{\pi}{۲}$ ، ۰

(۳) $\text{لا}^{۳} + \text{ما}^{۳} - ۴\,\text{لا ما} = ۰$ نقطہ (۲، ۲) پر    جواب $۱\frac{۳}{۴}$ ، $۱\frac{۳}{۴}$

(۴) خطِ مکافی $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا لا}$ کے کسی نقطہ سے متعلق مرکزِ انحناء دریافت کرو اور بتاؤ کہ اس کے راس پر انحناء اعظم ہے۔    جواب $۳\,\text{لا} + ۲\,\text{ا}$ ، $-\frac{\text{ما}^{۳}}{۴\,\text{ا}^{۲}}$

ثابت کرو کہ

(۵) منحنی $\text{ما} = \text{لا}^{۳}$ کے کسی نقطہ کے مرکزِ انحناء کے لیے $\text{عہ} = \frac{\text{لا} - ۹\,\text{لا}^{۵}}{۲}$ ، $\text{بہ} = \frac{۱ + ۱۵\,\text{لا}^{۴}}{۶\,\text{لا}}$ ہے۔

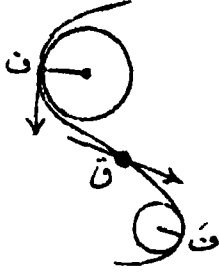
(۶) $\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + \text{ما}^{\frac{۲}{۳}} = \text{ا}^{\frac{۲}{۳}}$ کے کسی نقطے کے مرکزِ انحناء کے محدد $\text{لا} + ۳\,\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}\,\text{ما}^{\frac{۲}{۳}}$ اور $\text{ما} + ۳\,\text{لا}^{\frac{۲}{۳}}\,\text{ما}^{\frac{۱}{۳}}$ ہیں۔

**نوٹ۔** چھٹے باب کے حصہ (الف) میں بتایا گیا ہے کہ نقطہ عطف مثلاً شکل ۴۳ کے نقطہ ق پر $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۰$ ۔ اور چونکہ

انحناء $\text{ن} = \frac{\text{ما}''}{\{۱+(\text{ما}')^{۲}\}^{\frac{۳}{۲}}}$ اور نصف قطر انحناء $\text{ص} = \frac{۱}{\text{ن}} = \frac{\{۱+(\text{ما}')^{۲}\}^{\frac{۳}{۲}}}{\text{ما}''}$

اور مرکزِ انحناء کے محدد $\text{عہ} = \text{لا} - \frac{\text{ما}'\{۱+(\text{ما}')^{۲}\}}{\text{ما}''}$ ، $\text{بہ} = \text{ما} + \frac{\{۱+(\text{ما}')^{۲}\}}{\text{ما}''}$ ہیں

پس واضح ہے کہ عام طور پر عہ، بہ اور ص بغیر انتہا کے بڑھتے جاتے ہیں

جیسے جیسے منحنی کی مساوات میں تفاعل ما کا دوسرا مشتق بلحاظ لا صفر کے قریب ہوتا جاتا ہے، الّا اس صورت کے کہ مماسی خط انتصابی ہو۔ یعنے اگر ہم فرض کریں کہ شکل ۴۳ میں نقطہ ف مع اس کے مماسی خط کے منحنی پر سے گزرتا ہوا نقطہ فَ کو جاتا ہے تو نقطۂ عطف ق پر منحنی کا انحناء صفر ہوتا ہے، مماسی خط کا گھماؤ موقتاً رک جاتا ہے اور پھر جیسے ہی گھماؤ کی سمت بدلتی ہے، مرکزِ انحناء بغیر انتہا دور ہٹ جاتا ہے اور نصف قطرِ انحناء نامتناہی ہو جاتا ہے۔

ف ق فَ

شکل ۴۳

# دسواں باب

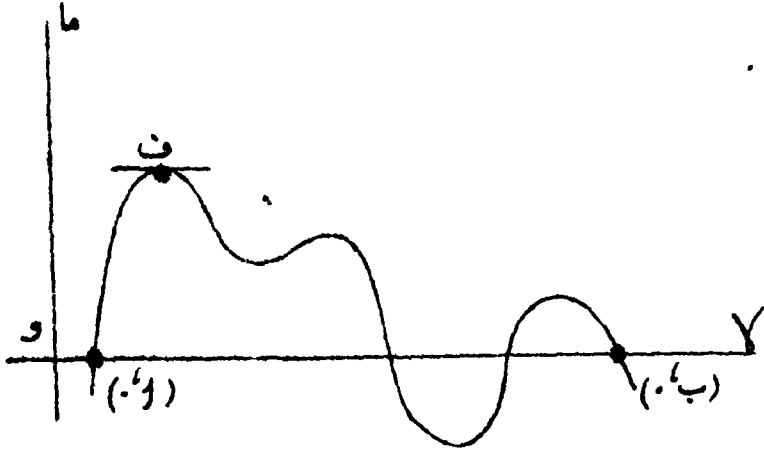
## اوسط قیمت کا مسئلہ اور اس کے اطلاقات

۱۔ احصار کے اساسی مسائل میں سے ایک مسئلہ رول (Rolle) کے نام سے منسوب ہے۔ ہم اس کو یہاں مختصراً بیان کیے دیتے ہیں تاکہ اس کی مدد سے چند مفید نتائج اخذ کیے جا سکیں۔

فرض کرو ا = ف (لا) ایک مسلسل وحید القیمت تفاعل لا ہے جو لا = ا اور لا = ب پر منعدم ہوتا ہے۔ نیز یہ بھی فرض کرو کہ ما کا مشتق فَ (لا) مسلسل ہے۔ ایسی صورت میں یہ تفاعل ترسیماً شکل ۴۴ کی طرح ایک مسلسل منحنی کے ذریعہ تعبیر کیا جا سکیگا۔ اس کے ملاحظہ سے واضح ہوگا کہ ا اور ب کے مابین لا کی کم از کم ایک قیمت پر منحنی کا مماسی خط محور لا کے متوازی ہے۔ یعنے منحنی کا ڈھلان صفر ہے جیسا کہ نقطہ ف پر کے مماسی خط سے عیاں ہے۔

**رول کا مسئلہ۔** اگر ف (لا) منعدم ہوتا ہے جبکہ لا = ا اور لا = ب اور ف (لا) اور فَ (لا) لا = ا سے لے کر لا = ب تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہیں، تو فَ (لا) لا کی ا اور ب کے مابین کم از کم

ایک قیمت پر صفر ہوگا۔

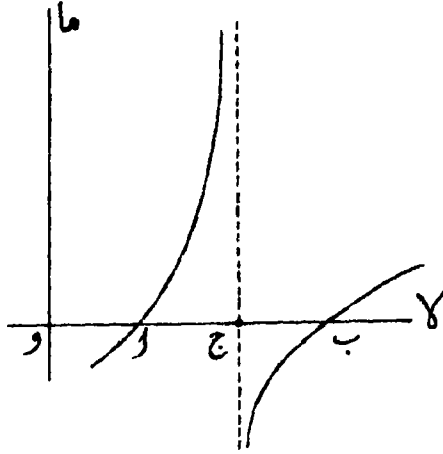
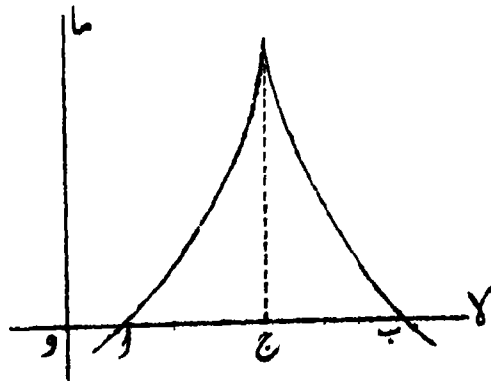
شکل ۴۴

اس مسئلہ کی تصدیق کے لیے کسی قسم کے ثبوت کی ضرورت نہیں، اس لیے کہ لا جیسے جیسے ا سے لے کر ب تک بڑھتا ہے ف (لا) نہ تو ہمیشہ بڑھ سکتا ہے اور نہ ہمیشہ گھٹ سکتا ہے کیونکہ ف (ا) = ۰ اور ف (ب) = ۰ پس لا کی ا اور ب کے درمیان کم از کم ایک قیمت کے لیے ف (لا) کا بڑھنا موقوف ہوکر گھٹنا شروع ہو جانا چاہیے، یا نہیں تو گھٹنا موقوف ہوکر بڑھنا شروع ہو جانا چاہیے۔ اور لا کی اس مخصوص قیمت کے لیے ف (لا) کا پہلا مشتق فَ (لا) صفر ہو جانا چاہیے۔

جیسا کہ اشکال (۴۵) اور (۴۶) سے ظاہر ہے جہاں لا = ا اور لا = ب کے درمیان ف (لا) یا فَ (لا) غیر مسلسل ہوں وہاں ر د ل کے مسئلہ کا اطلاق نہیں ہو سکتا۔

شکل ۴۵ ایک ایسے تفاعل کی ترسیم ہے جو ا اور ب کے مابین لا = ج کے لیے غیر مسلسل ہے یعنے ف (ج) = ∞

اور شکل ۴۶ء ایسے مسلسل تفاعل کی ترسیم ہے جس کا پہلا مشتق لا کی

شکل ۴۵ء

شکل ۴۶ء

ان ہی قیمتوں کے مابین لا = ج کے لیے غیر مسلسل ہے یعنی فَ(لا)=ــ۔
ان شکلوں کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ ہر دو صورتوں میں ترسیم کے کسی
نقطہ پر لا = ا اور لا = ب کے درمیان خطِ مماس (یا بالفاظِ دیگر منحنی)

محور و لا کے متوازی ہوتا ہے۔

**۲۔ اوسط قیمت کا مسئلہ۔** اگر ف (لا) اور فہ (لا) اور ان کے پہلے مشتق وقفہ (ا، ب) کے درمیان ہر جگہ مسلسل ہوں اور معہذا اس وقفہ کے اندر فہَ (لا) منعدم نہیں ہوتا ہے، تو لا کی کسی قیمت لا = لا$_1$ کے لیے جو ا اور ب کے درمیان ہے۔

$$\frac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{فہ (ب) - فہ (ا)}} = \frac{\text{فَ (لا}_1\text{)}}{\text{فہَ (لا}_1\text{)}} \quad \text{.....} \quad (\text{ا} < \text{لا}_1 < \text{ب}) \qquad (۱)$$

اس کے ثابت کرنے کے لیے تفاعل

$$\text{فہ (لا)} \equiv \frac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{فہ (ب) - فہ (ا)}} \left[\text{فہ (لا) - فہ (ا)}\right] - \left[\text{ف (لا) - ف (ا)}\right] \qquad (۱)$$

تیار کرو۔ واضح ہے کہ فہ (ا) = فہ (ب) = ۰۔ اور اس لیے اس پر رول کے مسئلہ کا اطلاق ہو سکتا ہے۔

پس تفرق کرنے سے

$$\text{فہَ (لا)} = \frac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{فہ (ب) - فہ (ا)}} \text{ فہَ (لا) - فَ (لا)} \quad \text{.....} \qquad (۲)$$

ا اور ب کے مابین لا کی کسی قیمت لا = لا$_1$ کے لیے فہَ (لا) کو منعدم ہو جانا چاہیے۔

$$\therefore \frac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{فہ (ب) - فہ (ا)}} \text{ فہَ (لا}_1\text{) - فَ (لا}_1\text{)} = ۰ \quad \text{...} \qquad (۳)$$

یہ یاد رکھ کر کہ فہَ (لا$_1$) منعدم نہیں ہوتا ہے سارے جملہ کو فہَ (لا$_1$) پر تقسیم کر کے ترتیب دینے سے نتیجہ (۱) مندرجۂ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

اگر (۱) میں فہ (لا) = لا تو

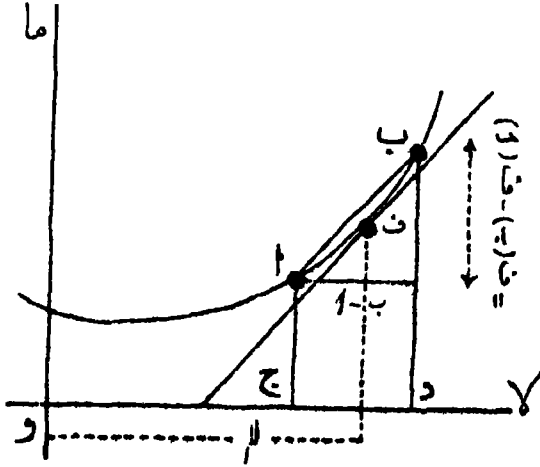
$$\text{فَ (لا}_1\text{)} = \frac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{ب - ا}} \quad \text{...} \; (\text{ب}) \qquad (\text{ا} < \text{لا}_1 < \text{ب})$$

اس صورت میں مسئلہ مصرحہ بالا کی آسان ہندسی تعبیر ہوتی ہے۔ ملاحظہ ہو شکل ۴۲ جو ف (لا) کی ترسیم ہے۔

و ج = ا، ج ا = ف (ا)

و د = ب، د ب = ف (ب)

پس $\dfrac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{ب - ا}}$ = وتر ا ب کا ڈھلان

شکل ۲۷

واضح ہو کہ مساوات (ب) میں فَ (لا) منحنی کی قوس ا ب کے ایک نقطہ پر کا ڈھلان ہے اور مساوات (ب) اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ اس نقطہ پر کا ڈھلان وتر ا ب کے ڈھلان کے مساوی ہے۔ پس قوس ا ب پر کم از کم ایک ایسا نقطہ ف ہے جس کا مماسی خط وتر ا ب کے متوازی ہے۔

شکل ۲۷ کے ملاحظہ سے معلوم ہوگا کہ لا = ا اور لا = ب کے درمیانی وقفہ میں منحنی پر ف کے مماثل اور بھی نقطے ہو سکتے ہیں۔

مساوات (ب) کو کسروں سے پاک کرنے سے مسئلہ حسب ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

(ج)...　ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (لا)

بجائے ب کے ا + مف ا لکھو تب ب - ا = مف ا اور چونکہ لا، ا اور ب کے مابین ایک عدد ہے اس لیے ہم لا، کو ا + طہ. مف ا کے مساوی لکھ سکتے ہیں جس میں طہ ایک مثبت واجب کسر ہے۔ اس طرح مساوات (ج) میں عمل تعویض سے اوسط قیمت کے مسئلہ کی ایک دوسری شکل حاصل ہوتی ہے۔

(د) .. ف (ا + مف ا) - ف (ا) = مف (ا) فَ (ا + طہ. مف ا)...

(ا > طہ > ب)

۳ ۔ ہم اب رول کے مسئلہ کی مدد سے لثمی دائرہ (Osculating Circle) کی ایک ہندسی مثال حل کرکے بتائینگے۔

**تعریف** ۔ اگر کسی منحنی پر کے تین پڑوس کے نقطوں ف، ف، ف میں سے ایک دائرہ کھینچا جائے (ملاحظہ ہو شکل ۳۸)۔ اور نقاط ف، ف، منحنی پر ہٹتے ہوئے نقطہ ف کے بالآخر انتہائی وضع میں بالکل متصل ہو جائیں، تب یہ دائرہ عموماً مقدار اور وضع میں ایک انتہائی دائرہ کو پہنچ جائیگا جو منحنی کا

شکل ۳۸

نقطہ ف پر لثمی دائرہ کہلاتا ہے۔

یہ لثمی دائرہ، دائرہ انحناء کا بعینہٖ مماثل ہے۔

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات $\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$ ہے ...... (۱)

اور $\text{لا}_1$، $\text{لا}_2$، $\text{لا}_3$ علی الترتیب نقاط $\text{ف}_1$، $\text{ف}_2$، $\text{ف}_3$ کے فصلے یا مقطوعے ہیں، ( عہ، بہ ) محولہ بالا تین نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کے محدد ہیں اور صؔ اس کا نصف قطر ہے۔ تب اس دائرہ کی مساوات

$$(\text{لا}-\text{عہ})^2 + (\text{ما}-\text{بہ})^2 = \text{صَ}^2 \quad \text{ہے}$$

اور چونکہ $\text{ف}_1$، $\text{ف}_2$ اور $\text{ف}_3$ نقطوں کے محددوں کو چاہیے کہ یہ مساوات ان پر صادق آئے، لہذا

$$\left.\begin{aligned} (\text{لا}_1-\text{عہ})^2 + (\text{ما}_1-\text{بہ})^2 - \text{صَ}^2 &= 0 \\ (\text{لا}_2-\text{عہ})^2 + (\text{ما}_2-\text{بہ})^2 - \text{صَ}^2 &= 0 \\ (\text{لا}_3-\text{عہ})^2 + (\text{ما}_3-\text{بہ})^2 - \text{صَ}^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (۲)$$

اب لا کے تفاعل پر غور کرو جس کی تعریف بذریعہ

$\text{ف}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{عہ})^2 + (\text{ما}-\text{بہ})^2 - \text{صَ}^2$ کی جاتی ہے، جس میں ما کی تعریف بذریعہ مساوات (۱) کی گئی ہے۔

پس مساواتوں (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ف}(\text{لا}_1) = 0،\ \text{ف}(\text{لا}_2) = 0 \ \text{اور}\ \text{ف}(\text{لا}_3) = 0$$

اس لیے رول کے مسئلہ سے $\text{فَ}(\text{لا})$ لا کی کم از کم دو قیمتوں پر منعدم ہوجانا چاہیے جن میں سے ایک قیمت $\text{لا}_1$ اور $\text{لا}_2$ کے درمیان مثلاً $\text{لاَ}_1$ ہے اور دوسری $\text{لا}_2$ اور $\text{لا}_3$ کے درمیان مثلاً $\text{لاَ}_2$ ہے

یعنی $\text{فَ}(\text{لاَ}_1) = 0$ اور $\text{فَ}(\text{لاَ}_2) = 0$۔

اسی وجہ سے لا کی کسی قیمت پر مابین لاَ اور لاً کے مثلاً $\text{لا}_{۴}$ پر فً (لا) منعدم ہو جانا چاہیے۔ پس

$$\text{فً}\,(\text{لا}_{۴}) = ۰$$

اس لیے نقاط ف، $\text{ف}_{۱}$ اور $\text{ف}_{۲}$ میں سے گزرنے والے دائرہ کے عناصر عہ، بہ اور ص کے لیے ضروری ہے کہ وہ مندرجہ ذیل تین مساواتوں کی تصدیق کریں:

$$\text{ف}\,(\text{لا}_{۱}) = ۰،\quad \text{فَ}\,(\text{لاَ}) = ۰،\quad \text{فً}\,(\text{لا}_{۴}) = ۰$$

اب ف اور $\text{ف}_{۲}$ بالآخر نقطہ $\text{ف}_{۱}$ کے انتہائی قریب پہنچ جانے دو۔ تب لا، $\text{لا}_{۱}$، لاَ، لاً، $\text{لا}_{۴}$ نقطہ $\text{لا}_{۱}$ کو بطور انتہا پہنچ جائیںگے اور اس لیے لمحی دائرہ کے عناصر عہ، بہ، ص کی تعیین ذیل کی تین مساواتوں سے ہو جائیگی:

$$\text{ف}\,(\text{لا}_{۱}) = ۰،\quad \text{فَ}\,(\text{لا}_{۱}) = ۰.\quad \text{فً}\,(\text{لا}_{۱}) = ۰$$

حروف کے ذیلی نشانوں کو ترک کرنے سے یہ مساواتیں حسبِ ذیل ہو جاتی ہیں:

$$(\text{لا} - \text{عہ})^{۲} + (\text{ما} - \text{بہ})^{۲} = \text{ص}^{۲} \quad \ldots\ldots \quad (۳)$$

(۳) کو تفرق کرکے $(\text{لا} - \text{عہ}) + (\text{ما} - \text{بہ})\,\text{مَا} = ۰ \quad \ldots\ldots \quad (۴)$

(۴) کو تفرق کرکے $۱ + (\text{مَا})^{۲} + (\text{ما} - \text{بہ})\,\text{مًا} = ۰ \quad \ldots\ldots \quad (۵)$

مساواتوں (۴) اور (۵) کو (لا − عہ) اور (ما − بہ) کے لیے حل کرنے سے (چونکہ $\text{مً} \neq ۰$) مساوات (۶) حاصل ہوتی ہے:

$$\text{لا} - \text{عہ} = \frac{\text{مَا}\{۱ + (\text{مَا})^{۲}\}}{\text{مًا}} \qquad \text{ما} - \text{بہ} = -\frac{۱ + (\text{مَا})^{۲}}{\text{مًا}} \quad \ldots \quad (۶)$$

اس طرح عہ اور بہ کے لیے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں باب (۹) میں دائرۂ انحناء کے محددوں کے لیے حاصل شدہ مساواتوں کے عین مماثل ہیں۔ ایسا ہی نصف قطرِ انحناء، جس کے لیے جو جملہ اخذ کیا جاتا ہے وہ بھی نصف قطرِ انحناء کے جملہ کے مماثل ہے۔ پس لمسی دائرہ، دائرہ انحنار کے متماثل ہے۔

مثال (۱) اگر ف (لا) = لا^۳ - ۳ لا تو لا کی ان قیمتوں کو دریافت کرکے جن کے لیے ف (لا) اور فَ (لا) منعدم ہوتے ہیں رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو۔

حل ف (لا) = لا^۳ - ۳ لا = لا (لا^۲ - ۳) منعدم ہوتا ہے

جبکہ لا = ۰ یا لا = ± √۳

فَ (لا) یعنے ۳ لا^۲ - ۳ کو لا کی کم از کم ایک قیمت کے لیے (مابین لا = ۰ اور لا = + √۳، اور لا = ۰ اور لا = - √۳) صفر ہوجانا چاہیے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جبکہ لا^۲ - ۱ = ۰ یعنے لا = ± ۱

ف (لا) کی ترسیم کھینچنے سے ان امور کی بہتر توضیح ہوسکتی ہے۔

مثال (۲) لا₁ دریافت کرو جس کے لیے

ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (لا₁)

درانحالیکہ ف (لا) = لا^۲ اور ا = ۱ اور ب = ۲

حل ف (ب) = ب^۲ = ۴، (ف ا) = ا^۲ = ۱

پس ۴ = ۱ + ۱ فَ (لا₁)

فَ (لا) = فز ف (لا) / فز لا = فز لا^۲ / فز لا = ۲ لا

∴ ۴ = ۱ + ۲ لا₁ اور ۲ لا₁ = ۳

∴ $لا_۱$ = ۵ء۱

# مثالیں

ذیل کی صورتوں میں لا کی قیمتیں معلوم کرکے جن کے لیے ف (لا) اور فَ (لا) منعدم ہو جاتے ہیں، رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو:—

(۱) ف (لا) = $لا^۲$ - $لا^۳$ (۲) ف (لا) = جب لا

(۳) ف (لا) = جب ۲ لا - جم ۲ لا (۴) ف (لا) = مس لا - لا

(۵) ف (لا) = لا $و^{لا}$ (۶) ف (لا) = لا لوک لا

(۷) $لا_۱$ دریافت کرو جس کے لیے

ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ ($لا_۱$) جبکہ

ف (لا) = $و^{لا}$، ا = ۰، ب = ۱ [جواب $لا_۱$ = لوک (و-۱) = ۲۵ء۰]

**۷۔ غیر معین صورتیں** ۔ جب متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت کے لیے کوئی تفاعل مندرجۂ ذیل صورتوں میں سے کوئی صورت اختیار کرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ غیر معین ہے:

$\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0 \times \infty$ ، $\infty - \infty$ ، $(0)^0$ ، $(\infty)^0$ ، $(1)^\infty$

اور دیے ہوئے جملہ سے متبوع متغیر کی اُس خاص قیمت کے لیے تفاعل مذکور غیر معروف ہوتا ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ

$$ما = \frac{ف (لا)}{ف_۱ (لا)}$$

جس میں متغیر کی کسی قیمت مثلاً لا = ا کے لیے

ف (ا) = ۰ اور $ف_۱$ (ا) = ۰

لا کی اس قیمت کے لیے متذکرہ بالا تفاعل غیر معرف ہوتا ہے اور اس لیے ہم اس کے لیے جو قیمت چاہیں مقرر کر سکتے ہیں - ہمارا مقصد ہے کہ جہاں کہیں ممکن ہو اس تفاعل کی ایسی قیمت مقرر کی جائے جو اس کو مسلسل بنائے جبکہ لا = ا
اگر تفاعل ف (لا) ایک غیر معین صورت اختیار کرتا ہے جبکہ لا = ا، تب اگر

$$\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \; \text{ف (لا)}$$

موجود اور محدود ہے تو ہم لا = ا کے لیے یہ قیمت مقرر کرتے ہیں اور وہ اب لا = ا کے لیے مسلسل بن جاتا ہے -

جیسا کہ ایک سابقہ باب (باب دوم) میں بتایا گیا بعض اوقات ایسے تفاعلوں کی انتہائی قیمت سادہ استحالوں کے ذریعہ معلوم کر لی جا سکتی ہے - لیکن حسب بالا غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے عام طریقے احصاء ہی پر منحصر ہیں

## ۵ - غیر معین صورت $\frac{\cdot}{\cdot}$ کی قیمت کی دریافت -

اگر تفاعل $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}}$ کی صورت کا ہو ایسا کہ ف (ا) = ۰ اور ف (ا) = ۰
تو یہ تفاعل غیر معین ہے جبکہ لا = ا - ہم ثابت کرینگے کہ

$$\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = \underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف}' \text{(لا)}}{\text{ف}' \text{(لا)}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساوات (۲) ۲ میں ب = لا لکھو، چونکہ ف (ا) = ف (ا) = ۰

$$\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = \frac{\text{ف}' (\text{لا}_1)}{\text{ف}' (\text{لا}_1)} \qquad [\text{ا} < \text{لا}_1 < \text{لا}] \ldots (۱)$$

اگر لا ← ا تو نیز لا₁ ← ا - پس اگر مساوات (۱) کا سیدھے جانب کا رکن ایک انتہا کو پہنچتا ہے جبکہ لا ← ا تو بائیں جانب کا رکن بھی

اسی انتہا کو پہنچتا ہے اور اس طرح رابطہ (ھ) ثابت ہو جاتا ہے۔
رابطہ (ھ) سے، اگر فَ (ا) اور فَ (لا) دونوں صفر نہیں ہیں تو

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = \frac{\text{فَ (ا)}}{\text{فَ (ا)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

پس غیر معین صورت ÷ کی قیمت دریافت کرنے کا قاعدہ یہ ہے کہ شمار کنندہ کو تفرق کر کے ایک نیا شمار کنندہ قرار دیا جائے اور نسب نما کو تفرق کر کے ایک نیا نسب نما قرار دیا جائے۔ اس نئی کسر کی قیمت متغیر کی مقررہ قیمت کے لیے ابتدائی کسر کی انتہائی قیمت ہوگی۔

اگر ایسی صورت پیش آئے کہ متغیر کی مقررہ قیمت کے لیے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کے پہلے مشتق بھی منعدم ہوں تو رابطہ (ھ) کا عمل نسبت

$$\frac{\text{فَ (لا)}}{\text{فَ (لا)}}$$

پر عائد کیا جا سکتا ہے۔ اگر اس وقت بھی بیشتر ہی کی صورت رُو نما ہو تو رابطہ (ھ) کا عمل بار بار دُہرایا جاتا ہے یہاں تک کہ نتیجہ معین صورت اختیار کر لیتا ہے جبکہ متغیر کی مقررہ قیمت تعویض کی جاتی ہے۔ یعنے مطلوبہ انتہا مندرجہ ذیل جملوں میں سے پہلا جملہ جس کی قیمت لا = ا تعویض کرنے پر معین پائی جائیگی۔

$$\frac{\text{فَ (لا)}}{\text{فَ (لا)}}، \quad \frac{\text{فً (لا)}}{\text{فً (لا)}}، \quad \ldots\ldots \quad \frac{\text{ف}^{(\text{ن})} \text{(لا)}}{\text{ف}^{(\text{ن})} \text{(لا)}}$$

توضیحی مثال (۱) $\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{و}} \frac{\text{لا} - \text{و}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل $\frac{\text{لا} - \text{و}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}} = \div$ جبکہ لا = ا

$$\text{پس}\ \underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{فر}(\text{لا} - \text{ا})}{\text{فر}(\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}})}\ \text{جبکہ لا} = \text{ا}$$

$$= \frac{۱}{\text{ن لا}^{\text{ن}-۱}}\ \text{جبکہ لا} = \text{ا یعنے} = \frac{۱}{\text{ن ا}^{\text{ن}-۱}}$$

**توضیحی مثال (۲)** $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا} - \text{مس لا}}$ دریافت کرو۔

حل۔ $\frac{(\text{لا} - \text{جب لا})}{(\text{لا} - \text{مس لا})} = \frac{۰}{۰}\ \text{جبکہ لا} = ۰$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}(\text{لا} - \text{جب لا})}{\text{فر}(\text{لا} - \text{مس لا})} = \frac{۱ - \text{جم لا}}{۱ - \text{قط}^{۲}\text{لا}} = \frac{۰}{۰}\ \text{جبکہ لا} = ۰$$

یعنے غیر معین ہے۔

پس رابطہ (۵) کے بموجب دوبارہ عمل کرنے سے یعنے دی ہوئی کسر کے شمارکنندہ و نسب نما کو دو دو مرتبہ تفرق کرنے سے،

$$\frac{\text{فر}(۱ - \text{جم لا})}{\text{فر}(۱ - \text{قط}^{۲}\text{لا})} = \frac{\text{جب لا}}{-۲\ \text{قط}^{۲}\text{لا مس لا}}$$

لیکن یہ بھی $\frac{۰}{۰}$ ہے جبکہ لا = ۰ اس لیے مزید ایک بار تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}(\text{جب لا})}{\text{فر}(-۲\ \text{قط}^{۲}\text{لا مس لا})} = \frac{\text{جم لا}}{-۲\ \text{قط}^{۴}\text{لا} - ۴\ \text{قط}^{۲}\text{لا مس}^{۲}\text{لا}} = \frac{۱}{۲}\ \text{جبکہ لا} = ۰$$

$$\text{پس}\ \underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا} - \text{مس لا}} = -\frac{۱}{۲}$$

# مثالیں

ذیل کی غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرو:۔

(۱) $\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}} - ۲\ \text{لا}}{\text{لا} - \text{جب لا}}$ جبکہ لا = ۰ جواب = ۲

(۲) $\frac{لا^3 - ۲ لا^2 - لا + ۲}{لا^2 - ۷ لا + ۶}$ جبکہ لا = ۲ جواب = $\frac{۳}{۵}$

(۳) $\frac{(۲ - لا^2) جب لا - ۲ لا جم لا}{لا^3}$ جبکہ لا = ۰ جواب = $- \frac{۱}{۳}$

(۴) دریافت کرو $\underset{لا \to ۳}{نہا} \frac{\sqrt{۳ لا} - \sqrt{۱۲ - لا}}{\sqrt{۲ لا - ۳} - \sqrt{۱۹ - ۵ لا}}$ جواب = $\frac{۸}{۶۹}$

## ۶۔ غیر معیّن صورت $\frac{\infty}{\infty}$ کی قیمت کی دریافت۔

$\underset{لا \to و}{نہا} \frac{ف (لا)}{فَ (لا)}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جبکہ لا ← و کی حالت میں ف (لا) = $\infty$ اور فَ (لا) = $\infty$ اسی قاعدہ پر عمل کیا جاتا ہے جو $\frac{۰}{۰}$ کی صورت میں استعمال ہوتا ہے۔ یعنی مطلوبہ انتہا

$$\frac{فَ (لا)}{فَ (لا)} ، \frac{فً (لا)}{فً (لا)} ، \frac{فٌ (لا)}{فٌ (لا)} ، \dots\dots \frac{ف^{(ن)} (لا)}{ف^{(ن)} (لا)}$$

میں سے پہلا جملہ ہوگا جس کی قیمت لا = و تعویض کرنے پر معیّن پائی جائیگی۔ اس کا باضابطہ ثبوت موجودہ نصاب سے بالاتر ہے۔ اس لیے صرف قاعدہ بیان کر دیا گیا۔

### توضیحی مثال $\underset{لا \to ۰}{نہا} \frac{لوک لا}{قم لا}$ دریافت کرو۔

حل۔ $\frac{ف (۰)}{فَ (۰)} = \left[\frac{لوک لا}{قم لا}\right]_{لا = ۰} = \frac{-\infty}{\infty}$ اس لیے غیر معیّن

$\frac{فَ (۰)}{فَ (۰)} = \left[\frac{\frac{۱}{لا}}{- قم لا قم لا}\right]_{لا = ۰} = \left[- \frac{جب^2 لا}{لا جم لا}\right]_{لا = ۰} = \frac{۰}{۰}$ اس لیے غیر معیّن

$\frac{فً (۰)}{فً (۰)} = \left[- \frac{۲ جب لا جم لا}{جم لا - لا جب لا}\right]_{لا = ۰} = - \frac{۰}{۱} = ۰$

## ۷ - غیر معین صورت $۰ \times \infty$ کی قیمت کی دریافت۔

اگر کوئی تفاعل ف (لا) × ف (لا) غیر معین صورت $۰ \times \infty$ اختیار کرتا ہے جبکہ لا = ل تو اس کو بشکل

$$\frac{ف(لا)}{\frac{1}{ف(لا)}} \quad یا \quad \frac{ف(لا)}{\frac{1}{ف(لا)}}$$

لکھ کر بصورت $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کر لیا جاتا ہے اور پھر ان غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے لیے جو قاعدے اوپر بتائے گئے ہیں ان پر عائد کیے جاتے ہیں۔

**توضیحی مثال** $\underset{لا \to ۰}{نہا} \; و^{-\frac{1}{لا}} (۱ + لوک\, لا)$ دریافت کرو۔

حل۔ $و^{-\frac{1}{لا}} (۱ + لوک\, لا) = \frac{۱ + لوک\, لا}{و^{\frac{1}{لا}}}$ جبکہ لا > ۰

لیکن $\frac{۱ + لوک\, لا}{و^{\frac{1}{لا}}}$ صورت $\frac{\infty}{\infty}$ اختیار کر لیتا ہے اور اس لیے غیر معین ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰۔

پس محولہ بالا قاعدہ سے انتہائے مذکور

$$= \underset{لا \to ۰}{نہا} \frac{\frac{1}{لا}}{-\frac{1}{لا^2} و^{\frac{1}{لا}}} = \underset{لا \to ۰}{نہا} - \frac{لا}{و^{\frac{1}{لا}}} = ۰$$

پس انتہائے مذکور کی قیمت = ۰

## ۸ - غیر معین صورت $\infty - \infty$ کی قیمت کی دریافت

ایسے جملہ کو عموماً ایسی کسر میں تحویل کیا جا سکتا ہے جو صورت $\frac{۰}{۰}$

یا صورت $\frac{\infty}{\infty}$ اختیار کر لیتی ہے ۔

**توضیحی مثال۔** $\underset{لا \to ۱}{نہا}\left(\frac{لا}{لا-۱} - \frac{۱}{لوک\ لا}\right)$ دریافت کرو۔

حل ۔ یہ تفاعل ∞ ۔ ∞ ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۱

لیکن $\frac{لا}{لا-۱} - \frac{۱}{لوک\ لا} = \frac{لا\ لوک\ لا - لا + ۱}{(لا-۱)\ لوک\ لا}$ جبکہ لا ≠ ۱

مگر جب لا = ۱ تو یہ آخری تفاعل $\frac{۰}{۰}$ صورت اختیار کر لیتا ہے ۔ پس

محولہ بالا قاعدہ کے استعمال سے تفاعل مذکور = $\frac{لوک\ لا}{لوک\ لا + ۱ - \frac{۱}{لا}}$ اور یہ $\frac{۰}{۰}$

ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۱ عمل دُہرانے سے $\frac{\frac{۱}{لا}}{\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا^۲}}$ حاصل ہوتا ہے

جو = $\frac{۱}{۲}$ جبکہ لا = ۱ پس

دیے ہوئے جملہ کی انتہا $\frac{۱}{۲}$

## ۹۔ غیر معیّن صورتوں $(۰)^۰$، $(۱)^\infty$، $(\infty)^۰$ کی قیمتوں کی دریافت۔

تفاعل اگر بصورت $ف(لا)^{ف(لا)}$ ہو

تو اس کو مندرجۂ بالا تین صورتوں میں سے کوئی ایک صورت اختیار کرنے کے لیے ضرور ہے کہ لا کی کسی قیمت کے لیے

ف (لا) = ۰، ف (لا) = ۰ اس سے $(۰)^۰$ صورت پیدا ہوگی ۔

یا ف (لا) = ۱ ف (لا) = ∞ ″ $(۱)^\infty$ ″ ″

یا ف (لا) = ∞ ف (لا) = ۰ ″ $(\infty)^۰$ ″

فرض کرو ما = ف (لا)^ف(لا)

دونوں طرف لوکارتم لینے سے لوک ما = ف (لا) لوک ف (لا)

اوپر کی ان قسموں میں سے کسی بھی قسم میں ما (یعنے دیے ہوئے تفاعل) کا لوکارتم غیر معیّن صورت ۰ × ∞ اختیار کر لیگا۔

پس مسئلے کے طریقہ سے اس غیر معیّن صورت کی قیمت دریافت کرنے سے دیے ہوئے تفاعل کے لوکارتم کی انتہا دستیاب ہو جاتی ہے۔ چونکہ یہ تفاعل کے انتہا کے لوکارتم کے مساوی ہے اس لیے تفاعل کی انتہا معلوم ہو جاتی ہے۔ کیونکہ

اگر انتہا لوک_و ما = ل تو ما = و^ل

**توضیحی مثال (۱)** نہا_{لا←۰} (جم لا)^{۱/لا} دریافت کرو۔

حل (جم لا)^{۱/لا} کی قیمت ۱^∞ ہو جاتی ہے جبکہ لا = ۰

لوک (جم لا)^{۱/لا} = ۱/لا لوک جم لا = ۰/۰ (یعنے غیر معیّن) جبکہ لا = ۰

لیکن ازروے ۵ نہا_{لا←۰} (لوک جم لا / لا) = - مس ۰ / ۱ = ۰

چونکہ نہا_{لا←۰} لوک (جم لا)^{۱/لا} = ۰ اس لیے لوک نہا_{لا←۰} (جم لا)^{۱/لا} = ۰

یعنے نہا_{لا←۰} (جم لا)^{۱/لا} = و^۰ = ۱

**توضیحی مثال (۲)** نہا_{لا←۰} (مم لا)^{جب لا} دریافت کرو۔

حل فرض کرو ما = (مم لا)^{جب لا} تب لوک ما = جب لا لوک مم لا = ۰ × ∞ جبکہ لا = ۰

پس ازروئے ۵ لوک ما = لوک مم لا / قم لا = ∞/∞ جبکہ لا = ۰

پس ازروئے بہ ۶ $\text{لوک ما} = \dfrac{-\dfrac{\text{قم}^{۲}\text{لا}}{\text{مم لا}}}{-\text{قم لا مم لا}} = \dfrac{\text{جب لا}}{\text{جم}^{۲}\text{لا}} = ۰$

جبکہ لا = ۰۔

یعنے $\text{لوک}_{\text{و}} (\text{مم لا})^{\text{جب لا}} = ۰$ پس $(\text{مم لا})^{\text{جب لا}} = \text{و}^{۰} = ۱$

# غیر معیّن صورتوں سے متعلق متفرق مثالیں

ذیل کی غیر متعیّن صورتوں کی قیمتیں دریافت کرو :—

(۱) $\underset{\text{لا} \to \frac{\pi}{۲}}{\text{نہا}} \dfrac{\text{مس لا}}{\text{مس ۳لا}}$ ، جواب = ۳

(۲) $\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا} + \text{لوک لا}}{\text{لا لوک لا}}$ ، جواب = ۰

(۳) $\underset{\text{لا} \to ۲}{\text{نہا}} (۲-\text{لا}) \, \text{مس} \dfrac{\pi\text{لا}}{۴}$ ، جواب = $\dfrac{۴}{\pi}$

(۴) $\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \text{لا قم ۲لا}$ ، جواب = $\dfrac{۱}{۲}$

(۵) $\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \left( \dfrac{۱}{\text{جب}^{۲}\text{لا}} - \dfrac{۱}{\text{لا}^{۲}} \right)$ ، جواب = $\dfrac{۱}{۳}$

(۶) $\underset{\text{لا} \to ۰}{\text{نہا}} \left[ \dfrac{۱}{۲\text{لا}} - \dfrac{۱}{\text{لا}(\text{و}^{۳\text{لا}} + ۱)} \right]$ ، جواب = $\dfrac{۳}{۴}$

(۷) $\underset{\text{لا} \to \text{و}}{\text{نہا}} (\text{لوک لا})^{\frac{۱}{\text{لا}-\text{و}}}$ ، جواب = $\dfrac{۱}{\text{و}}$

(۸) $\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} ۳^{\text{لا}} \, \text{جب} \dfrac{۲}{۳^{\text{لا}}}$ ، جواب = ۲

(۹) $\lim_{لا \to ۱}$ (۱ - لا) مس $\frac{\pi لا}{۲}$ ، جواب = $\frac{۲}{\pi}$

(۱۰) $\lim_{لا \to \frac{\pi}{۲}}$ [قط لا - $\frac{۱}{۱ - جب لا}$] ، جواب = صفر

(۱۱) $\lim_{لا \to \frac{\pi}{۲}}$ (جب لا)$^{قط لا}$ ، جواب = ۱

(۱۲) $\lim_{لا \to ۰}$ (۱ + ۲ لا)$^{\frac{۱}{لا}}$ ، جواب = $و^{۲}$

(۱۳) $\lim_{لا \to ۱}$ (۲ - لا)$^{مس \frac{\pi لا}{۲}}$ ، جواب = $و^{\frac{۲}{\pi}}$

(۱۴) $\lim_{لا \to ۰}$ ($و^{لا}$ + ۲ لا)$^{\frac{۱}{۲ لا}}$ ، جواب = و

(۱۵) $\lim_{لا \to و}$ (لوک لا)$^{\frac{۱}{۱ - لوک لا}}$ ، جواب = $\frac{۱}{و}$

## ۱۰۱ - اوسط قیمت کا وسیع تر مسئلہ -

فرض کرو مستقل س کی تعریف مساوات ذیل سے ہوتی ہے :-

ف(ب) - ف (ا) - (ب - ا) فَ (ا) - ½ (ب - ا)$^{2}$ س = ۰ ... (۱)

اور فرض کرو کہ ف (لا) ایک ایسا تفاعل ہے جو (۱) کے سیدھے جانب کے رکن میں ب کے عوض لا لکھنے سے بنتا ہے - یعنے

ف (لا) = ف (لا) - ف (ا) - (لا - ا) فَ (ا) - ½ (لا - ا)$^{2}$ س (۲)

(۱) سے ف (ب) = ۰ اور (۲) سے ف (ا) = ۰ پس رول کے مسئلے (ملاحظہ ہو ۱۰۱) لا کی کم از کم ایک قیمت ا اور ب کے درمیان مثلاً لا₁ ایسی ہوگی جو فَ (لا) کو معدوم کردیگی - بدینوجہ چونکہ

فَ (لا) = فَ (لا) - فَ (ا) - (لا - ا) س

ہمیں حاصل ہوتا ہے نتیجہ فَ (لا₁) = فَ (لا₁) - فَ (ا) - (لا₁ - ا) س = ۰

چونکہ فَ (لا₁) = ۰ اور فَ (ا) = ۰ اس لیے واضح ہے کہ فَ (لا) بھی رول کے مسئلہ کے شرائط کی تکمیل کرتا ہے لہذا اس کا مشتق یعنے فً (لا) کم از کم لا کی ایک قیمت مابین ا اور لا₁ مثلاً لا₂ کے لیے معدوم ہوجانا چاہیے، اور اس لیے لا₂ بھی ا اور ب کے درمیان واقع ہے - لیکن

فً (لا) = فً (لا) - س پس فً (لا₂) = فً (لا₂) - س = ۰

اور س = فً (لا₂)

اس نتیجہ کو (۱) میں تعویض کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (ا) + ½ (ب - ا)$^{2}$ فً (لا₂)؛

(ا > لا₂ > ب) ...۲۰۰

اس طریقہ کو جاری رکھنے سے ہمیں یہ عام نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})}{\underline{|1}}\,\text{ف}'(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{2}}{\underline{|2}}\,\text{ف}''(\text{ا})$$

$$+ \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{3}}{\underline{|3}}\,\text{ف}'''(\text{ا}) + \cdots\cdots + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}}\,\text{ف}^{(\text{ن}-1)}(\text{ا})$$

$$+ \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}_{1}), \quad (\text{ا} < \text{لا}_{1} < \text{ب}) \cdots\cdots (\text{ز})$$

مساوات (ز) وسیع تر مسئلۂ اوسط قیمت یا وسیع تر مسئلۂ اوسط کہلاتی ہے۔

# گیارہواں باب

## معیاری ابتدائی صورتوں کے تکمل کے قواعد

### ۱۔ تکمل کا تصور بطور مقلوب عملِ تفرق۔

جس طرح جمع کا مقلوب عمل تفریق ہے یا ضرب کا مقلوب عمل تقسیم یا کسی قوت تک بلند کرنے کا مقلوب عمل اصلوں کا حصول ہے اسی طرح تفرق کا مقلوب عمل تکمل ہے۔

ہم نے کتاب کے تفرقی احصاء والے حصہ میں معلوم کیا ہے کہ کسی دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کا مشتق فَ (لا) کس طرح دریافت کیا جاتا ہے۔ علامتوں کے ذریعہ یہ عمل بشکل

فر/فرلا ف (لا) = فَ (لا) ظاہر کیا جاتا ہے یا اگر

تفرقوں کی رقموں میں ظاہر کیا جائے تو بذریعہ فرف (لا) = فَ (لا) فرلا

تکملی احصاء میں اس کے مقلوب یا متعاکس عمل پر بحث کی جاتی ہے۔ یعنے یہ دریافت کرنے کی کوشش کی جاتی ہے کہ دیا ہوا تفاعل کسی دوسرے تفاعل کا مشتق ہے: علامتوں کے ذریعہ اس کو یوں ظاہر کیا جا سکتا ہے کہ اگر

مشتق فَ (لا) = فہ (لا) دیا جائے تو وہ تفاعل ف (لا) دریافت کیا جائے جس کا یہ مشتق ہے۔ چونکہ تکملی احصاء میں تفرق بکثرت استعمال ہوتے ہیں اس لیے فرف (لا) = فَ (لا) فرلا = فہ (لا) فرلا لکھ کر سوال ان الفاظ میں پیش کیا جا سکتا ہے کہ "ایک تفاعل کا تفرق دیا جاتا ہے دریافت کیا جائے کہ خود وہ تفاعل کیا ہے؟"

تفاعل ف (لا) جو اس طرح دریافت کیا جاتا ہے، دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکملہ کہلاتا ہے۔ اس کے دریافت کرنے کے عمل کو تکملانا یا تکمل لیتے ہیں اور اس عمل کا اظہار دیے ہوئے تفرقی جملہ کے آگے علامت تکمل ∫ لکھ کر کیا جاتا ہے۔ جیسے

$$\int \text{فَ (لا) فرلا} = \text{ف (لا)} \qquad (1)$$

جو عبارت میں پڑھا جاتا ہے "فَ (لا) فرلا کا تکملہ مساوی ہے ف (لا) کے" تفرق فرلا اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ لا عمل تکمل کا متغیر ہے۔ مثلاً

(ا) اگر ف (لا) = لا$^{5}$ تو فَ (لا) فرلا = ۵ لا$^{4}$ فرلا اور

$\int$ ۵ لا$^{4}$ فرلا = لا$^{5}$

(ب) اگر ف (لا) = مس لا تو فَ (لا) فرلا = قط$^{2}$ لا فرلا اور

$\int$ قط$^{2}$ لا فرلا = مس لا

(ج) اگر ف (لا) = لوک لا تو فَ (لا) فرلا = $\frac{1}{\text{لا}}$ فرلا اور

$\int \frac{1}{\text{لا}}$ فرلا = لوک لا

مندرجۂ بالا امور سے ظاہر ہے کہ تفرق اور تکمل ایک دوسرے کے معکوس عمل ہیں۔

(۱) کو تفرق کرنے سے، فر $\int$ فَ (لا) فرلا = فَ (لا) فرلا ...... (۲) بدست ہوتا ہے

اس میں فَ (لا) فرلا کی قیمت [= فرف (لا) ] تعویض کرنے سے

∫ فرف (لا) = ف (لا) ...... (۳) برآمد ہوتا ہے

پس بلحاظ نشانات عمل فر/فرلا اور ∫ ..... فرلا باہمدیگر مقلوب ہیں۔ یا اگر ہم فر تنے استعمال کر رہے ہوں تو فر اور ∫ علامتیں ایک دوسرے کی مقلوب ہیں۔

جب فر کے بعد ∫ علامت لکھی جاتی ہے جیسا کہ

(۲) میں تو وہ ایک دوسرے کو تلف کردیتی ہیں۔ لیکن جب ∫ کے بعد علامت فر لکھی جاتی ہے جیسا کہ

(۳) میں تو عام طور پر ایسا نہیں ہوتا۔ اس کی وجہ ذیل کی فصل میں تکمل کے مستقل کی جو تعریف کی گئی ہے اس کے ملاحظہ سے فوراً واضح ہوجائیگی۔

## ۲۔ تکمل کا مستقل۔ نامحدود تکملہ۔

سابقہ فصل سے ظاہر ہے کہ

چونکہ فر (لا^۵) = ۵ لا^۴ فرلا پس ∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵

چونکہ فر (لا^۵ + ۳) = ۵ لا^۴ فرلا پس ∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵ + ۳

چونکہ فر (لا^۵ − ۸) = ۵ لا^۴ فرلا پس ∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵ − ۸

اسی طرح چونکہ فر (لا^۵ + ج) = ۵ لا^۴ جس میں ج کوئی ایک اختیاری مستقل ہے تو

∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵ + ج

ایسے مستقل کو تکمل کا مستقل کہتے ہیں وہ ایک عدد ہے جو تکمل کے

متغیر کا غیر تابع ہے

پس ∫ ف (لا) فرلا = ف (لا) + ج

اور چونکہ مستقل ج غیر معلوم اور نا محدود ہے اس لیے

جملہ ف (لا) + ج کے لیے نام فَ (لا) فرلا کا نا محدود تکملہ رکھا گیا ہے۔

یہ مسئلہ واضح ہے کہ اگر دو تفاعلوں میں ایک مستقل کا فرق ہے تو ان کا مشتق ایک ہی ہوگا۔

لیکن اس مسئلہ کا عکس بدیہی نہیں ہے یعنے اگر فہ (لا) ایک ایسا تفاعل ہے کہ اس کا مشتق ف (لا) ہے تو وہ تمام تفاعل جن کا مشتق ف (لا) ہے فہ (لا) + ج کی شکل کے ہوتے ہیں جس میں ج کوئی ایک مستقل ہے۔

ہم اب ثابت کرینگے کہ اگر دو تفاعلوں کا مشتق ایک ہی ہو تو ان میں فرق یا تفاوت ایک مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو فہ (لا) اور بہ (لا) دو تفاعل ہیں جن کا مشتق ف (لا) ہے،

فہ (لا) - بہ (لا) کو مساوی فـ (لا) کے لکھو

تب مفروضہ کی بنا پر فـَ (لا) = $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ [ فہ (لا) - بہ (لا) ]

= ف (لا) - ف (لا) = ۰ ..... (۱)

لیکن اوسط قیمت کے مسئلہ کی رو سے

ف (لا + مف لا) ـ ف (لا)

= مف لا فَ (لا + طہ · مف لا)، ۰ < طہ < ۱

∴ ف (لا + مف لا) ـ ف (لا) = ۰

[اس لیے کہ (۱) کی رُو سے ف (لا) کا مشتق لا کی تمام قیمتوں کے لیے صفر ہے]

لہذا ف (لا + مف لا) = ف (لا)

یعنے ف (لا) = فہ (لا) ـ پہ (لا) کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ لا میں اضافہ مف لا واقع ہوتا ہے۔ پس بالفاظ دیگر فہ (لا) اور پہ (لا) میں تفاوت صرف ایک مستقل کا ہے۔

کسی دی ہوئی صورت میں مستقل ج کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے جبکہ ہمیں متغیر کی کسی قیمت کے لیے تکملہ کی قیمت معلوم ہو۔ آگے چل کر اس کی متعدد مثالوں کے ذریعہ توضیح کی جائیگی۔ یہاں ہم صرف یہ بتانا چاہتے ہیں کہ اگر کوئی تفرقی جملے دیے جائیں تو ان کے نا محدود تکملوں کو کس طرح دریافت کر سکتے ہیں۔

البتہ یہ فرض کر لیا جائیگا کہ ہر ایک مسلسل تفاعل کا ایک تکملہ موجود ہے لیکن اس امر کا باقاعدہ ثبوت اس کتاب کے حیطۂ بحث سے باہر ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی نا محدود تکمل کے نتیجہ کی تصدیق اس قاعدہ کے ذریعہ ہو سکتی ہے کہ اس تکمل کا تفرقی دیے ہوئے تفرقی جملہ کے مساوی ہونا چاہیے۔

۳ء معیاری ابتدائی صورتوں کے تکمل کے قواعد جیسا کہ

ہم نے اس کتاب احصا کے آغاز میں دیکھا تفرقی احصا عمل تفرق کے لیے ایک عام قاعدہ مہیا کر دیتا ہے ۔ لیکن تکملی احصا سے ہمیں اس کے تناظر کوئی عام قواعد دستیاب نہیں ہوتا جس کی مدد سے فی الفور تکمل عمل میں لایا جا سکے۔ صرف یہی نہیں بلکہ بعض صورتوں میں ایسا بھی ہوتا ہے کہ اگرچہ ہمیں پہلے سے اس کا علم ہوتا ہے کہ دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمل موجود ہے تاہم اس کا امکان ہے کہ ہم اس تکمل کو معلوم تفاعلوں کی رقموں میں فی الواقع دریافت نہ کر سکیں ۔ ہر صورت کے لیے ایک خاص طریقۂ عمل کی ضرورت ہوتی ہے اور ہم کسی دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمل عمل تفرق کے اپنی سابقہ معلومات کے توسط ہی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ بالفاظ دیگر ہم اس سوال کے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ وہ کونسا تفاعل ہے جس کو اگر تفرق کیا جائے تو دیا ہوا تفرقی جملہ حاصل ہوگا ۔

بدیں وجہ معلوم تکملوں کی جدولیں تیار کر لی جاتی ہیں جو معیاری صورتوں کے نام سے موسوم ہیں۔ کسی دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمل دریافت کرنے کے لیے اس جملہ کا ان معیاری صورتوں سے مقابلہ کر کے دیکھ لیا جاتا ہے کہ آیا وہ ان میں سے کسی ایک کے مماثل ہے کہ نہیں۔ اگر نہیں ہے تو ہم کوشش کرتے ہیں کہ اس کو مختلف طریقوں سے ان معیاری صورتوں میں سے کسی ایک صورت میں تحویل کریں۔ یہ طریقے مشق ہی سے ہاتھ آتے ہیں ۔ اس کتاب کے آئندہ ابواب کا بیشتر حصہ ایسے تفاعلوں کے تکمل پر مشتمل ہوگا جو عملی مسائل کے حل کرنے میں اکثر استعمال ہوتے ہیں ۔

ذیل کے دو قاعدے تفرقی جملوں کو معیاری صورتوں میں تحویل کرنے کے لیے بہت مفید ہیں : ۔

**(ا) تفرقی جملوں کے کسی جبری مجموعہ کا تکمل ان جملوں کے فرداً فرداً تکملوں کا وہی جبری مجموعہ ہے ۔**

**ثبوت** ۔ جملہ ∫ فرد + ∫ فرو - ∫ فرھ کو تفرق کرنے سے (جس میں د، و، ھ ایک واحد متغیر کے تفاعل ہیں ۔

فرد + فرو - فرھ حاصل ہوتا ہے ۔

پس ∫ (فرد + فرو - فرھ) = ∫ فرد + ∫ فرو - ∫ فرھ ...... (1)

(ب) مستقل جزوِ ضربی علامت تکمل کے آگے لکھا جا سکتا ہے یا بعد۔

ثبوت۔ جب ا $\int$ فرو کو تفرق کرنے سے

ا فرو حاصل ہوتا ہے

پس $\int$ ا فرو = ا $\int$ فرو

ذیل میں معیاری ابتدائی صورتوں کی ایک مختصر فہرست لکھی جاتی ہے اس کو بطور تکمل کے ضابطوں کے حفظ کر لینا چاہیے تا کہ ان کے مماثل تکملوں کی تعیین با آسانی ہو سکے:-

معیاری ابتدائی صورتیں (بالفاظِ دیگر تکمل کے ضابطے)

$$(\text{۱})\quad \int \text{و}^{\text{ن}}\,\text{فرو} = \frac{\text{و}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}} + \text{ج} \qquad (\text{ن} \neq -\text{۱})$$

$$\left[\text{چونکہ}\ \text{فر}\left(\frac{\text{و}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}} + \text{ج}\right) = \text{و}^{\text{ن}}\ \text{فرن}\right.$$

$$\text{اس لیے}\quad \int \text{و}^{\text{ن}}\,\text{فرو} = \frac{\text{و}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}} + \text{ج}$$

یہ رابطہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء ن = -۱ کے صحیح ہے۔ کیونکہ جب ن = -۱ تو اس صورت میں صفر پر تقسیم کی ضرورت داعی ہوتی ہے۔ صورت ن = -۱ صورت (۲) میں رونما ہوتی ہے۔ ]

$$(\text{۲})\quad \int \frac{\text{فرو}}{\text{و}} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{و} + \text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{و} + \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ج و}$$

$$\text{جس میں}\ \text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ج}$$

$$(\text{۳})\quad \int \text{ا}^{\text{و}}\,\text{فرو} = \frac{\text{ا}^{\text{و}}}{\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}} + \text{ج}$$

$$(\text{۴})\quad \int \text{و}^{\text{و}}\,\text{فرو} = \text{و}^{\text{و}} + \text{ج}$$

$$(\text{۵})\quad \int \text{جب و}\,\text{فرو} = -\,\text{جم و} + \text{ج}$$

(۶) ∫ جم و فرو = جب و + ج

(۷) ∫ قطا۲ و فرو = مس و + ج

(۸) ∫ قم۲ و فرو = - مم و + ج

(۹) ∫ قطو مس و فرو = قطو + ج

(۱۰) ∫ قم و مم و فرو = - قم و + ج

(۱۱) ∫ مس و فرو = لوکو قطو + ج

[ چونکہ ∫ مس و فرو = ∫ (جب و فرو)/(جم و) = ∫ (-جب و فرو)/(جم و) - ∫ (فر (جم و))/(جم و)

- لوکو جم و + ج = لوکو قطو + ج

کیونکہ - لوک جم و = - لوک (۱)/(قطو) = - لوک ۱ + لوک قطو = لوک قطو ]

(۱۲) ∫ مم و فرو = لوکو جب و + ج

[ کیونکہ ∫ مم و فرو = ∫ (جم و فرو)/(جب و) = ∫ (فر (جب و))/(جب و) = لوکو جب و + ج ]

(۱۳) ∫ قطو فرو = لوکو (قطو + مس و)

[ چونکہ قطو = قطو (قطو + مس و)/(قطو + مس و) = (قطو مس و + قطا۲ و)/(قطو + مس و)

∴ ∫ قطو فرو = ∫ (قطو مس و + قطا۲ و)/(قطو + مس و) فرو = ∫ (فر (قطو + مس و))/(قطو + مس و)

= لوکو (قطو + مس و) + ج ]

(۱۴) ∫ قم و فرو = لوکو (قم و - مم و) + ج

[ چونکہ قم و = قم و (قم و - مم و)/(قم و - مم و)

$$= \frac{-\text{قم و مم و} + \text{قم}^2\text{و}}{\text{قم و} - \text{مم و}}$$

$$\therefore \int \text{قم و فر و} = \int \frac{-\text{قم و مم و} + \text{قم}^2\text{و}}{\text{قم و} - \text{مم و}}\,\text{فر و} = \int \frac{\text{فر}(\text{قم و} - \text{مم و})}{\text{قم و} - \text{مم و}}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}(\text{قم و} - \text{مم و}) + \text{ج} \;]$$

$$(15)\quad \int \frac{\text{فر و}}{\text{و}^2 + \text{ا}^2} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ}\quad \text{فر}\left(\frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}\right) = \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{فر}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)}{\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)^2 + 1} = \frac{\text{فر و}}{\text{و}^2 + \text{ا}^2}\;]$$

$$(16)\quad \int \frac{\text{فر و}}{\text{و}^2 - \text{ا}^2} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{و} - \text{ا}}{\text{و} + \text{ا}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ}\quad \frac{1}{\text{و} - \text{ا}} - \frac{1}{\text{و} + \text{ا}} = \frac{2\text{ا}}{\text{و}^2 - \text{ا}^2} \;\therefore\; \frac{1}{\text{و}^2 - \text{ا}^2} = \frac{1}{2\text{ا}}\left(\frac{1}{\text{و} - \text{ا}} - \frac{1}{\text{و} + \text{ا}}\right)$$

$$\text{پس}\quad \int \frac{\text{فر و}}{\text{و}^2 - \text{ا}^2} = \frac{1}{2\text{ا}}\int \frac{\text{فر و}}{\text{و} - \text{ا}} - \frac{1}{2\text{ا}}\int \frac{\text{فر و}}{\text{و} + \text{ا}}$$

$$= \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}(\text{و} - \text{ا}) - \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}(\text{و} + \text{ا}) = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{و} - \text{ا}}{\text{و} + \text{ا}} + \text{ج}\;]$$

$$(16\,\text{ا})\quad \int \frac{\text{فر و}}{\text{ا}^2 - \text{و}^2} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{ا} + \text{و}}{\text{ا} - \text{و}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ}\quad \frac{1}{\text{ا} + \text{و}} + \frac{1}{\text{ا} - \text{و}} = \frac{2\text{ا}}{\text{ا}^2 - \text{و}^2}\;]$$

نوٹ - (۱۶) اور (۱۶ ا) کے ملاحظہ سے واضح ہے کہ

$$\int \frac{\text{فر و}}{\text{و}^2 - \text{ا}^2} = -\int \frac{\text{فر و}}{\text{ا}^2 - \text{و}^2}$$

$$(17)\quad \int \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2}} = \text{جب}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

[ چونکہ $\text{فر}\left(\text{جبت}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}\right) = \frac{\text{فر}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)^2}} = \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{و}^2}}$

$$\therefore \int \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{و}^2}} = \text{جبت}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج} \;]$$

$$(18) \quad \int \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{و}^2 \pm \text{ا}^2}} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2 \pm \text{ا}^2}\right) + \text{ج}$$

[ فرض کرو $\text{و} = \text{ا مس ی}$ جس میں ی ایک نیا متغیر ہے

عمل تفرق سے $\text{فر و} = \text{ا قط}^2\text{ی فر ی}$ پس بذریعۂ ابدال

$$\int \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{و}^2+\text{ا}^2}} = \int \frac{\text{ا قط}^2\text{ی فر ی}}{\sqrt{\text{ا}^2\text{مس}^2\text{ی} + \text{ا}^2}} = \int \frac{\text{قط}^2\text{ی فر ی}}{\sqrt{\text{مس}^2\text{ی}+1}}$$

$= \int \text{قط ی فر ی} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{قط ی} + \text{مس ی}\right) + \text{ج}$ .... از روئے (۱۳)

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{مس ی} + \sqrt{\text{مس}^2\text{ی}+1}\right) + \text{ج}$$

لیکن $\text{مس ی} = \frac{\text{و}}{\text{ا}}$ پس $\int \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{و}^2+\text{ا}^2}}$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \sqrt{\frac{\text{و}^2}{\text{ا}^2}+1}\right) + \text{ج}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{و} + \sqrt{\text{و}^2+\text{ا}^2}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ا} + \sqrt{\text{و}^2+\text{ا}^2}\right) - \text{لوک}_{\text{و}}\text{ا} + \text{ج}$$

$\text{ج} = -\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا} + \text{ج}$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے رابطہ

$$\int \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{و}^2+\text{ا}^2}} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2+\text{ا}^2}\right) + \text{ج}$$

اس طرح $\text{و} = \text{ا قط ی}$ فرض کرنے سے $\text{فر و} = \text{ا قط ی مس ی فر ی}$

اور $\int \frac{\text{فر و}}{\sqrt{\text{و}^2-\text{ا}^2}} = \int \frac{\text{ا قط ی مس ی فر ی}}{\sqrt{\text{ا}^2\text{قط}^2\text{ی} - \text{ا}^2}} = \int \text{قط ی فر ی}$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}(\text{قط ی} + \text{مس ی}) + \text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{قط ی} + \sqrt{\text{قط}^{۲}\text{ی} - ۱}\right) + \text{ج}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \sqrt{\frac{\text{و}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - ۱}\right) + \text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^{۲} - \text{ا}^{۲}}\right) + \text{ج} \; ]$$

(۱۹) $\int \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{و}^{۲}} \; \text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{و}^{۲}} + \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \text{جب}^{-۱} \frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$

[ فرض کرو $\text{و} = \text{ا جب ی} \; \therefore \; \text{فرو} = \text{ا جم ی فری}$

اور $\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{و}^{۲}} = \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{جب}^{۲}\text{ی}} = \text{ا جم ی}$

پس $\int \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{و}^{۲}} \; \text{فرو} = \text{ا}^{۲} \int \text{جم}^{۲}\text{ی فری} = \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \int (\text{جم ۲ی} + ۱) \; \text{فری}$

$$= \frac{\text{ا}^{۲}}{۴} \text{جب ۲ی} + \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \text{ی} + \text{ج}$$

و کی رقموں میں نتیجہ حاصل کرنے کے لیے، چونکہ $\text{ی} = \text{جب}^{-۱} \frac{\text{و}}{\text{ا}}$ اور $\text{جب ۲ ی}$

$$= \text{۲ جب ی جم ی} = ۲ \frac{\text{و}}{\text{ا}} \frac{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{و}^{۲}}}{\text{ا}}$$

اس لیے عمل ابدال سے آخری جملہ $= \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{و}^{۲}} + \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \text{جب}^{-۱} \frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$ ]

(۲۰) $\int \sqrt{\text{و}^{۲} \pm \text{ا}^{۲}} \; \text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{و}^{۲} \pm \text{ا}^{۲}} \pm \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^{۲} \pm \text{ا}^{۲}}\right) + \text{ج}$

[ $\text{و} = \text{ا مس ی}$ لکھنے سے بہ آسانی معلوم ہو جاتا ہے کہ

(ا)' $\int \sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}} \; \text{فرو} = \int (\text{ا قط ی}) \, \text{ا قط}^{۲}\text{ی فری} = \text{ا}^{۲} \int \text{قط}^{۳}\text{ی فری}$

آگے چل کر ہم بتائینگے کہ

(ب)' $\int \text{قط}^{۳}\text{ی فری} = \frac{۱}{۲} \text{قط ی مس ی} + \frac{۱}{۲} \text{لوک}(\text{قط ی} + \text{مس ی}) + \text{ج}$

چونکہ $\text{مس ی} = \frac{\text{و}}{\text{ا}}$ اور $\text{قط ی} = \frac{\sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}}}{\text{ا}}$ اس لیے (ا) اور (ب) سے حاصل ہوتا ہے

(ج)' $\int \sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}} \; \text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \text{لوک}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}}\right) + \bar{\text{ج}}$

جس میں $\bar{\text{ج}} = \text{ج} - \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \text{لوک ا}$۔ پس رابطہ (۲۰) مستنبط ہو جاتا ہے جبکہ مثبت علامت لی جاتی ہے یعنے $\int \sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}} \; \text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ا}^{۲}}{۲} \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^{۲} + \text{ا}^{۲}}\right) + \text{ج}$

منفی علامت کے ساتھ رابطہ (۲۰) ثابت کرنے کے لیے و = ا قطا ی لکھا جائے تو حاصل ہوگا

$$(\text{د})\ \int\sqrt{\text{و}^2-\text{ا}^2}\ \text{فرو} = \int(\text{ا مس ی})\ \text{ا قطا ی مس ی فری}$$

$$= \text{ا}^2\int \text{مس}^2\text{ی قطا ی فری}$$

$$= \text{ا}^2\int \text{قطا}^3\text{ی فری} - \text{ا}^2\int \text{قطا ی فری}$$

(د) کا (ب) سے مقابلہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$(\text{ه})\ \int\sqrt{\text{و}^2-\text{ا}^2}\ \text{فرو} = \frac{\text{ا}^2}{۲}\text{قطا ی مس ی} - \frac{\text{ا}^2}{۲}\text{لوک}(\text{قطا ی} + \text{مس ی}) + \text{ج}$$

لیکن قطا ی $= \frac{\text{و}}{\text{ا}}$ اور اس لیے مس ی $= \frac{\sqrt{\text{و}^2-\text{ا}^2}}{\text{ا}}$ اس طرح (ه) میں عمل ابدال سے حاصل ہوتا ہے $\int\sqrt{\text{و}^2-\text{ا}^2}\ \text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{و}^2-\text{ا}^2} - \frac{\text{ا}^2}{۲}\text{لوک}_\text{و}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2-\text{ا}^2}\right) + \text{ج}$ ]

## معیاری صورتوں (۱) اور (۲) سے متعلق توضیحی مثالیں

مندرجہ ذیل کو مکمل کرو:-

$$(۱)\ \int(۶\,\text{لا}^3 + ۳\,\text{لا}^2 - ۴\,\text{لا} + ۵)\ \text{فرلا}$$

$$= \int ۶\,\text{لا}^3\,\text{فرلا} + \int ۳\,\text{لا}^2\,\text{فرلا} - \int ۴\,\text{لا}\,\text{فرلا} + \int ۵\,\text{فرلا}$$

$$= ۶\int \text{لا}^3\,\text{فرلا} + ۳\int \text{لا}^2\,\text{فرلا} - ۴\int \text{لا}\,\text{فرلا} + ۵\int \text{فرلا}$$

$$= \frac{۶\,\text{لا}^4}{۴} + \frac{۳\,\text{لا}^3}{۳} - \frac{۴\,\text{لا}^2}{۲} + ۵\,\text{لا} + \text{ج}$$

$$= \frac{۳\,\text{لا}^4}{۲} + \text{لا}^3 - ۲\,\text{لا}^2 + ۵\,\text{لا} + \text{ج}$$

$$(۲)\ \int\left(\frac{۲\,\text{ا}}{\sqrt[3]{\text{لا}}} - \frac{۳\,\text{ب}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}}} + ۲\,\text{ج}\sqrt[3]{\text{لا}^2}\right)\text{فرلا}$$

$$= \int ۲\,\text{ا}\,\text{لا}^{-\frac{1}{3}}\,\text{فرلا} - \int ۳\,\text{ب}\,\text{لا}^{-\frac{3}{2}}\,\text{فرلا} + \int ۲\,\text{ج}\,\text{لا}^{\frac{2}{3}}\,\text{فرلا}$$

$$= \text{۲ا} \int \text{لا}^{-\frac{۱}{۲}}\,\text{فزلا} - \text{۳ب} \int \text{لا}^{\frac{۱}{۲}}\,\text{فزلا} + \text{۲ج} \int \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فزلا}$$

$$= \text{۲ا}\,\frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} - \text{۳ب}\,\frac{\text{لا}^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + \text{۲ج}\,\frac{\text{لا}^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}} + \text{ج}$$

$$= \text{۴ا}\,\text{لا}^{\frac{۱}{۲}} - \text{۲ب}\,\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۴}{۵}\,\text{ج}\,\text{لا}^{\frac{۵}{۲}} + \text{ج}$$

$$\int (\text{ب}^۲ - \text{ا}^۲\,\text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}\,\text{لا}\,\text{فزلا}$$

اس تکمل کو معیاری صورت (۱) میں تبدیل کر لیتے ہیں۔ چنانچہ $\text{و} = (\text{ب}^۲ - \text{ا}^۲\text{لا}^۲)$

$\frac{۳}{۲}$ اور $\text{فرو} = -\,\text{۲ا}^۲\,\text{لا}\,\text{فزلا}$

$$\text{ل} = -\int \frac{\text{و}^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرو}}{\text{۲ا}^۲} = -\frac{۱}{\text{۲ا}^۲}\int \text{و}^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرو} = -\frac{۱}{\text{۲ا}^۲}\,\frac{\text{و}^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}} + \text{ج}$$

$$= -\frac{۱}{\text{۵ا}^۲}\,\text{و}^{\frac{۵}{۲}} + \text{ج}$$

$$= -\frac{(\text{ب}^۲ - \text{ا}^۲\text{لا}^۲)^{\frac{۵}{۲}}}{\text{۵ا}^۲} + \text{ج}$$

$$\int \frac{\text{۳لا} + ۱}{\text{۳لا} - ۲}\,\text{فزلا}$$

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ عمل تقسیم سے جملہ $\frac{\text{۳لا}+۱}{\text{۳لا}-۲}$ تکمل کے لیے آسان تر

یاری صورت (۲) کے مشابہ ہو جاتا ہے:—

نچہ تکمل $= \int\left(۱ + \frac{۵}{\text{۳لا}-۲}\right)\text{فزلا} = \int \text{فزلا} + \int \frac{۵}{\text{۳لا}-۲}$

$$\ldots + \frac{۵}{۳}\int \frac{\text{۳فزلا}}{\text{۳لا}-۲} = \int \text{فزلا} + \frac{۵}{۳}\int \frac{\text{فر}(\text{۳لا}-۲)}{\text{۳لا}-۲}$$

$$= \text{لا} + \frac{۵}{۳}\,\text{لوک}\,(\text{۳لا}-۲) + \text{ج}$$

$$= \text{لا} + \text{لوک}\,(\text{۳لا}-۲)^{\frac{۵}{۳}} + \text{ج}$$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل کو معیاری صورت $\int و^{ن} \, فرو$ میں تحویل کرکے تکمیل کرو:-

(۱) $\int (ا+لا)^2 \sqrt{لا}\, فرلا$ — جواب $= \frac{۲}{۳} ا^2 لا^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۴}{۵} ا لا^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۷} لا^{\frac{۷}{۲}} + ج$

(۲) $\int \frac{(لا+۱)\, فرلا}{(لا^2+۲لا+۳)^3}$ — " $= -\frac{۱}{۴}(لا^2+۲لا+۳)^{-۲} + ج$

(۳) $\int (ا^{لا}+ب)^2 ا^{لا}\, فرلا$ — " $= \frac{۱}{۳\, لوک\, ا}(ا^{لا}+ب)^3 + ج$

(۴) $\int \frac{و^{لا} - و^{-لا}}{(و^{لا}+و^{-لا})^2}\, فرلا$ — " $= -\frac{۱}{و^{لا}+و^{-لا}} + ج$

(۵) $\int \frac{مس^{-۱}لا\, فرلا}{۱+لا^2}$ — " $= \frac{۱}{۲}(مس^{-۱}لا)^2 + ج$

(۶) $\int \frac{لوک^3 لا\, فرلا}{لا}$ — " $= \frac{۱}{۴} لوک^4 لا + ج$

(۷) $\int جم^4 ۲لا\, جب\, ۲لا\, فرلا$ — " $= -\frac{۱}{۱۰} جم^5 ۲لا + ج$

مندرجہ ذیل کو معیاری صورت $\int \frac{فرو}{و}$ میں تحویل کرکے تکمیل کرو:-

(۸) $\int \frac{(۳لا+۱)\, فرلا}{۳لا^2+۲لا-۱}$ — جواب $= \frac{۱}{۲} لوک(۳لا^2+۲لا-۱) + ج$

(۹) $\int \frac{لا\sqrt{لا^2-۱}}{(لا^2-۱)^{\frac{۳}{۲}}-۴}\, فرلا$ — " $= \frac{۱}{۳} لوک\left[(لا^2-۱)^{\frac{۳}{۲}}-۴\right] + ج$

(۱۰) $\int \frac{جب\, ط\, فرط}{۲\, جم\, ط+۳}$ — " $= -\frac{۱}{۲} لوک(۲\, جم\, ط+۳) + ج$

(۱۱) $\int \frac{فرط}{(۱+ط^2)\, مس^{-۱}ط}$ — " $= لوک\, مس^{-۱}ط + ج$

(۱۲) $\int \frac{فرط}{(۴-ط^2)^{\frac{۱}{۲}}\, جب^{-۱}\frac{ط}{۲}}$ — " $= لوک\, جب^{-۱}\frac{ط}{۲} + ج$

## معیاری صورتوں (۳) اور (۴) سے متعلق توضیحی مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) $\int ا ب^{۲لا}$ فرلا $= \frac{ا ب^{۲لا}}{۲\ لوک\ ب} +$ ج

۲لا = و لکھو تب فرو = ۲ فرلا اور $\int ا ب^{۲لا}$ فرلا $= \frac{۱}{۲} \int ا ب^{۲لا}$ فر(۲لا)

$= \frac{ا}{۲} \int ب^{و}$ فرو $= \frac{ا}{۲} \frac{ب^{و}}{لوک\ ب} = \frac{ا}{۲} \frac{ب^{۲لا}}{لوک\ ب} +$ ج

(۲) $\int \frac{و^{\sqrt{لا}}\ فرلا}{\sqrt{لا}} = ۲ و^{\sqrt{لا}} +$ ج

فرض کرو $\sqrt{لا}$ = و، فرو = $\frac{۱}{۲\sqrt{لا}}$ فرلا

∴ دیا ہوا تکمل = $\int \frac{و^{و}}{\sqrt{لا}} (۲\sqrt{لا}\ فرو) = ۲ \int و^{و}$ فرو = ۲ و^و + ج

$= ۲ و^{\sqrt{لا}} +$ ج

# مثالیں

مندرجۂ ذیل کو معیاری صورتوں $\int ا^{و}$ فرو، $\int و^{و}$ فرو میں تحویل کر کے تکمل کرو :-

(۱) $\int \frac{\sqrt{م} و^{\sqrt{م^۲ + ی^۲}}}{\sqrt{م^۲ + ی^۲}}$ فرم جواب = $و^{\sqrt{م^۲ + ی^۲}}$ + ج

(۲) $\int (۳ و)^{مس\ لا}$ قط^۲ لا فرلا " = $\frac{(۳ و)^{مس\ لا}}{۱ + لوک_{و} ۳} +$ ج

(۳) $\int \frac{ب^{۱/لا} و^{۱/لا}\ فرلا}{لا^۲}$ " = $-\frac{(ب و)^{۱/لا}}{۱ + لوک_{و} ب} +$ ج

(۴) $\int ا^{لا} و^{لا}$ فرلا " = $\frac{ا^{لا} و^{لا}}{۱ + لوک_{و} ا} +$ ج

(۵) $\int (م - ۱) و^{م^۲ - ۲م}$ فرم " = $\frac{۱}{۲} و^{م^۲ - ۲م} +$ ج

# معیاری صورتوں (۵) تا (۱۴) سے متعلق مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم}(\text{۲لا}+۱)} = -\frac{۱}{۲}\,\text{جم}(\text{۲لا}+۱) + \text{ج}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم}^{۲}\sqrt{۳}\,\text{لا}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}\,\sqrt{۳}\,\text{لا} + \text{ج}$

(۳) $\int (\text{لا}-۱)\,\text{جب}(\text{۲لا}^{۲}-\text{۴لا}+۱)\,\text{فرلا} = -\frac{۱}{۴}\,\text{جم}(\text{۲لا}^{۲}-\text{۴لا}+۱) + \text{ج}$

(۴) $\int (\text{مس}\,\text{۲لا}-۱)^{۲}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{مس}\,\text{۲لا} + \text{لوک}\,\text{جم}\,\text{۲لا} + \text{ج}$

(۵) $\int \frac{\text{قط}^{۲}\,\text{لا}\ \text{فرلا}}{۱+\text{مس}\,\text{لا}} = \text{لوک}\,(۱+\text{مس}\,\text{لا}) + \text{ج}$

(۶) $\int \text{قم}^{۲}(\text{لوک}\,\text{لا}^{۲})\,\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = -\frac{۱}{۲}\,\text{مم}(\text{لوک}\,\text{لا}^{۲}) + \text{ج}$

(۷) $\int \frac{\text{فرط}}{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲}} = \text{لوک}\left(\text{قم}\,\frac{\text{ط}}{۲} - \text{مم}\,\frac{\text{ط}}{۲}\right) + \text{ج}$

(۸) $\int \frac{\text{جب}(\text{مس}^{-۱}\,\text{لا})\,\text{فرلا}}{۱+\text{لا}} = -\text{جم}(\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}) + \text{ج}$

(۹) $\int \text{قم}\sqrt{\text{لا}}\ \text{مم}\sqrt{\text{لا}}\ \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = -۲\,\text{قم}\sqrt{\text{لا}} + \text{ج}$

(۱۰) $\int \frac{\text{مس}\,\text{۲ط}}{\text{جم}\,\text{۲ط}}\,\text{فرط} = \frac{۱}{۲}\,\text{قط}\,\text{۲ط} + \text{ج}$

(۱۱) $\int \text{مس}\,\text{۲لا}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\text{قط}\,\text{۲لا} + \text{ج}$

(۱۲) $\int \text{لا}\,\text{قط}\,\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{قط}\,\text{لا}^{۲} + \text{مس}\,\text{لا}^{۲}) + \text{ج}$

$$(\text{۱۳})\quad \int \text{قم}\,\sqrt{\text{۳}}\,\text{لا فرلا} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}\,\text{لوک}\left(\text{قم}\,\sqrt{\text{۳}}\,\text{لا} - \text{مم}\,\sqrt{\text{۳}}\,\text{لا}\right) + \text{ج}$$

$$(\text{۱۴})\quad \int \text{۲ مم ۲لا فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک جب ۲لا} + \text{ج}$$

$$(\text{۱۵})\quad \int \frac{\text{قط}^{\text{۲}}\,\text{لا فرلا}}{\sqrt{\text{مس}^{\text{۲}}\,\text{لا} + \text{۲}}} = \text{لوک}\left(\text{مس لا} + \sqrt{\text{مس}^{\text{۲}}\,\text{لا} + \text{۲}}\right) + \text{ج}$$

## بقیہ یعنی (۱۵) سے (۲۰) تک کی معیاری صورتوں سے متعلق توضیحی مثالیں

تکمل کرو:-

$$(\text{۱})\quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۱}}$$ یہ معیاری صورت (۱۵) کے مشابہ ہے

$$\text{اور} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\int \frac{\text{فر}(\sqrt{\text{۲}}\,\text{لا})}{(\sqrt{\text{۲}}\,\text{لا})^{\text{۲}} + \text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\sqrt{\text{۲}}\,\text{لا} + \text{ج}$$

$$(\text{۲})\quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{۹لا}^{\text{۲}} - \text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\int \frac{\text{فر}(\text{۳لا})}{(\text{۳لا})^{\text{۲}} - \text{۱}}$$ یہ مشابہ ہے معیاری صورت (۱۶) کے

$$\text{اور} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{۳لا} - \text{۱}}{\text{۳لا} + \text{۱}} + \text{ج} = \frac{\text{۱}}{\text{۶}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{۳لا} - \text{۱}}{\text{۳لا} + \text{۱}} + \text{ج}$$

$$(\text{۳})\quad \int \frac{\text{۲ فرھ}}{\text{۳} - \text{۸ھ}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۸}}}\int \frac{\text{فر}\sqrt{\text{۸}}\,\text{ھ}}{(\sqrt{\text{۳}})^{\text{۲}} - (\sqrt{\text{۸}}\,\text{ھ})^{\text{۲}}}$$ جو مشابہ ہے معیاری صورت ۱۶(ا) کے

$$\text{اور} = \frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۸}}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۳}}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\sqrt{\text{۳}} + \sqrt{\text{۸}}\,\text{ھ}}{\sqrt{\text{۳}} - \sqrt{\text{۸}}\,\text{ھ}} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۶}}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\sqrt{\text{۳}} + \sqrt{\text{۸}}\,\text{ھ}}{\sqrt{\text{۳}} - \sqrt{\text{۸}}\,\text{ھ}} + \text{ج}$$

$$(\text{۴})\quad \int \frac{\text{۴ لا فرلا}}{\sqrt{\text{۲} - \text{لا}^{\text{۴}}}} = \frac{\text{۴}}{\text{۲}}\int \frac{\text{فر}(\text{لا}^{\text{۲}})}{\sqrt{\text{۲} - (\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}}$$ جو مشابہ ہے معیاری صورت (۱۷) کے

$$\text{اور} = ۲\,\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا}^{۲}}{\sqrt{۲}} + \text{ج}$$

(۵) $\int\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱۱-۶\text{لا}+\text{لا}^{۲}}} = \int\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}-۳)^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}}}$ جو مشابہ ہے معیاری صورت (۱۸) کے

$$\text{اور} = \text{لوک}_{\text{و}}\left\{(\text{لا}-۳)+\sqrt{(\text{لا}^{۲}-۶\text{لا}+۹)+۲}\right\} + \text{ج}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\left\{(\text{لا}-۳)+\sqrt{\text{لا}^{۲}-۶\text{لا}+۱۱}\right\} + \text{ج}$$

(۶) $\int\sqrt{۴-۹\text{لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۳}\int\sqrt{(۲)^{۲}-(۳\text{لا})^{۲}}\ \text{فر}(۳\text{لا})$

یہ مشابہ ہے معیاری صورت (۱۹) کے

$$\text{اور} = \frac{۱}{۳}\left\{\frac{۳\text{لا}}{۲}\sqrt{۴-۹\text{لا}^{۲}} + \frac{۴}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\frac{۳\text{لا}}{۲}\right\} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{۴-۹\text{لا}^{۲}} + \frac{۲}{۳}\,\text{جب}^{-۱}\frac{۳\text{لا}}{۲} + \text{ج}$$

(۷) $\int\sqrt{\text{ہ}\text{لا}^{۲}\pm ۳\text{و}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ہ}}}\int\frac{\text{فر}(\sqrt{\text{ہ}}\,\text{لا})}{\sqrt{\text{ہ}\text{لا}^{۲}\pm ۳\text{و}^{۲}}}$

یہ مشابہ ہے معیاری صورت (۲۰) کے

$$\text{اور} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ہ}}}\left\{\frac{\sqrt{\text{ہ}}\,\text{لا}}{۲}\sqrt{\text{ہ}\text{لا}^{۲}\pm ۳\text{و}^{۲}} \pm \frac{۳\text{و}^{۲}}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\sqrt{\text{ہ}}\,\text{لا}+\sqrt{\text{ہ}\text{لا}^{۲}\pm ۳\text{و}^{۲}}\right)\right\} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{\text{ہ}\text{لا}^{۲}\pm ۳\text{و}^{۲}} \pm \frac{۳\text{و}^{۲}}{۲\sqrt{\text{ہ}}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\sqrt{\text{ہ}}\,\text{لا}+\sqrt{\text{ہ}\text{لا}^{۲}\pm ۳\text{و}^{۲}}\right) + \text{ج}$$

[نوٹ (۱) طالب علم نے دیکھ لیا ہوگا کہ معیاری صورت ۱۶ اور ۱۶ (ا) کے تکملوں میں $\int\frac{\text{فرو}}{\text{ا}^{۲}-\text{و}^{۲}} = -\int\frac{\text{فرو}}{\text{و}^{۲}-\text{ا}^{۲}}$ کا رشتہ ہے۔ پس ان میں سے حسب ضرورت کسی ایک صورت کا ضابطہ استعمال ہو سکتا ہے۔ جہاں تک ممکن ہو ایک ہی صورت کا ضابطہ استعمال کرنا مناسب ہے۔

نوٹ (۲) طالب علم کو بطور خود حسب ذیل ضابطہ اخذ کرنے میں کوئی دقت نہ ہونی چاہئے۔

$$\int\frac{\text{فرو}}{\text{و}^{۲}+\text{ا}^{۲}} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج} = -\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مم}^{-۱}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

$$\int \frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2}} = \text{جب}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{جم}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

اور $$\int \frac{\text{فرو}}{\text{و}\sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2}} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{قط}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{قم}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$ ]

# مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) $$\int \frac{\text{فرو}}{\text{لا}^2 + 2\text{لا} + 5} = \frac{1}{2}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+1}{2} + \text{ج}$$

[اشارہ $\text{لا}^2 + 2\text{لا} + 5 = \text{لا}^2 + 2\text{لا} + 1 + 4 = (\text{لا}+1)^2 + (2)^2$ ]

(۲) $$\int \frac{2\,\text{فرلا}}{\sqrt{2 + \text{لا} - \text{لا}^2}} = 2\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{2\text{لا}-1}{3}\right) + \text{ج}$$

(۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{3\text{لا}^2 + 4\text{لا} - 7} = \frac{1}{10}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{3\text{لا}-3}{3\text{لا}+7}\right) + \text{ج}$$

(۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{9\text{لا}^2 - 6\text{لا} - 8} = \frac{1}{18}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{3\text{لا}-4}{3\text{لا}+2}\right) + \text{ج}$$

(۵) $$\int \frac{8\,\text{فرو}}{16\text{و}^2 + 8\text{و} + 9} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{4\text{و}+1}{2\sqrt{2}}\right) + \text{ج}$$

(۶) $$\int \frac{2\,\text{فرلا}}{\sqrt{5 - 4\text{لا} - 3\text{لا}^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{3\text{لا}+2}{\sqrt{19}}\right) + \text{ج}$$

(۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{7\text{لا} + 4\text{لا}^2}} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \frac{7}{8} + \sqrt{\text{لا}^2 + \frac{7\text{لا}}{4}}\right) + \text{ج}$$

(۸) $$\int \frac{(3\text{لا}-2)\,\text{فرلا}}{\sqrt{1 - 6\text{لا} - 9\text{لا}^2}} = -\frac{1}{9}\,\text{لوک}\left(1 - 6\text{لا} - 9\text{لا}^2\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{لوک}\left(\frac{3\text{لا}+1-\sqrt{2}}{3\text{لا}+1+\sqrt{2}}\right) + \text{ج}$$

(۹) $$\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{\sqrt{27 + 6\text{لا} - \text{لا}^2}} = \sqrt{27 + 6\text{لا} - \text{لا}^2} + 3\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{لا}-3}{6}\right) + \text{ج}$$

(۱۰) $\int \frac{(۳لا-۲)\,فرلا}{\sqrt{۴لا^۲-۴لا+۵}} = \frac{۳}{۴}\sqrt{۴لا^۲-۴لا+۵}$
$- \frac{۱}{۴}$ لوک $\left(۲لا-۱+\sqrt{۴لا^۲-۴لا+۵}\right)+$ ج

(۱۱) $\int \sqrt{۵-۳لا^۲}$ فرلا $= \frac{لا}{۲}\sqrt{۵-۳لا^۲}+\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}$ جب$^{-۱}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ لا + ج

(۱۲) $\int \sqrt{۳لا^۲+۴لا-۷}$ فرلا $= \frac{۱}{۶}(۳لا+۲)\sqrt{۳لا^۲+۴لا-۷}$
$-\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۱۸}$ لوک $\left(۳لا+۲+\sqrt{۹لا^۲+۱۲لا-۲۱}\right)+$ ج

(۱۳) $\int \frac{(۸-۳لا)\,فرلا}{\sqrt{۱۲لا-۴لا^۲-۵}} = ۲\sqrt{۱۲لا-۴لا^۲-۵}+\frac{۹}{۲}$ جب$^{-۱}\left(\frac{۲لا-۳}{۲}\right)+$ ج

(۱۴) $\int \sqrt{۱۰-۴لا+۴لا^۲}$ فرلا $= \frac{۲لا-۱}{۴}\sqrt{۱۰-۴لا+۴لا^۲}$
$+\frac{۹}{۴}$ لوک $\left(۲لا-۱+\sqrt{۱۰-۴لا+۴لا^۲}\right)+$ ج

(۱۵) $\int \frac{(۲لا+۵)\,فرلا}{لا^۲+۲لا+۵} =$ لوک $(لا^۲+۲لا+۵)+\frac{۳}{۲}$ مس$^{-۱}\frac{(لا+۱)}{۲}+$ ج

## ۳۔ مثلثی تفرقے (Trigonometric differential)

بعض مثلثی تفرقے بکثرت استعمال ہوتے ہیں اور ساتھ ہی اس کے سادہ مثلثی تحویل کے ذریعہ معیاری صورتوں میں ڈھالے جاکر بآسانی تکمل کیے جاسکتے ہیں۔ یہاں ہم ان تفرقوں اور ان کے تکمل کے طریقوں پر غور کرینگے۔

### مثال ا جب$^م$ د جم$^ن$ د فر د کی تعین

جبکہ م یا ن میں سے کوئی ایک مثبت طاق صحیح عدد ہوتا ہے (علی الرغم اس کے کہ دوسرا عدد خواہ کچھ ہی ہو) یہ تکمل سادہ استحالوں کے ذریعہ معیاری صورت (ا) یعنی

$$\int و^ن \, فرو = \frac{و^{ن+۱}}{ن+۱} + ج$$

میں تبدیل کر کے عمل میں لایا جا سکتا ہے۔

مثلاً اگر م طاق ہے تو ہم لکھتے ہیں $\text{جب}^{\text{م}}\,\text{ء} = \text{جب}^{\text{م}-۱}\,\text{ء}\ \text{جب}\,\text{ء}$

پس چونکہ م - ۱ جفت ہے تو مساوات کے بائیں جانب کے رکن کی پہلی رقم $\text{جب}^{۲}\,\text{ء}$ کی کوئی طاقت ہوگی اور بذریعہ ضابطہ $\text{جب}^{۲}\,\text{ء} = ۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{ء}$ اس کو ہم جم ء کی طاقتوں میں ظاہر کر سکینگے۔ اس لیے تکملہ مذکور صورت ذیل میں لکھا جا سکیگا:

(۱) $\int$ (مجموعہ جس میں جم ء کی رقمیں شامل ہونگی) جب ء فر ء

اور چونکہ جب ء فر ء = - فر (جم ء) ہر رقم جس کو تکمل کرنا ہوگا بصورت $\text{و}^{\text{ن}}$ فر و ہوگی جس میں و = جم ء

اس طرح اگر ن ایک طاق عدد ہے تو $\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ء} = \text{جم}^{\text{ن}-۱}\,\text{ء}\ \text{جم}\,\text{ء}$ لکھو اور $\text{جم}^{۲}\,\text{ء} = ۱ - \text{جب}^{۲}\,\text{ء}$ تعویض کرو۔ تب تکملہ بصورت

(۲) $\int$ (مجموعہ جس میں جب ء کی رقمیں شامل ہونگی) جم ء فر ء

اور چونکہ جم ء فر ء = - فر (جب ء) ہر رقم جس کو تکمل کرنا ہوگا بصورت $\text{و}^{\text{ن}}$ فر و ہوگی جس میں و = جب ء

**توضیحی مثال (۱)** $\int \frac{\text{جب}^{۵}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{جم}\,\text{لا}}}$ دریافت کرو۔

حل۔ $\text{تکملہ} = \int (\text{جب}^{۲}\,\text{لا})^{۲}\ \text{جب}\,\text{لا}\ (\text{جم}\,\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}}\ \text{فر}\,\text{لا}$

$$= \int (۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{لا})^{۲}\ \text{جب}\,\text{لا}\ (\text{جم}\,\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}}\ \text{فر}\,\text{لا}$$

$$= \int (۱ - ۲\,\text{جم}^{۲}\,\text{لا} + \text{جم}^{۴}\,\text{لا})\ \text{جب}\,\text{لا}\ (\text{جم}\,\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}}\ \text{فر}\,\text{لا}$$

$$= \int \left\{ (\text{جم}\,\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}} - ۲\,(\text{جم}\,\text{لا})^{\frac{۳}{۲}} + (\text{جم}\,\text{لا})^{\frac{۷}{۲}} \right\} \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فر}\,\text{لا}$$

$$= -\int \left\{ (\text{جم}\,\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}} - ۲\,(\text{جم}\,\text{لا})^{\frac{۳}{۲}} + (\text{جم}\,\text{لا})^{\frac{۷}{۲}} \right\} \text{فر}\,(\text{جم}\,\text{لا})$$

$$= -\left\{ \frac{(\text{جم}\,\text{لا})^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} - ۲\,\frac{(\text{جم}\,\text{لا})^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}} + \frac{(\text{جم}\,\text{لا})^{\frac{۹}{۲}}}{\frac{۹}{۲}} \right\} + \text{ج}$$

$$= -\text{۲}\left(\text{جم لا}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\left(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\text{لا} + \frac{\text{جم}^{\text{۴}}\text{لا}}{\text{۹}}\right) + \text{ج}$$

$$= -\text{۲}\sqrt{\text{جم لا}}\left(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\text{لا} + \frac{\text{جم}^{\text{۴}}\text{لا}}{\text{۹}}\right) + \text{ج}$$

**توضیحی مثال (۲)** $\int \frac{\text{مس}^{\text{۳}}\text{و}}{\text{قط}^{\text{۲}}\text{و}}\,\text{فرو}$ دریافت کرو

حل۔ تکملہ $= \int \text{مس}^{\text{۳}}\text{و جم}^{\text{۲}}\text{و فرو} = \int \text{جب}^{\text{۳}}\text{و جم}^{-\text{۱}}\text{و فرو}$

$$= \int \text{جب}^{\text{۲}}\text{و جب و جم}^{-\text{۱}}\text{و فرو} = \int\left(\text{۱}-\text{جم}^{\text{۲}}\text{و}\right)\text{جب و}\left(\text{جم و}\right)^{-\text{۱}}\text{فرو}$$

$$= \int \text{جب و جم}^{-\text{۱}}\text{و فرو} - \int \text{جم و جب و فرو}$$

$$= -\int\left(\text{جم و}\right)^{-\text{۱}}\text{فر}\left(\text{جم و}\right) + \int \text{جم و فر}\left(\text{جم و}\right)$$

$$= -\int \frac{\text{فر}\left(\text{جم و}\right)}{\text{جم و}} + \frac{\left(\text{جم و}\right)^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \text{ج}$$

$$= -\text{لوک جم و} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\text{و} + \text{ج}$$

**توضیحی مثال (۳)** $\int \text{جم}^{\text{۳}}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\,\text{فرلا}$ دریافت کرو

حل۔ تکملہ $= \int \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\,\text{جم}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\,\text{فرلا} = \int\left(\text{۱}-\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\right)\text{جم}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\,\text{فرلا}$

$$= \int\left(\text{جم}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}} - \text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\,\text{جم}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\int \text{جم}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\,\text{فر}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}} - \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\int\left(\text{جب}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\right)^{\text{۲}}\text{فر}\left(\text{جب}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\right)$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\,\text{جب}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}} - \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\cdot\frac{\left(\text{جب}\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\right)^{\text{۳}}}{\text{۳}} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\,\text{جب}\left(\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\right) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۳}}\left(\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}}\right) + \text{ج}$$

## مثالیں

مندرجۂ ذیل نتائج حاصل کرو:۔

(۱) ∫ جب$^{۲}$ لا جم$^{۵}$ لا فرلا = جب$^{۳}$ لا/۳ − ۲جب$^{۵}$ لا/۵ + جب$^{۷}$ لا/۷ + ج

(۲) ∫ (جب ۲لا / جم$^{۳}$ ۲لا) فرلا = ۱/۴ قط$^{۲}$ ۲لا + ج

(۳) ∫ جب$^{۳}$ ۳ا √(جم ۳ا) فرا = ۲/۲۱ جم$^{۷/۲}$ ۳ا − ۲/۹ جم$^{۳/۲}$ ۳ا + ج

(۴) ∫ (مس لا / √(قط لا)) فرلا = − ۲ √(جم لا) + ج

(۵) ∫ جب$^{۵}$ (ط/۵) فرط = ۱۰/۳ جم$^{۳}$ (ط/۵) − ۵ جم (ط/۵) − جم$^{۵}$ (ط/۵) + ج

## (ب) ∫ مس$^{ن}$ ی فری یا ∫ مم$^{ن}$ ی فری کی تعیین

ان صورتوں کا تکمل سابقہ صورت یعنے (۱) کے تکمل کے لیے جو طریقہ اختیار کیا گیا تھا اس کے مشابہ طریقہ سے بآسانی دریافت ہوسکتا ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہے، چنانچہ

∫ مس$^{ن}$ ی فری = ∫ مس$^{ن-۲}$ ی مس$^{۲}$ ی = ∫ مس$^{ن-۲}$ ی (قط$^{۲}$ ی − ۱) فری

= ∫ مس$^{ن-۲}$ ی قط$^{۲}$ ی − ∫ مس$^{ن-۲}$ ی فری

= ∫ مس$^{ن-۲}$ ی فر(مس ی) − ∫ مس$^{ن-۴}$ ی (قط$^{۲}$ ی − ۱) فر

= ∫ مس$^{ن-۲}$ ی فر(مس ی) − ∫ مس$^{ن-۴}$ ی قط$^{۲}$ ی فری

+ ∫ مس$^{ن-۴}$ ی فری

= ∫ مس$^{ن-۲}$ ی فر(مس ی) + ∫ مس$^{ن-۴}$ ی فر(مس ی)

+ ∫ مس$^{ن-۴}$ ی فری

= (مس ی)$^{ن-۱}$/(ن−۱) − (مس ی)$^{ن-۳}$/(ن−۳) + ∫ مس$^{ن-۴}$ ی فری + ج

اسی طرح عمل جاری رہے یہاں تک کہ سب سے آخر جو رقم $\int \text{مس}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ء}\ \text{فر ء}$ حاصل ہو اس میں ن - م = ۲ یا ۱ بطور توضیحی مثال

(۱) $\int \text{مس}^{6}\text{ط فر ط} = \int \text{مس}^{4}\text{ط مس}^{2}\text{ط فر ط} = \int \text{مس}^{4}\text{ط}\,(\text{قط}^{2}\text{ط} - 1)\ \text{فر ط}$

$= \int \text{مس}^{4}\text{ط قط}^{2}\text{ط فر ط} - \int \text{مس}^{4}\text{ط فر ط} = \int \text{مس}^{4}\text{ط فر}(\text{مس ط})$

$- \int \text{مس}^{2}\text{ط}\,(\text{قط}^{2}\text{ط} - 1)\ \text{فر ط}$

$= \int \text{مس}^{4}\text{ط فر}(\text{مس ط}) - \int \text{مس}^{2}\text{ط فر}(\text{مس ط}) + \int \text{مس}^{2}\text{ط فر ط}$

$= \int \text{مس}^{4}\text{ط فر}(\text{مس ط}) - \int \text{مس}^{2}\text{ط فر}(\text{مس ط}) + \int \text{قط}^{2}\text{ط فر ط} - \int \text{فر ط}$

$= \frac{1}{5}\text{مس}^{5}\text{ط} - \frac{1}{3}\text{مس}^{3}\text{ط} + \text{مس ط} - \text{ط} + \text{ج}$

اسی طرح بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

$\int \text{مس}^{5}\text{ط فر ط} = \frac{1}{4}\text{مس}^{4}\text{ط} - \frac{1}{2}\text{مس}^{2}\text{ط} + \text{لوک قط ط} + \text{ج}$

$\int \text{مم}^{\text{ن}}\,\text{ء فر ء}$ کی تعیین کے لیے بھی ایسا ہی عمل کیا جاتا ہے

چنانچہ $\int \text{مم}^{\text{ن}}\,\text{ء فر ء} = \int \text{مم}^{\text{ن}-2}\,\text{ء مم}^{2}\text{ء فر ء} = \int \text{مم}^{\text{ن}-2}\,\text{ء}\,(\text{قم}^{2}\text{ء} - 1)\ \text{فر ء}$

اور بالآخر $= -\frac{(\text{مم ء})^{\text{ن}-1}}{\text{ن}-1} + \frac{(\text{مم ء})^{\text{ن}-3}}{\text{ن}-3} + \int \text{مم}^{\text{ن}-4}\,\text{ء فر ء} + \text{ج}$

بطور توضیحی مثال

$\int \text{مم}^{5}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{فر ع} = \int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\left(\text{قم}^{2}\frac{\text{ع}}{3} - 1\right)\text{فر ع}$

$= \int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{قم}^{2}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{فر ع} - \int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{فر ع}$

$= -3\int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{فر}\left(\text{مم}\frac{\text{ع}}{3}\right) - 3\int \text{مم}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{قم}^{2}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{فر}\frac{\text{ع}}{3} + 3\int \text{مم}\frac{\text{ع}}{3}\ \text{فر}\frac{\text{ع}}{3}$

= ۳ ∫ مم$^{۳}$ $\frac{ع}{۳}$ فر(مم $\frac{ع}{۳}$) - ۳ مم $\frac{ع}{۳}$ فر(مم $\frac{ع}{۳}$) + ۳ ∫ مم $\frac{ع}{۳}$ فر $\frac{ع}{۳}$

= - $\frac{۳}{۴}$ مم$^{۴}$ $\frac{ع}{۳}$ + $\frac{۳}{۲}$ مم$^{۲}$ $\frac{ع}{۳}$ + ۳ لوک جب $\frac{ع}{۳}$ + ج

## (ج) ∫ قط$^{ن}$ ء فرء یا ∫ قم$^{ن}$ ء فرء کی تعیین۔

ن جب ایک مثبت جفت صحیح عدد ہوتا ہے تو ان تکملوں کی قیمت آسانی سے معلوم کرلی جاسکتی ہے۔ سب سے پہلے ان تکملوں کو بصورت ذیل لکھا جائے:

قط$^{ن}$ ء = قط$^{ن-۲}$ ء قط$^{۲}$ ء = (مس$^{۲}$ ء + ۱)$^{\frac{ن}{۲}-۱}$ قط$^{۲}$ ء ،

یا قم$^{ن}$ ء = قم$^{ن-۲}$ ء قم$^{۲}$ ء = (مم$^{۲}$ ء + ۱)$^{\frac{ن}{۲}-۱}$ قم$^{۲}$ ء

ذیل کی مثال سے بقیہ طریقہ عمل واضح ہوجائیگا:

∫ قط$^{۶}$ ء فرء = ∫ (مس$^{۲}$ ء + ۱)$^{۲}$ قط$^{۲}$ ء فرء = ∫ (مس$^{۴}$ ء + ۲ مس$^{۲}$ ء + ۱) قط$^{۲}$ ء فرء

= ∫ مس$^{۴}$ ء قط$^{۲}$ ء فرء + ۲ ∫ مس$^{۲}$ ء قط$^{۲}$ ء فرء + ∫ قط$^{۲}$ ء فرء

= ∫ مس$^{۴}$ ء فر(مس ء) + ۲ ∫ مس$^{۲}$ ء فر(مس ء) + ∫ قط$^{۲}$ ء فرء

= $\frac{مس^{۵} ء}{۵}$ = $\frac{۲ مس^{۳} ء}{۳}$ + مس ء + ج

## (د) ∫ مس$^{م}$ ء قط$^{ن}$ ء فرء یا ∫ مم$^{م}$ ء قم$^{ن}$ ء فرء کی تعیین۔

جبکہ ن ایک مثبت جفت صحیح عدد ہوتا ہے تو سابقہ صورت کی طرح عمل کیا جاتا ہے۔

مثلاً ∫ مس$^{\frac{۳}{۲}}$ لا قط$^{۴}$ لا فرلا کی تعیین میں قط$^{۴}$ لا کے عوض (مس$^{۲}$ لا + ۱) قط$^{۲}$ لا لکھنے سے

تکمل = ∫ مس$^{\frac{۳}{۲}}$ لا مس$^{۲}$ لا قط$^{۲}$ لا فرلا + ∫ مس$^{\frac{۳}{۲}}$ لا قط$^{۲}$ لا فرلا

$$=\int \text{مس}^{\frac{7}{2}}\text{لا}\ \text{فر}(\text{مس لا}) + \int \text{مس}^{\frac{3}{2}}\ \text{فر}(\text{مس لا})$$

$$=\frac{2}{9}\text{مس}^{\frac{9}{2}}\text{لا} + \frac{2}{5}\text{مس}^{\frac{5}{2}} + \text{ج}$$

جبکہ ن ایک طاق عدد ہوتا ہے تو ذیل کی مثال کی طرح عمل کیا جا سکتا ہے۔

## توضیحی مثال۔

$$\int \text{مس}^{5}\text{لا}\ \text{قط}^{\frac{3}{2}}\text{لا}\ \text{فرلا} = \text{مس}^{4}\text{لا}\ \text{مس لا}\ \text{قط لا}\ \text{قط}^{\frac{1}{2}}\text{لا}\ \text{فرلا}$$

$$=\int (\text{قط}^{2}\text{لا} - 1)^{2}\ \text{قط}^{\frac{1}{2}}\text{لا}\ (\text{مس لا قط لا})\ \text{فرلا}$$

$$=\int (\text{قط}^{\frac{9}{2}}\text{لا} - 2\ \text{قط}^{\frac{5}{2}}\text{لا} + \text{قط}^{\frac{1}{2}}\text{لا})\ \text{فر}(\text{قط لا})$$

$$=\frac{2}{11}\text{قط}^{\frac{11}{2}}\text{لا} - \frac{4}{7}\text{قط}^{\frac{7}{2}}\text{لا} + \frac{2}{3}\text{قط}^{\frac{3}{2}}\text{لا} + \text{ج}$$

$$=2\ \text{قط}^{\frac{3}{2}}\text{لا}\left(\frac{\text{قط}^{4}\text{لا}}{11} - \frac{2\ \text{قط}^{2}\text{لا}}{7} + \frac{1}{3}\right) + \text{ج}$$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کو ثابت کرو :—

(۱) $\int \text{مس}^{3}\ 3\text{ط}\ \text{فرط} = \frac{1}{6}\text{مس}^{2}\ 3\text{ط} + \frac{1}{3}\text{لوک جم}\ 3\text{ط} + \text{ج}$

(۲) $\int \left(\frac{\text{مس لا}}{\text{جم لا}}\right)^{4}\text{فرلا} = \frac{1}{7}\text{مس}^{7}\text{لا} + \frac{1}{5}\text{مس}^{5}\text{لا} + \text{ج}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{2}\text{لا}\ \text{جم}^{4}\text{لا}} = -\text{حم لا} + 2\ \text{مس لا} + \frac{1}{3}\text{مس}^{3}\text{لا} + \text{ج}$

(۴) $\int \text{قط}^{6}\text{لا}\ \text{مس}^{-4}\text{لا}\ \text{فرلا} = \text{مس لا} - \frac{1}{3}\text{حم}^{3}\text{لا} - 2\ \text{حم لا} + \text{ج}$

(۵) $\int (\text{مس ع} + \text{حم ع})^{3}\ \text{فرع} = \frac{1}{2}(\text{مس}^{2}\text{ع} - \text{حم}^{2}\text{ع}) + 2\ \text{لوک مس ع} + \text{ج}$

## (۸) $\int \text{جب}^{\text{م}}\text{ی}\ \text{جم}^{\text{ن}}\text{ی}\ \text{فری}$ کی تعیین ضعفی زاویوں کے ذریعہ سے۔

جبکہ م یا ن ایک مثبت طاق صحیح عدد ہوتا ہے تو سب سے مختصر طریقہ حل وہ ہے جس کی توضیح صورت (۲) میں کی گئی ہے۔ جبکہ م اور ن دونوں مثبت جفت صحیح عدد ہوں تو دیا ہوا تفرقی جملہ مناسب مثلثی ابدالوں کے ذریعہ ایک ایسے جملہ میں مستحیل کیا جاسکتا ہے جس میں ضعفی زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام شریک ہونگی۔ اس استحالہ کے بعد اس کا تکمل عمل میں لایا جائیگا - بدیں غرض مندرجۂ ذیل مثلثی ضابطے استعمال کیے جاتے ہیں :-

$$\text{جب ی جم ی} = \tfrac{1}{2}\,\text{جب ۲ی}$$

$$\text{جب}^2\text{ی} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲ی}$$

$$\text{جم}^2\text{ی} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲ی}$$

### توضیحی مثال (۱) ثابت کرو کہ

$$\int \text{جم}^4\text{لا فرلا} = \frac{\text{۳لا}}{8} + \frac{\text{جب ۲لا}}{4} + \frac{\text{جب ۴لا}}{32} + \text{ج}$$

حل۔ $\int \text{جم}^4\text{لا فرلا} = \int \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲لا}\right)^2 \text{فرلا}$

$$= \int \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲لا} + \tfrac{1}{4}\,\text{جم}^2\,\text{۲لا}\right)\text{فرلا}$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \text{فرلا} + \tfrac{1}{4}\int \text{جم ۲لا فر(۲لا)} + \tfrac{1}{4}\int\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۴لا}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{لا}}{4} + \frac{\text{جب ۲لا}}{4} + \frac{\text{لا}}{8} + \frac{\text{جب ۴لا}}{32} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{۳لا}}{8} + \frac{\text{جب ۲لا}}{4} + \frac{\text{جب ۴لا}}{32} + \text{ج}$$

**توضیحی مثال (۲)** بتاؤ کہ

∫ جب² ۲لا جم² ۲لا فرلا = ۱/۸ (لا − جب ۸لا/۸) + ج

حل: تکملہ = ۱/۴ ∫ (۲ جب ۲لا جم ۲لا)² فرلا = ۱/۴ ∫ (جب² ۴لا) فرلا

= ۱/۴ ∫ (۱/۲ − ۱/۲ جم ۸لا) فرلا = لا/۸ − جب ۸لا/۶۴ + ج

(۹) ∫ جب م لا جم ن لا فرلا، ∫ جب م لا جب ن لا فرلا، ∫ جم م لا جم ن لا فرلا کی تعیین جبکہ م ≠ ن

علم مثلث کا ضابطہ جب م لا جم ن لا = ۱/۲ جب (م+ن) لا + ۱/۲ جب (م−ن) لا استعمال کرنے سے

∫ جب م لا جم ن لا فرلا = ۱/۲ ∫ جب (م+ن) لا فرلا + ۱/۲ ∫ جب (م−ن) لا فرلا

= − جم (م+ن) لا / ۲(م+ن) − جم (م−ن) لا / ۲(م−ن) + ج

اسی طرح ∫ جب م لا جب ن لا فرلا = ۱/۲ ∫ {جم (م−ن) لا − جم (م+ن) لا} فرلا

= جب (م−ن) لا / ۲(م−ن) − جب (م+ن) لا / ۲(م+ن) + ج

اور ∫ جم م لا جم ن لا فرلا = ۱/۲ ∫ {جم (م+ن) لا + جم (م−ن) لا} فرلا

= جب (م+ن) لا / ۲(م+ن) + جب (م−ن) لا / ۲(م−ن) + ج

## مثالیں

ثابت کرو:

(۱) $\int \text{جب}^6 \text{ط} \, \text{فر ط} = \frac{1}{16}\left(5\text{ط} - 4\,\text{جب}\,2\text{ط} + \frac{\text{جب}^3 2\text{ط}}{3} + \frac{3\,\text{جب}\,4\text{ط}}{4}\right) + \text{ج}$

(۲) $\int \text{جم}^6 \text{ط} \, \text{فر ط} = \frac{1}{16}\left(5\text{ط} + 4\,\text{جب}\,2\text{ط} - \frac{\text{جب}^3 2\text{ط}}{3} + \frac{3\,\text{جب}\,4\text{ط}}{4}\right) + \text{ج}$

(۳) $\int \text{جب}^2 \frac{\text{ط}}{2}\, \text{جم}^4 \frac{\text{ط}}{2} \, \text{فر ط} = \frac{1}{8}\left(\frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{جب}\,2\text{ط}}{4} + \frac{\text{جب}^3 \text{ط}}{3}\right) + \text{ج}$

(۴) $\int \text{جب}\,5\text{لا}\,\text{جم}\,3\text{لا}\,\text{فر لا} = -\frac{\text{جم}\,8\text{لا}}{16} - \frac{\text{جم}\,2\text{لا}}{4} + \text{ج}$

(۵) $\int \text{جب}\,7\text{لا}\,\text{جب}\,4\text{لا}\,\text{فر لا} = \frac{\text{جب}\,3\text{لا}}{6} - \frac{\text{جب}\,11\text{لا}}{22}$

(۶) $\int \text{جم}\,4\text{لا}\,\text{جم}\,3\text{لا}\,\text{فر لا} = \frac{\text{جب}\,7\text{لا}}{14} + \frac{\text{جب}\,\text{لا}}{2} + \text{ج}$

## ۴۔ مثلثی ابدال کے ذریعہ ایسے جملوں کا تکمل جن میں $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{د}^2}$ یا $\sqrt{\text{د}^2 \pm \text{ا}^2}$ شریک ہو۔

اکثر صورتوں میں ایسے جملوں کے تکمل کا سہل ترین طریقہ یہ ہوتا ہے کہ متغیر کو ذیل کی طرح تبدیل کر دیا جائے۔

اگر $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{د}^2}$ شریک ہو تو $\text{د} = \text{ا}\,\text{جب}\,\text{ی}$ لکھا جائے

اگر $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{د}^2}$ شریک ہو تو $\text{د} = \text{ا}\,\text{مس}\,\text{ی}$ لکھا جائے

اور اگر $\sqrt{\text{د}^2 - \text{ا}^2}$ شریک ہو تو $\text{د} = \text{ا}\,\text{قط}\,\text{ی}$ لکھا جائے

واضح ہو کہ معیاری صورتوں ۱۵ تا ۲۰ کے تکملوں میں یہ مثلثی ابدال استعمال کیے گئے تھے۔ ایسا کرنے سے علامت جذر ساقط ہو جاتی ہے۔ کیونکہ

جملہ $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{د}^2}$ تحویل مصرحہ سے $\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ی}$ ہو جاتا ہے

" $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{د}^2}$ " $\text{ا}\,\text{قط}\,\text{ی}$ "

اور " $\sqrt{\text{د}^2 - \text{ا}^2}$ " $\text{ا}\,\text{مس}\,\text{ی}$ "

**توضیحی مثال (۱)** $\int \frac{\sqrt{\text{۵} - \text{لا}^{\text{۲}}}\ \text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}}$ دریافت کرو۔

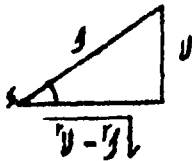
حل۔ فرض کرو $\text{ا}^{\text{۲}} = \text{۵}$ اور $\text{لا} = \text{ا جب ی}$

$$\therefore \sqrt{\text{۵} - \text{لا}^{\text{۲}}} = \text{ا} \sqrt{\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ی}} = \text{ا جم ی}$$

اور $\text{فرلا} = \text{ا جم ی فر ی}$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{\text{۵} - \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}^{\text{۲}}}\ \text{فرلا} = \int \frac{\text{ا جم ی ا جم ی}}{\text{ا}^{\text{۲}}\ \text{جب}^{\text{۲}}\ \text{ی}}\ \text{فر ی} = \int \text{تم}^{\text{۲}}\ \text{ی فر ی}$$

$$= \int (\text{قتم}^{\text{۲}}\ \text{ی} - \text{۱})\ \text{فر ی} = -\text{تم ی} - \text{ی} + \text{ج}$$

شکل ۴۹ میں ایک زاویہ قائمہ والا مثلث کھینچا گیا ہے جس میں عمود لا ہے اور وتر ا

ا، لا، ی، $\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}}$

شکل ۴۹

پس قاعدہ $= \sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}}$

اس لیے $\text{تم ی} = \frac{\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}} = \frac{\sqrt{\text{۵} - \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}}$

اور تکملہ $= -\frac{\sqrt{\text{۵} - \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}} - \text{جب}^{-\text{۱}} \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۵}}} + \text{ج}$

**توضیحی مثال (۲)** $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}$ دریافت کرو۔

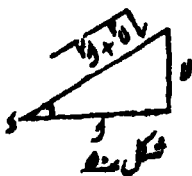
حل۔ فرض کرو $\text{ا}^{\text{۲}} = \text{۳}$ اور $\text{لا} = \text{ا مس ی}$ $\therefore (\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} = \text{ا}^{\text{۳}}\ \text{قط}^{\text{۳}}$

اور $\text{فرلا} = \text{ا قط}^{\text{۲}}\ \text{ی فر ی}$

اور تکملہ $= \int \frac{\text{ا قط}^{\text{۲}}\ \text{ی فر ی}}{\text{ا}^{\text{۳}}\ \text{قط}^{\text{۳}}\ \text{ی}} = \int \frac{\text{فر ی}}{\text{ا}^{\text{۲}}\ \text{قط ی}} = \frac{\text{۱}}{\text{ا}^{\text{۲}}} \int \text{جم ی فر ی}$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{ا}^{\text{۲}}}\ \text{جب ی} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}} \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳}}} + \text{ج}$$

ملاحظہ ہو شکل ۵۰

$\sqrt{\text{ا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۲}}}$، لا، ی، ا

شکل ۵۰

**توضیحی مثال (۳)** $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}\sqrt{\text{لا}^{۲}-۲}}$ دریافت کرو۔

**حل** ۔ فرض کرو $\text{ا}^{۲} = ۲$ اور $\text{لا} = \text{ا قطی}$

$\therefore$ $\text{فرلا} = \text{اقطی مسی فری}$ اور $\sqrt{\text{لا}^{۲}-۲} = \text{امسی}$

$$\text{پس تکملہ} = \int \frac{\text{اقطی مسی فری}}{\text{ا}^{۴}\,\text{قط}^{۴}\text{ی}\ \text{امسی}} = \frac{۱}{\text{ا}^{۴}} \int \frac{\text{فری}}{\text{قط}^{۳}\text{ی}}$$

$$= \frac{۱}{\text{ا}^{۴}} \int \text{جم}^{۳}\text{ی فری} = \frac{۱}{\text{ا}^{۴}} \int \text{جم}^{۲}\text{ی جمی فری} = \frac{۱}{\text{ا}^{۴}} \int (۱-\text{جب}^{۲}\text{ی})\,\text{جمی فری}$$

$$= \frac{۱}{\text{ا}^{۴}} \int \text{جمی فری} - \frac{۱}{\text{ا}^{۴}} \int \text{جب}^{۲}\text{ی فر(جبی)} = \frac{۱}{\text{ا}^{۴}}\left(\text{جبی} - \frac{\text{جب}^{۳}\text{ی}}{۳}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{۱}{\text{ا}^{۴}}\,\text{جبی}\left(۱-\frac{\text{جب}^{۲}\text{ی}}{۳}\right) = \frac{۱}{\text{ا}^{۴}}\,\frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}}{\text{لا}}\left(۱-\frac{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}{۳\,\text{لا}^{۲}}\right)$$

ملاحظہ ہو شکل ۵۱

$$= \text{بالآخر}\ \frac{(\text{لا}^{۲}+۱)\sqrt{\text{لا}^{۲}-۲}}{۶\,\text{لا}^{۳}}$$



شکل ۵۱

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملے معلوم کرو:۔

(۱) $\int \frac{\text{فرط}}{\text{ط}\sqrt{۴\text{ط}^{۲}+۹}}$ $\left[\text{جواب} = \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{۴\text{ط}^{۲}+۹}-۳}{۲\text{ط}} + \text{ج}\right]$

(۲) $\int \frac{\sqrt{\text{ی}^{۲}-۳۶}\ \text{فری}}{\text{ی}^{۲}}$ $\left[\text{جواب} = \text{لوک}\left(\text{ی}+\sqrt{\text{ی}^{۲}-۳۶}\right) - \frac{\sqrt{\text{ی}^{۲}-۳۶}}{\text{ی}} + \text{ج}\right]$

ثابت کرو کہ :۔

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۴۹-\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{۷}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{لا}}{۷+\sqrt{۴۹-\text{لا}^{۲}}}\right) + \text{ج}$

$$(۴)\quad \int \frac{\sqrt{لا^{۲} - ۷}\ فرلا}{لا^{۴}} = \frac{(لا^{۲} - ۷)^{\frac{۳}{۲}}}{۲۱\ لا^{۳}} + ج$$

$$(۵)\quad \int \frac{ما^{۳}\ فرما}{\sqrt{ما^{۲} + ۳}} = \frac{(ما^{۲} - ۶)(ما^{۲} + ۳)^{\frac{۱}{۲}}}{۳} + ج$$

$$(۶)\quad \int \frac{ما^{۳}\ فرما}{\sqrt{ما^{۲} - ۴}} = \frac{۲}{۳}(ما^{۲} - ۱)\sqrt{ما^{۲} - ۴} + ج$$

تکمل کے سوالات حل کرنے میں طالب علم کو اچھی مہارت صرف اس وقت حاصل ہوتی ہے جبکہ وہ سوال کو بغور دیکھ کر جلد پہچان لیتا ہے کہ اس کے حل کے لیے تکمل کے ضابطوں میں سے کونسا ضابطہ استعمال کرنا چاہیے۔ یہ مہارت مشق ہی سے حاصل ہو سکتی ہے۔ اس لیے ہم ذیل میں چند متفرق سوالات طالب علم کی مشق کے لیے درج کیے دیتے ہیں۔

# متفرق مثالیں

ثابت کرو کہ :—

$$(۱)\quad \int (۱ - \sqrt{جم\ طہ})^{\frac{۱}{۲}} \frac{جب\ طہ}{\sqrt{جم\ طہ}} فرطہ = \frac{۴}{۳}(۱ - \sqrt{جم\ طہ})^{\frac{۳}{۲}} + ج$$

$$(۲)\quad \int \frac{فرطہ}{(۱ + طہ^{۲})\ مس^{-۱}طہ} = لوک\ مس^{-۱}طہ + ج$$

$$(۳)\quad \int \frac{فرطہ}{\sqrt{۴ - طہ^{۲}}\ جم^{-۱}\frac{طہ}{۲}} = لوک\ جب^{-۱}\frac{طہ}{۲} + ج$$

$$(۴)\quad \int (لا + ۱)\ ی^{لا^{۲} + ۲لا - ۱}\ فرلا = \frac{ی^{لا^{۲} + ۲لا - ۱}}{۲\ لوک\ ی} + ج$$

$$(۵)\quad \int \frac{ما\ و^{\sqrt{ما^{۲} + ب^{۲}}}}{\sqrt{ما^{۲} + ب^{۲}}} فرما = و^{\sqrt{ما^{۲} + ب^{۲}}} + ج$$

(۶) ∫ (۵ و)^{مس لا} قط^۲ لا فرلا = (۵ و)^{مس لا} / (۱ + لوک ۵) + ج

(۷) ∫ (ا و)^{۱/ط} فرط / ط^۲ = − (ا و)^{۱/ط} / (۱ + لوک ا) + ج

(۸) ∫ جب (مس^{-۱} ع) فرع / (۱ + ع^۲) = − جم (مس^{-۱} ع) + ج

(۹) ∫ جب^{۴/۳} ا ط جم ا ط فرط = ۳/(۷ ا) جب^{۷/۳} ا ط + ج

(۱۰) ∫ − مس^۳ ۲ ما قط^۲ ۲ ما فرما = − ۱/۸ مس^۴ ۲ ما + ج

(۱۱) ∫ (و^{لا/ا} + و^{-لا/ا})^ن (و^{لا/ا} − و^{-لا/ا}) فرلا جبکہ ن ≠ −۱

= ا/(ن + ۱) (و^{لا/ا} + و^{-لا/ا})^{ن+۱} + ج

(۱۲) ∫ قط^۲ لا فرلا / √(۱ − مس لا) = − ۲ (۱ − مس لا)^{۱/۲} + ج

(۱۳) ∫ و^{جب^{-۱} ط} فرط / √(۱ − ط^۲) = و^{جب^{-۱} لا} + ج

(۱۴) ∫ √(و^{۲لا} / (۴ + و^{لا})) فرلا = ۲ (۴ + و^{لا})^{۱/۲} + ج

(۱۵) ∫ جم √(۲ لا) فرلا / (√لا جب √(۲ لا)) = − √۲ قم √(۲ لا) + ج

(۱۶) ∫ فرما / (۲ لوک ما لوک (لوک ما)) = لوک {لوک (لوک ما)} + ج

(۱۷) ∫ جم ۳ لا فرلا / جب^۲ ۳ لا = − ۱/۳ قم ۳ لا + ج

(۱۸) ∫ (ط + ۱) فرط / (ط^۲ + ۲ ط − ۱) = ۱/۲ لوک (ط^۲ + ۲ ط − ۱) + ج

**۵۔ تکمل بالحصص** ۔ ایک ہی متغیر کے دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کے طریقۂ تفرق پر غور کرنے سے ایسے حاصل ضرب کے تکمل کا ایک مفید ضابطہ دستیاب ہوتا ہے جو بکثرت استعمال ہوتا ہے اور تکمل بالحصص کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

چنانچہ اگر ی اور و ایک واحد متغیر متبوع کے تفاعل ہوں تو

چونکہ فر(ی و) = ی فر و + و فر ی

اس لیے تبدیلیِ ترتیب سے

ی فر و = فر(ی و) − و فر ی

اس کو تکمل کرنے سے

$\int$ ی فر و = ی و − $\int$ و فر ی ..... (۲)

یہ ضابطہ استعمال کرنے کے لیے ضروری ہے کہ دیے ہوئے تفرقہ کو دو اجزائے ضربی میں علٰحدہ کریں یعنے ی اور فر و۔ اگرچہ ان اجزائے ضربی کے انتخاب کے متعلق کوئی عام قاعدہ پیش نہیں کیا جا سکتا تاہم مندرجۂ ذیل ہدایات پر عمل ضروری ہے:—

(۱) فر لا ہمیشہ فر و کا ایک حصہ ہونا چاہیے۔

(۲) فر و تکمل پذیر یعنی تکمل لیے جانے کے قابل ہونا چاہیے۔

(۳) جملہ جس کا تکمل مقصود ہے جب دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے تو عموماً انسب طریقہ یہی ہے کہ سب سے زیادہ پیچیدہ شکل کے ممکن التکمل جزو ضربی کو بطور حصہ فر و منتخب کیا جائے۔

ذیل کی مثالوں کے مطالعہ سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ ضابطہ کس طرح استعمال کیا جاتا ہے۔

**توضیحی مثال (۱)** $\int$ لا$^{۳}$ $\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$ فر لا دریافت کرو۔

حل ۔ فرض کرو $\text{ی} = \text{لا}^{۲}$ اور $(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\ \text{لا فرلا} = \text{فرو}$ $\therefore$ $\text{فری} = ۲\ \text{لا فرلا}$

$$\text{تب}\ \int \text{لا}^{۳}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\ \text{فرلا} = \int \text{ی فرو} = \text{یو} - \int \text{و فری}$$

$$\text{و} = \int \text{لا}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\ \text{فرلا} = -\frac{۱}{۲}\int(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\ \text{فر}(۱-\text{لا}^{۲}) = -\frac{۱}{۳}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\text{اور}\ \int \text{و فری} = -\frac{۱}{۳}\int(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\ ۲\ \text{لا فرلا} = \frac{۱}{۳}\int(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\ \text{فر}(۱-\text{لا}^{۲})$$

$$= \frac{۲}{۱۵}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۵}{۲}}$$

$$\text{اور تکملہ} = -\frac{\text{لا}^{۲}}{۳}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۱۵}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۵}{۲}} + \text{ج}$$

$$= -\frac{(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{۱۵}(۳\text{لا}^{۲} + ۲) + \text{ج}$$

## توضیحی مثال (۲) $\int \text{لا مس}^{-۱}\text{لا فرلا}$ دریافت کرو۔

حل ۔ فرض کرو $\text{ی} = \text{مس}^{-۱}\text{لا}$ اور $\text{فرو} = \text{لا فرلا}$

$$\therefore\ \text{فری} = \frac{\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۲}}\ \text{اور}\ \text{و} = \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$$

$$\therefore\ \text{تکملہ} = \left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)\text{مس}^{-۱} - \frac{۱}{۲}\int \text{لا}^{۲}\frac{\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۲}}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\text{مس}^{-۱} - \frac{۱}{۲}\int\left(۱ - \frac{۱}{۱+\text{لا}^{۲}}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\text{مس}^{-۱} - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۱}{۲}\int\frac{\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۲}}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\text{مس}^{-۱} - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۱}{۲}\text{مس}^{-۱}\text{لا} + \text{ج}$$

$$= \frac{(\text{لا}^{۲}+۱)}{۲}\text{مس}^{-۱}\text{لا} - \frac{\text{لا}}{۲} + \text{ج}$$

بعض صورتوں میں تکمیل بالخصص کا ضابطہ ایک سے زیادہ مرتبہ استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

**توضیحی مثال (۳)** $\int \text{لا}^{۲} \text{لوک}^{۲} \text{لا فرلا}$ دریافت کرو۔

حل - فرض کرو $\text{ی} = \text{لوک}^{۲}\text{لا}$ اور $\text{فرو} = \text{لا}^{۲}\text{ فرلا}$

$$\therefore \text{فری} = \frac{۲ \text{ لوک لا}}{\text{لا}} \text{ فرلا} \quad \text{اور} \quad \text{و} = \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$$

$$\therefore \int \text{ی فرو} = \text{لوک}^{۲}\text{لا} \left(\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right) - \int \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\left(\frac{۲ \text{ لوک لا فرلا}}{\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} \text{لوک}^{۲}\text{لا} - \frac{۲}{۳} \int \text{لا}^{۲} \text{ لوک لا فرلا}$$

تکمل بالحصص کا ضابطہ مکرر استعمال کرنے سے $\int \text{لا}^{۲} \text{ لوک لا فرلا}$ کی تعیین ہو جاتی ہے۔ چنانچہ فرض کرو $\text{یَ} = \text{لوک لا}$ اور $\text{لا}^{۲} \text{ فرلا} = \text{فروَ}$ $\therefore \text{فریَ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ اور $\text{وَ} = \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$

$$\text{پس} \int (\text{لوک لا}) \text{لا}^{۲} \text{ فرلا} = \text{لوک لا} \left(\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right) - \int \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}^{۳} \text{ لوک لا}}{۳} - \frac{۱}{۳} \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$$

$$\therefore \text{دیا ہوا تکملہ} = \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} \text{لوک}^{۲}\text{لا} - \frac{۲}{۳}\left(\frac{\text{لا}^{۳} \text{ لوک لا}}{۳} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۹}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\left(\text{لوک}^{۲}\text{لا} - \frac{۲}{۳} \text{ لوک لا} + \frac{۲}{۹}\right) + \text{ج}$$

**توضیحی مثال (۴)** $\int \text{قط}^{۲}\text{لا لوک مس لا فرلا}$ کی تعیین کرو۔

حل - ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ سہولت اسی میں ہے کہ فرض کیا جائے کہ

$$\text{لوک مس لا} = \text{ی} \quad \text{اور} \quad \text{قط}^{۲}\text{ی فری} = \text{فرو}$$

$$\therefore \text{فری} = \frac{\text{قط}^{۲}\text{لا فرلا}}{\text{مس لا}} \quad \text{اور} \quad \text{و} = \int \text{قط}^{۲}\text{لا فرلا} = \text{مس لا}$$

$$\text{پس دیا ہوا تکملہ} = (\text{لوک مس لا})(\text{مس لا}) - \int \text{مس لا} \frac{\text{قط}^{۲}\text{ لا فرلا}}{\text{مس لا}}$$

$$= \text{مس لا لوک مس لا} - \int \text{قط}^{۲}\text{ لا فرلا}$$

= مس لا لوک مس لا − مس لا + ج

= مس لا (لوک مس لا − ۱) + ج

**توضیحی مثال (۵)** ثابت کرو کہ

∫ و^(ک لا) جب م لا فرلا = و^(ک لا) (ک جب م لا − م جم م لا) / (ک² + م²) + ج

**حل** ۔ فرض کرو ی = و^(ک لا) اور فرو = جب م لا فرلا

تب فری = ک و^(ک لا) فرلا اور و = − جم م لا / م

پس دیا ہوا تکملہ = − و^(ک لا) جم م لا / م + (ک / م) ∫ و^(ک لا) جم م لا فرلا ……. (۱)

نئے تکمل کو حصص کے طریقے سے "تکملانے" کے لیے فرض کرو

یَ = و^(ک لا) اور فروَ = جم م لا فرلا

تب فریَ = ک و^(ک لا) فرلا اور وَ = جب م لا / م

پس ∫ و^(ک لا) جم م لا فرلا = و^(ک لا) جب م لا / م − (ک / م) ∫ و^(ک لا) جب م لا فرلا ……. (۲)

(۲) کو (۱) میں تعویض کرنے سے

∫ و^(ک لا) جب م لا فرلا = (و^(ک لا) / م²) (ک جب م لا − م جم م لا) − (ک² / م²) ∫ و^(ک لا) جب م لا فرلا

آخری مساوات میں دونوں تکملے ایک ہی ہیں۔ پس بائیں جانب کے تکمل کو مساوات کے سیدھے جانب منتقل کر کے مساوات کو حل کرنے سے

∫ و^(ک لا) جب م لا فرلا = و^(ک لا) (ک جب م لا − ک جم م لا) / (ک² + م²) + ج

واضح ہو کہ تکمل بالحصص کے طریقے کے سب سے اہم اطلاقات حسب ذیل ہیں:۔

(ا) تفرقے جن میں حاصل ضرب شریک ہیں۔
(ب) تفرقے جن میں لوکارثم شریک ہیں۔
(ج) تفرقے جن میں مقلوب دائری تفاعل شریک ہیں۔

## مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :-

(۱) ∫ لوک لا فرلا = لا لوک (لا - ۱) + ج

(۲) ∫ لا جم ۳لا فرلا = ۱/۳ لا جب ۳لا + ۱/۹ جم ۳لا + ج

(۳) ∫ لا جب² (لا/۲) فرلا = ۱/۴ لا² - ۱/۲ لا جب لا - ۱/۲ جم لا + ج

(۴) ∫ جب لا جم ۳لا فرلا = ۱/۸ (۳ جب لا جب ۳لا + جم لا جم ۳لا) + ج

(۵) ∫ لاⁿ لوک لا فرلا = لا^(ن+۱)/(ن+۱) (لوک لا - ۱/(ن+۱)) + ج

(۶) ∫ جب^(-۱) لا فرلا = لا جب^(-۱) لا + √(۱ - لا²) + ج

(۷) ∫ مم^(-۱) طہ فرطہ = طہ مم^(-۱) طہ + ۱/۲ لوک (۱ + طہ²) + ج

(۸) ∫ مس^(-۱) (طہ/۳) فرطہ = طہ مس^(-۱) (طہ/۳) - ۳/۲ لوک (طہ² + ۹) + ج

(۹) ∫ (مس^(-۱) ما فرما)/ما² = لوک (ما/√(۱ + ما²)) - (مس^(-۱) ما)/ما + ج

(۱۰) ∫ لوک (۱ - √طہ) فرطہ = (طہ - ۱) لوک (۱ - √طہ) - ۱/۲ (طہ + ۲√طہ) + ج

(۱۱) ∫ (جب لا فرلا)/و^لا = - (جب لا + جم لا)/(۲ و^لا) + ج

(۱۲) ∫ و^(-فہ) جب ۳فہ فرفہ = - (و^(-فہ)/۱۰) (جب ۳فہ + ۳ جم ۳فہ) + ج

(۱۳) $\int \frac{\text{ط و}^{\text{ط}} \text{ فرط}}{(\text{۱} + \text{ط})^{\text{۲}}} = \frac{\text{و}^{\text{ط}}}{\text{۱} + \text{ط}} + \text{ج}$

(۱۴) $\int \frac{\text{ط}^{\text{۲}} \text{ فرط}}{\text{و}^{\text{ط}}} = -\frac{\text{ط}^{\text{۲}} + \text{۲ط} + \text{۲}}{\text{و}^{\text{ط}}} + \text{ج}$

(۱۵) $\int \text{و}^{-\text{۲لا}} (\text{جم لا} - \text{جب لا}) \text{ فرلا} = \frac{\text{و}^{-\text{۲لا}} (\text{۲جب لا} - \text{جم لا})}{\text{۵}} + \text{ج}$

(۱۶) $\int \text{ا}^{\text{۲}} \text{ لوک} (\text{ا} - \text{۳}) \text{ فرا} = \frac{\text{ا}^{\text{۳}} - \text{۲۷}}{\text{۳}} \text{ لوک} (\text{ا} - \text{۳})$

$- \frac{\text{۱}}{\text{۳}} \left( \frac{\text{ا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} + \frac{\text{۳ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \text{۹ا} \right) + \text{ج}$

(۱۷) $\int (\text{و}^{\text{فہ}} - \text{و}^{-\text{فہ}}) \text{ جب رفہ فرفہ}$

$= \frac{(\text{و}^{\text{فہ}} - \text{و}^{-\text{فہ}}) \text{ جب رفہ} - \text{ر} (\text{و}^{\text{فہ}} - \text{و}^{-\text{فہ}}) \text{ جم رفہ}}{\text{ر}^{\text{۲}} + \text{۱}} + \text{ج}$

---

# بارھواں باب

## تکمل کا مستقل اور محدود تکملہ

**۱ - ابتدائی شرائط کے ذریعہ تکمل کے مستقل کی تعیین** — جیسا کہ سابقہ باب کے آغاز میں بتایا گیا ہے کسی دی ہوئی مثال میں تکمل کا مستقل دریافت کرلیا جاسکتا ہے جبکہ ہمیں متغیر کی کسی قیمت کے لیے تکمل کی قیمت معلوم ہوجاتی ہے۔ بالفاظ دیگر کسی نامحدود تکملہ کا مستقل دریافت کرلیا جاسکتا ہے جبکہ یہ معلوم ہو کہ حاصل شدہ تفاعل کسی معین شرط کو پورا کرتا ہے مثلاً

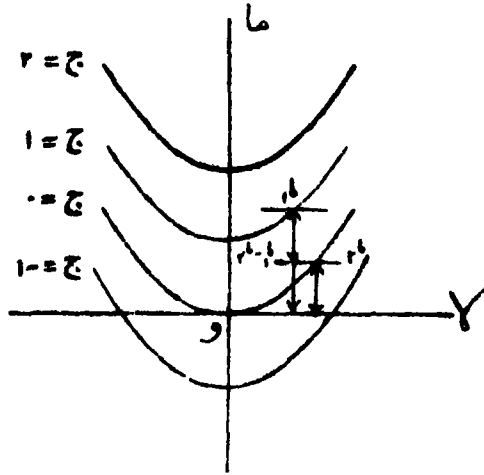
تکمل ف (لا) = ∫ فہ (لا) فرلا + ج ایک نامحدود تکمل ہے

جس میں مستقل ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہمیں یہ جاننا ضروری ہے کہ متغیر لا کی کسی خاص قیمت کے لیے تفاعل ف (لا) یعنے تکمل کی کیا قیمت ہے۔

**توضیحی مثال (۱)** ∫ لا فرلا کے تکمل میں ج کی قیمت دریافت کرو یہ معلوم رکھ کر کہ تکمل = ۴ جبکہ لا = ۲

چونکہ ما = ف (لا) = ∫ لا فرلا = لا²/۲ + ج

اور ما = ۴ جبکہ لا = ۲ پس ۴ = $\frac{۴}{۲}$ + ج ∴ ج = ۲

تفاعل کے مستقل کی ہندسی ترجمانی بھی آسان ہے۔ چنانچہ اس توضیحی مثال کی ترسیم یعنے شکل ۵۲ کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ تکمل کو من مانے قیمت دی جاسکتی ہے اگر ہم لا = صفر فرض کرکے ج کو تکمل کی قیمت عطا کریں۔

شکل ۵۲

واضح ہے کہ مساوات بالا میں ج کی ہر معین قیمت کے لیے ایک معین ترسیم موجود ہے۔ اگر ہم اس نظام کے کوئی دو منحنی منتخب کریں شلاً

$$ما_۱ = \frac{لا^۲}{۲} + ج_۱ \quad اور \quad ما_۲ = \frac{لا^۲}{۲} + ج_۲$$

ان کے معینوں (ordinates) کا تفاوت ما۱ - ما۲ = ج۱ - ج۲ غیر تابع ہے لا کا۔

**توضیحی مثال** (۲) ایسے منحنی کی مساوات دریافت کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ پر خطِ مماس کا ڈھلان تبدیلی علامت کے ساتھ فصلہ اور معین کی نسبت کے مساوی ہے۔

حل۔ اس سوال کی ترجمانی مساوات ذیل سے ہوتی ہے $\frac{د ما}{د لا} = -\frac{لا}{ما}$

متغیروں کو جدا کرنے سے ما فرما = ۔لا فرلا

اور عمل تکمل سے $\frac{ما^۲}{۲} = -\frac{لا^۲}{۲} + ج$ ∴ $لا^۲ + ما^۲ = ۲ ج$

واضح ہے کہ یہ ایک ہم مرکز دائروں کے نظام کی مساوات ہے جن کے مرکز مبدا پر ہیں۔ یہ ایک نا محدود تکمل کی مثال ہے۔ تحدید کے لیے اگر یہ شرط لگا دی جائے کہ منحنی نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرے تو

$۱۶ + ۲۵ = ۲ ج = ۴۱$ ∴ جو خاص منحنی مقصود ہے۔

دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = ۴۱$ ہے

# مثالیں

مندرجۂ ذیل سوالات میں تکمل کا مستقل دریافت کرو جبکہ متغیر کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے تکملہ کی قیمت بتا دی جاتی ہے اور پھر اس کی مدد سے تکملہ کی پوری قیمت حاصل کرو:۔

(۱) $\int \frac{-لا فرلا}{\sqrt{۱۰۰ - لا^۲}}$ جبکہ لا = ۶ تو تکملہ = ۸ [جواب۔مستقل = ۰۔ تکملہ کی پوری قیمت = $\sqrt{۱۰۰ - لا^۲}$

(۲) $\int \frac{فرلا}{\sqrt{۱ - لا^۲}}$ جبکہ لا = ۱ تو تکملہ = $\frac{۳ط}{۲}$ [جواب۔مستقل = ط۔ تکملہ کی پوری قیمت = $جب^{-۱} لا + ط$

(۳) $\int$ مس طہ فرطہ جبکہ طہ = ۰ تو تکملہ = ۳ [جواب۔مستقل = ۳۔ تکملہ کی پوری قیمت = لوک قطا طہ + ۳

منحنیوں کے نظام کی مساوات حاصل کرو جبکہ ان کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کا ڈھلان حسبِ ذیل ہے:۔

(۴) $\frac{لا^۲}{ما}$ [جواب۔نیم کعبی خطوط مکافی $\frac{ما^۲}{۲} = \frac{لا^۳}{۳} + ج$

(۵) $\frac{ب^۲ لا}{و^۲ ما}$ [جواب۔خطوط زائد $ب^۲ لا^۲ - و^۲ ما^۲ + ج$

(۶) $\frac{ب^۲ لا}{ا^۲ ما} -$ [جواب۔ خطوط ناقص ب^۲ لا^۲ + ا^۲ ما^۲ = ج

(۷) $\frac{۱ + لا}{۱ - ما}$ [جواب۔ دوائر لا^۲ + ما^۲ + ۲لا - ۲ما = ج

(۸) ثابت کرو کہ منحنی جس کا زیر مماس مستقل اور ا کے مساوی ہے ا لوگ ما = لا + ج ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ منحنیاں جن کے کسی نقطہ پر کے سمتی نیم قطر اور خطِ مماس کے مابین زاویہ زاویۂ سمتی کا ن گنا ہے $ا^ن$ = ج جب ن طہ ہیں۔

# ۲۔ تکمل کے مستقل کی طبیعیات کے مسائل کے ذریعہ ترجمانی۔

ذیل میں ہم دو مشہور میکانی مثالیں دے کر تکمل کے مستقل کا مفہوم بتائینگے۔

(۱) خطِ مستقیم میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والے ذرہ کے کلیاتِ حرکت اخذ کرو۔

حل۔ چونکہ اسراع = $\frac{فرر}{فرو}$ = مستقل جس میں ر = رفتار اور و = وقت اس لیے $\frac{فرر}{فرو}$ = ا لکھو

تب فرر = ا فرو اور تکمل کرنے سے ر = ا و + ج .... (۱)

ج کی تعیین کے لیے فرض کرو کہ ذرہ کی ابتدائی رفتار ر. ہے یعنے ر = ر. جبکہ و = ۰ ∴ ر. = ۰ + ج یعنے ج = ر.

پس مساوات (۱) ہوجاتی ہے ر = ا و + ر. .... (۲)

چونکہ ر = $\frac{فرس}{فرو}$ جس میں س = فاصلہ اور و = وقت

پس مساوات (۲) سے $\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}} = \text{ا و} + \text{ب}$ اور $\text{فرس} = \text{ا و فرو} + \text{ب فرو}$

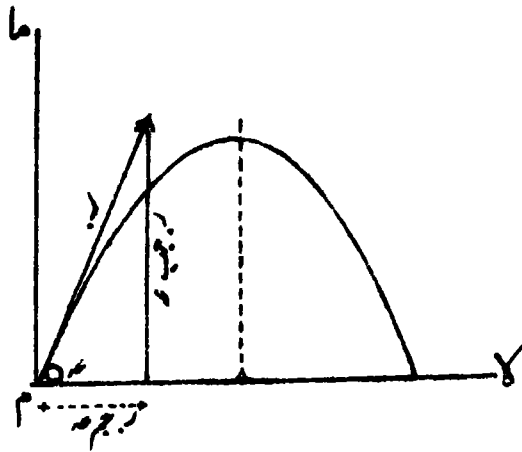
تکمل کرنے سے $\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{ا و}^{2} + \text{ب و} + \text{ج}$ . . . . . . (۳)

ج کی تعیین کے لیے فرض کرو کہ ابتدائی فاصلہ س. ہے یعنی س = س. جبکہ و = ۰

تب (۳) میں عمل ابدال سے س. = ۰ + ۰ + ج ∴ ج = س.

اور اس لیے $\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{ا و}^{2} + \text{ب و} + \text{س.}$ . . . . . . (۴)

(۲) مرمی کی حرکت پر بحث کرو جس کی ابتدائی رفتار ب افقی سطح سے زاویہ عہ پر مائل ہے صرف جاذبہ زمین کا عمل فرض کیا جائے۔

حل۔ فرض کرو کہ لا م ما (شکل ۵۳) حرکت کا مستوی ہے۔

شکل ۵۳

م لا اُفقی اور م ما انتصابی خط ہے اور مرمی مبداء م سے پھینکا جاتا ہے۔ چونکہ صرف جاذبہ زمین کا عمل مانا گیا ہے اس لیے اُفقی سمت میں اسراع صفر ہے اور انتصابی سمت میں ـ ج

پس $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} = 0$ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = -\text{ج}$

عمل تکمل سے رلا = ھ$_{۱}$ اور رما = - ج و + ھ$_{۲}$

(نوٹ - چونکہ جاذبہ زمین کے لیے علامت ج لکھی گئی ہے اس لیے مستقل کے لیے علامت ھ اختیار کی گئی)

لیکن ر جم عہ = ابتدائی رفتار اُفقی سمت میں اور ر جب عہ = ابتدائی رفتار انتصابی سمت میں

لہذا ھ$_{۱}$ = ر جم عہ اور ھ$_{۲}$ = ر جب عہ

∴ رلا = ر جم عہ اور رما = - ج و + ر جب عہ . . . . (۱)

لیکن رلا = $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$ اور رما = $\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}$

∴ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$ = ر جم عہ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = - ج و + ر جب عہ

یعنے فرلا = ر جم عہ فرو اور فرما = - ج و فرو + ر جب عہ فرو

تکمل کرنے سے لا = ر جم عہ . و + ھ$_{۳}$ اور

ما = - $\frac{۱}{۲}$ ج و$^{۲}$ + ر جب عہ . و + ھ$_{۴}$ . . . . (۲)

ھ$_{۳}$ اور ھ$_{۴}$ کی تعیین کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ جب و = ۰ تو لا = ۰ اور ما = ۰

پس عمل ابدال سے ھ$_{۳}$ = ۰ اور ھ$_{۴}$ = ۰

∴ لا = ر جم عہ . و اور ما = - $\frac{۱}{۲}$ ج و$^{۲}$ + ر جب عہ . و . . . (۳) اور (۴)

آخرالذکر مساواتوں میں و کو ساقط کرنے سے

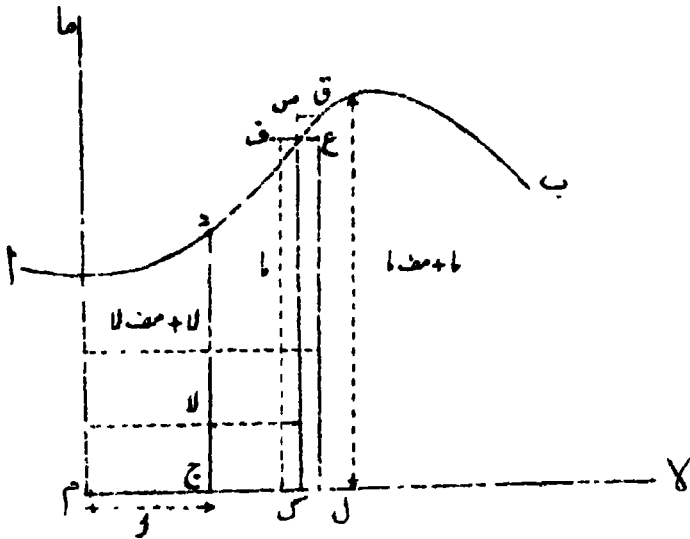
ما = لا مس عہ - $\frac{\text{ج لا}^{۲}}{\text{۲ ر}^{۲}\text{ جم}^{۲}\text{ عہ}}$ . . . . . . . . . (۵)

جو مرماۃ کی مساوات ہے اور جس سے ظاہر ہے کہ مرمی خط مکافی میں حرکت کرتا ہے۔

# محدود تکملہ

## ۳۔ منحنی کے نیچے کے رقبہ کا تفرقہ۔

مسلسل تفاعل فہ (لا) پر غور کرو اور فرض کرو کہ ما = فہ (لا) منحنی اب کی مساوات ہے جس کی ترسیم شکل ۵۴ میں بتائی گئی ہے۔

شکل ۵۴

ج د ثابت معین ہے اور ک ف متغیر معین ہے۔ فرض کرو ر رقبہ ج ک ف د کی پیمایش ہے۔ لا کی قیمت میں ایک چھوٹا اضافہ مف لا واقع ہوتا ہے اور شکل میں رقبہ ک ل ق ف اس کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر مستطیل ک ل ع ف اور ک ل ق س مکمل کھینچے جائیں تو واضح ہے کہ

رقبہ ک ل ع ف > رقبہ ک ل ق ف > رقبہ ک ل ق س

یعنے (ک ف) مف لا > مف ء > (ل ق) مف لا

مف لا پر تقسیم کرنے سے ک ف > مف ء / مف لا > ل ق

[ نوٹ - اگر شکل ایسی ہو کہ ک ف زائد ہو ل ق سے تو اوپر کی سطر میں بجائے ... > کے علامت < لکھنا ہوگا ] -

مف لا کو صفر تک بطور انتہا پہنچنے دو - چونکہ ک ف ثابت ہے اور ل ق انتہاً ک ف کو پہنچ جاتا ہے (اس لیے کہ ما متغیر لا کا مسلسل تفاعل ہے)

لیے فرء / فرلا = ما (= ک ف) یا تفرقوں کی زبان میں فرء = ما فرلا

کسی منحنی، محور لا، ایک ثابت معیّن اور ایک متغیر ...ن سے گھرے ہوئے رقبہ کا تفرقہ مساوی ہے ...صل ضرب متغیر معیّن اور متناظر مقطوعہ کے تفرقہ کے۔

## ۴ - محدود تکملہ

سابقہ فصل کی آخری تحریر سے ...بط ہوتا ہے کہ اگر منحنی ا ب (شکل ۲۴ئ) ما = فہ(لا) ہے تو

فرء = ما فرلا

یعنے فرء = فہ (لا) فرلا ......... (۱)

...میں فرء منحنی، محور لا اور دو معیّنوں کے درمیانی رقبہ کا تفرقہ ہے۔

...کرنے سے ء = ∫ فہ (لا) فرلا حاصل ہوتا ہے۔

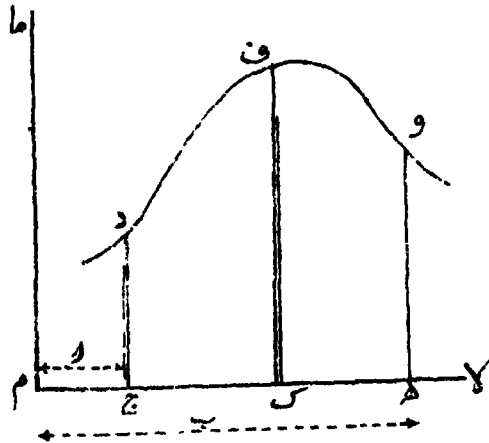
∫ فہ (لا) فرلا کو ف (لا) + ج سے تعبیر کرو۔

ء = ف (لا) + ج ......... (۲)

...اس طرح تعیین کی جاتی ہے کہ ء = صفر جبکہ لا = ا

...قیمتوں کو نتیجہ (۲) میں تعویض کرنے سے
. = ف (ا) + ج ∴ ج = ۔ ف (ا)

...س لیے (۲) ہو جاتا ہے ء = ف (لا) ۔ ف (ا) ..... (۳)

...مطلوبہ رقبہ ج ھ و د (شکل ۵۵) ء کی قیمت ہے (۳) میں جبکہ لا = ب
پس رقبہ ج ھ و د = ف (ب) ۔ ف (ا) ..... (۱)

شکل ۵۵

مسئلہ ۔ ∫ ما فرلا کی قیمتوں کا تفاوت جبکہ لا = ا
...ر لا = ب اس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے جو معین ما و الے
...نحنی، محور لا اور لا = ا اور لا = ب کے متناظر معینوں
...ے درمیان واقع ہے۔

...تفاوت علامت $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا یا $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا کے ذریعہ ظاہر

کیا جاتا ہے اس طریق کتابت کا موجد فرانس کا مشہور ماہر ریاضی جوزف فورئے (Joseph Fourier) ہے۔ اور پڑھا جاتا ہے "ما فرلا کا تکملہ ا سے ب تک اس عمل کو "حدود کے ما بین تکمل کرنا" کہتے ہیں۔ ا کو حدِ زیریں اور ب کو حدِ بالا کہتے ہیں۔

چونکہ (۳) کی ہمیشہ ایک محدود قیمت ہوتی ہے اس لیے وہ محدود تکملہ کہلاتا ہے۔

کیونکہ اگر $\int \text{فہ (لا) فرلا} = \text{ف (لا)} + \text{ج}$

$$\text{تب} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} = \Big[\text{ف (لا)} + \text{ج}\Big]_{\text{ا}}^{\text{ب}} = \Big[\text{ف (ب)} + \text{ج}\Big] - \Big[\text{ف (ا)} + \text{ج}\Big]$$

$$\text{یعنی} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} = \text{ف (ب)} - \text{ف (ا)}$$

جس میں سے عمل تکمل کا مستقل مفقود ہو گیا۔

پس ہم علامت $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا}$ یا $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ما فر (لا)}$ کی یوں تعریف کر سکتے ہیں کہ وہ عددی پیمائش ہے اس رقبہ کی جو گھیرا ہوا ہے منحنی ما = فہ (لا)، محور لا اور لا = ا اور لا = ب پر کے منحنی کے معینوں سے۔ یہ تعریف پہلے ہی سے فرض کر لیتی ہے کہ یہ خطوط ایک رقبہ کو گھیر لیتے ہیں۔ یعنی منحنی لا تناہی تک نہ تو اوپر کی طرف جاتا ہے اور نہ نیچے کی طرف اور ا اور ب دونوں محدود ہیں۔

واضح رہے کہ فہ (لا) پورے وقفہ [ا، ب] میں مسلسل اور وحید القیمت ہے۔

## محدود تکمل کی قیمت کی تعیین کا قاعدہ۔

پہلے دیے ہوئے تفرقی جملہ کا غیر محدود تکملہ دریافت کیا جائے پھر اس میں اولاً بالائی حد درج کی جائے اور بعد کو زیریں حد درج کی جائے۔ اس کے بعد آخرالذکر کو اول الذکر میں سے تفریق کیا جائے۔

توضیحی مثال (۱) $\int_{0}^{2} (3-\text{لا})^3$ فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ $\int_{0}^{2}(3-\text{لا})^3 \text{ فرلا} = -\left[\frac{(3-\text{لا})^4}{4}\right]_{0}^{2}$

$= -\left[\frac{(3-2)^4}{4} - \frac{(3-0)^4}{4}\right] = 20$

توضیحی مثال (۲) $\int_{-1}^{4} \frac{\text{فرلا}}{9\text{لا}^2 - 25}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ یہ سوال معیاری صورت (۱۶) اور (۱۶ ا) کے مشابہ ہے۔

پس $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5\times 2} \int_{-1}^{4} \text{لوک}_{\text{و}} \frac{3\text{لا}-5}{3\text{لا}+5}$ یا $= -\frac{1}{30}\int_{-1}^{4} \text{لوک}_{\text{و}} \frac{5+3\text{لا}}{5-3\text{لا}}$

پہلے طریقہ پر عمل کرنے سے منفی عدد کا لوکارتم ملتا ہے اس لیے دوسرا طریقہ اختیار کیا جانا چاہیے۔

پس تکملہ $= -\frac{1}{30}\left[\text{لوک}_{\text{و}} \frac{5+\cdot}{5-\cdot} - \text{لوک}_{\text{و}} \frac{5-3}{5+3}\right] = -\frac{1}{30}\left(-\text{لوک}_{\text{و}} \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{30} \text{لوک}_{\text{و}} 4$

## ۵۔ متغیر کی تبدیلی کے تناظر حدود تکمل کی تبدیلی

—— جب کسی نئے متغیر کی مدد سے تکمل عمل میں لایا جاتا ہے تو بعض اوقات ابتدائی متغیر کی رقموں میں نتیجہ کو ظاہر کرنے میں دقت پیش آتی ہے جبکہ حدود کے مابین جب تکمل کرنا ہوتا ہے تو ہم ابتدائی متغیر کے استعمال سے

بچ سکتے ہیں اگر ان معینہ حدود کو نئے متغیر کی رقموں میں پیش کر دیں۔ چند ایک مثالوں کے مطالعہ سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ کس طرح کیا جا سکتا ہے۔

**توضیحی مثال (۱)** $\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

**حل۔** لا = ا جب فہ لکھو تب فرلا = ا جم فہ فرفہ اور جبکہ لا بدلتا ہے صفر سے ا تک تو فہ بدلتا ہے صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک پس

$$\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ا}^{2}\ \text{جم}^{2}\text{فہ فرفہ} = \left[\frac{\text{ا}^{2}\ \text{فہ}}{2} + \frac{\text{ا}^{2}\ \text{جب}\ 2\ \text{فہ}}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi\ \text{ا}^{2}$$

**توضیحی مثال (۲)** $\int_{1}^{4} \frac{\text{فرو}}{\sqrt{5 - \text{و}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

**حل۔** $\text{لا}^{2} = \text{و}$ لکھو تب $\sqrt{5 - \text{و}} = \sqrt{5 - \text{لا}^{2}}$

اور $\text{فرو} = \text{فرلا}^{2} = 2\ \text{لا فرلا}$

$$\therefore \int_{1}^{4} \frac{\text{فرو}}{\sqrt{5 - \text{و}}} = \int \frac{2\ \text{لا فرلا}}{(5 - \text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}}$$ اور $\text{فر}(5 - \text{لا}^{2}) = -2\ \text{لا فرلا}$

معہٰذا جبکہ و = ۴ لا = ±۲

اور جبکہ و = ۱ لا = ±۱

$$\therefore \text{تکملہ} = -\int_{1}^{2} (5 - \text{لا}^{2})^{-\frac{1}{2}}\ \text{فر}(5 - \text{لا}^{2}) = -\left[\frac{(5 - \text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{2}$$

$$= -2\left[(5 - 4)^{\frac{1}{2}} - (5 - 1)^{\frac{1}{2}}\right] = -2(-1) = 2$$

[**نوٹ** ۔ واضح ہو کہ سابقہ اور جدید متغیر میں تعلق اس طرح کا ہونا چاہیے کہ حدود تکمل کے اندر ایک متغیر کی ہر ایک قیمت کے متناظر دوسرے متغیر کی ہمیشہ ایک اور صرف ایک محدود قیمت ہو ۔ جبکہ ایک متغیر دوسرے متغیر کا کثیر القیمت تفاعل دیا جاتا ہے تو احتیاط کی جانی چاہیے کہ صحیح و موزوں قیمتیں ہی منتخب کی جائیں]۔

# مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ $\int_{ا}^{ب} ف(لا)\,فرلا = -\int_{ب}^{ا} ف(لا)\,فرلا$

مندرجۂ ذیل کی تصدیق کرو:۔

(۲) $\int_{۳}^{۴} \frac{فرلا}{لا\sqrt{۲۵ - لا^۲}} = \frac{۱}{۵} لوک \frac{۳}{۲}$

(۳) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} قط^۳ ء\, فرء = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} لوک ۳$

(۴) $\int_{۰}^{۲} لا^۲ \sqrt{۱ + لا^۳}\, فرلا = ۵\frac{۷}{۹}$

(۵) $\int_{۱}^{۲} \frac{\sqrt{لا^۲ - ۱}\, فرلا}{لا} = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$

**۵ ۔ رقبوں کی حسابی تعیین** ۔۔ قبل ازیں (۴ کے آغاز میں) بتا دیا گیا ہے کہ ایک منحنی، محور لا اور معینوں لا = ا اور لا = ب کے مابین کا رقبہ ضابطہ

$$رقبہ = \int_{ا}^{ب} ما\, فرلا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ب)$$

سے مشخص ہوتا ہے جس میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات کی مدد سے ما کی قیمت لا کی رقموں میں تعویض کی جاتی ہے۔

**توضیحی مثال (۱)** دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = ۳۶$، محور لا اور معینوں $لا = -۴$ اور $لا = ۵$ سے گھیرے ہوئے رقبہ کی تعیین کرو۔

حل ۔ $\int_{-۴}^{۵} \sqrt{۳۶ - لا^۲}\, فرلا = \left[ \frac{لا}{۲}\sqrt{۳۶ - لا^۲} + \frac{۳۶}{۲} جب^{-۱} \frac{لا}{۶} \right]_{-۴}^{۵}$

$= \frac{5}{2}\sqrt{11} + \frac{36}{2}$ جب$^{-1}\frac{5}{6} + \frac{4}{2}\sqrt{20} + \frac{36}{2}$ جب$^{-1}(-\frac{2}{3})$

$= 8.253 + 18\,(56°\ 24') + 8.265 + 18\,(41°\ 48')$

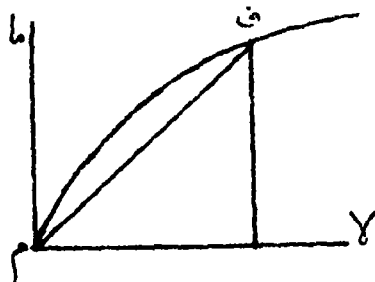
$= 16.595 + 18\,(98°\ 12') = 16.69 + 30.56 = 47.05$

واضح ہے کہ یہ چھوٹا ہے نصف دائرہ کے رقبہ (متناظر لا = -۱۶ اور لا = +۶) سے

یعنے $\frac{1}{2}\,\pi(36) = 18\pi = 56.5$ سے

**توضیحی مثال (۲)** ثابت کرو کہ خطِ مکافی $ما^2 = 4$ لا اور خطِ مستقیم ما = لا سے گھیرا ہوا رقبہ $= \frac{8}{3}$

**حل۔** منحنی محور لا اور معین ما سے گھیرا ہوا (دیکھو شکل ۵۶)

رقبہ $= \int$ ما فرلا اور چونکہ $ما^2 = 4$ لا $\therefore$ ما $= \pm 2\,(لا)^{\frac{1}{2}}$

شکل ۵۶

ہم یہاں صرف مثبت علامت لینگے

اس لیے رقبہ $= \int 2\,(لا)^{\frac{1}{2}}$ فرلا $= 2\,\frac{لا^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\,لا^{\frac{3}{2}}$

خطِ مستقیم ما = لا، محور لا اور معین ما سے گھرے ہوئے مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ لا ما

لیکن چونکہ لا = ما $\therefore$ مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2}\,لا^2$

پس مکافی اور خطِ مستقیم کا درمیانی رقبہ $= \left(\frac{4}{3}\,لا^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,لا^2\right)$

مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع $ما^2 = ۴ لا$ اور $ما = لا$ ہمزاد مساواتوں کے حل سے دریافت ہوجاتے ہیں۔ یعنی $لا^2 = ۴ لا$ یا $لا (لا - ۴) = ۰$

یعنی $لا = ۰$ یا $لا = ۴$ سے

پس تکملہ کے حدود $لا = ۰$ اور $لا = ۴$ لیے جانے چاہئیں۔

$$\therefore \left[ \frac{۴}{۳} لا^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۲} لا^2 \right]_۰^۴ = \left[ \left( \frac{۴}{۳} \times ۸ - ۱۶ \times \frac{۱}{۲} \right) - ۰ \right] = \frac{۸}{۳}$$ جواب

## ۶۔ رقبہ کی تعیین جبکہ منحنیوں کی مساواتیں مبدّلی شکل میں دی گئی ہوں۔

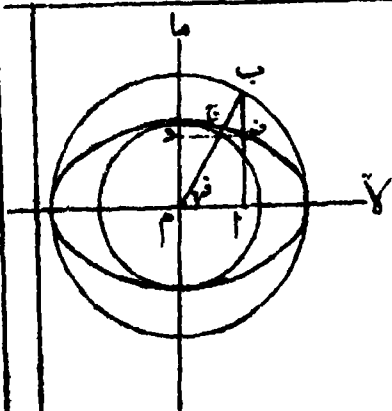
فرض کرو کہ منحنی کی مبدّلی مساواتیں $لا = ف (و)$ اور $ما = فہ (و)$ ہیں

تب $ما = فہ (و)$ اور $فرلا = فَ (و) فرو$

پس رقبہ $= \int_{ا}^{ب} ما \, فرلا = \int_{و_۱}^{و_۲} فہ (و) فَ (و) فرو$ ........ (۱)

جس میں $و = و_۱$ جبکہ $لا = ا$ اور $و = و_۲$ جبکہ $لا = ب$

[نوٹ۔ اس تعویض کے باضابطہ ثبوت کے لیے احصاء کی اس سے ارفع کتاب کا مطالعہ کیا جائے]۔

شکل ۵۷

**توضیحی مثال۔** خط ناقص کا رقبہ دریافت کرو جس کی مبدّلی مساواتیں ہیں۔

$لا = ا جم فہ$ اور $ما = ب جب فہ$

حل۔ چونکہ $لا = ا جم فہ$ ∴ $فرلا = - ا جب فہ فرفہ$

جبکہ $لا = ۰$، $فہ = \frac{\pi}{۲}$ اور جبکہ $لا = ا$، $فہ = ۰$

ان کو مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے ناقص کے

پہلے ربع کا رقبہ $= \int_۰^{ا} ما \, فرلا =$

$= - \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰} ا ب جب^2 فہ فرفہ = \frac{\pi ا ب}{۴}$

∴ پورے ناقص کا رقبہ = π اب

# مثالیں

دیے ہوئے منحنی، محور لا اور دیے ہوئے معینوں سے گھیرے ہوئے مندرجۂ ذیل رقبوں کی تعیین کرو:—

(۱) ما = لا + $\frac{۴}{لا^۲}$ ، لا = ۲ ، لا = ۴    [جواب = ۷

(۲) ما = $قو^{\frac{لا}{۴}}$ ، لا = ۰ ، لا = ۲    [جواب ۱ء۲۶

(۳) ثابت کرو کہ خطِ مکافی کے کسی قطاع کا رقبہ جو مکافی کے محور کے علی القوائم وتر سے کٹ کر بنتا ہے، پیرا سونی مستطیل کا دو تہائی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ مکافیوں $ما^۲$ = ۸ لا اور $لا^۲$ = ۸ ما سے گھیرا ہوا رقبہ $\frac{۶۴}{۳}$ ہے۔

(۵) مکافی ما = ۶ + لا - $لا^۲$ سے نقاط (-۱، ۴) اور (۳، ۰) کو ملانے والا وتر جو قطاع تیار کرتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو    [جواب = ۱۰ $\frac{۲}{۳}$

(۶) منحنی ما = $\frac{لا}{۱ + لا^۲}$ اور خطِ مستقیم ۴ ما = لا کا درمیانی رقبہ معلوم کرو۔    [جواب = لوک ۴ - $\frac{۳}{۴}$

(۷) ثابت کرو کہ منحنی ما = مس $\frac{\pi لا}{۴}$ ، محور لا اور خط لا = ۱ سے محدود رقبہ = $\frac{۲}{\pi}$ لوک ۲

(۸) بتاؤ کہ خطِ تدویر (Cycloid) لا = ا (طہ - جب طہ) ، ما = ا (۱ - جم طہ) کی ایک کمان اور محور لا کا درمیانی رقبہ = ۳ π $ا^۲$ ہے۔

(۹) بتاؤ کہ خطِ صنوبری لا = ا (۲ جم و - جم ۲ و)، ما = ا (۲ جب و - جب ۲ و)
کا رقبہ = $۶ \pi ا^۲$

(۱۰) ثابت کرو کہ در تدویر ( hypocycloid ) لا = ا $جم^۳$ ط،
ما = ا $جب^۳$ ط (جس میں ط مبدّل ہے) کا رقبہ $\frac{۳}{۸} \pi ا^۲$ یعنے پیرامونی دائرہ کے رقبہ کا $\frac{۳}{۸}$ ہے۔

[نوٹ۔ جس طرح لا، ما کو کسی منحنی کے محدد مان کر ما فرلا کا مقررہ حدود میں تکملہ محسوب کرنے سے رقبہ دریافت ہوتا ہے اسی طرح اگر لا، ما کسی متحرک ذرّہ سے متعلق وقت اور تلنا ظر رفتار کو تعبیر کرتے ہیں تو لا کے معینہ حدود میں ما فرلا محسوب کرنے سے محدود تکملہ ذرّہ کا طے کیا ہوا فاصلہ ظاہر کریگا۔ یعنے ایسی صورت میں رقبہ طے شدہ فاصلہ کی ہندسی تعبیر کرتا ہے۔ پس واضح ہے کہ مناسب قرار دادوں کے لحاظ سے حجم، سطح، کمیت، قوت، توانائی وغیرہ کے محدود تکملوں کی بھی ہندسی طریقہ پر رقبہ سے تعبیر ہوسکتی ہے۔ آگے چل کر ان کی متعدد مثالیں پیش کی جائینگی]۔

## ۷۔ تقریبی تکمل۔ منحرف نما شکل کا قاعدہ (Trapezoidal rule)

اب ہم $\int_{ا}^{ب}$ ف (لا) فرلا کی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے دو قاعدے پیش کرینگے۔ یہ ان صورتوں میں کارآمد ہوتے ہیں جبکہ مندرجہ بالا تکمل ابتدائی تفاعلوں کی رقموں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے۔

واضح ہے کہ $\int_{ا}^{ب}$ ف (لا) فرلا کی کاملاً صحیح عددی قیمت، منحنی ما = ف (لا)، محور لا اور لا = ا، لا = ب معینوں سے گھیرے ہوئے رقبہ کی پیمایش ہے۔ یہ رقبہ تقریبی طریقہ پر عنصری منحرف نماؤں کے جوڑنے سے دریافت ہوسکتا ہے جیسا کہ ذیل کے بیان سے معلوم ہوگا۔ محورِ لا کے قطع ب - ا کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرو کہ ہر حصہ = مف لا۔ نقاطِ تقسیم

متواتر مقطوعوں کو $\text{لا}_0 \, (= \text{ا})$، $\text{لا}_1$، $\text{لا}_2$ ...... $\text{لا}_\text{ن} \, (= \text{ب})$ مانو۔

شکل ۵۸

ان نقطوں پر منحنی $\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$ کے متعلقہ معین $\text{ما}_0 = \text{ف}(\text{لا}_0)$، $\text{ما}_1 = \text{ف}(\text{لا}_1)$، $\text{ما}_2 = \text{ف}(\text{لا}_2)$ ...... $\text{ما}_\text{ن} = \text{ف}(\text{لا}_\text{ن})$ کھینچو متصل معینوں کے سروں کو وتروں کے ذریعہ ملا دو اس طرح ن منحرف نما تیار ہو گئے ۔

تب ہندسہ کے مشہور ضابطہ سے پہلے منحرف نما کا رقبہ $= \frac{1}{2}(\text{ما}_0 + \text{ما}_1)$ مف لا

دوسرے 〃 〃 $= \frac{1}{2}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)$ مف لا

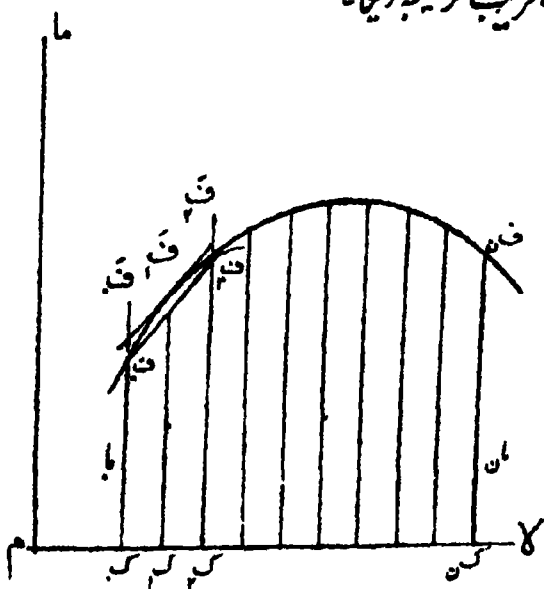
ن ۔ ویں 〃 〃 $= \frac{1}{2}(\text{ما}_{\text{ن}-1} + \text{ما}_\text{ن})$ مف لا

ان سب کو جمع کرنے سے منحرف نمائی قاعدہ

$$\text{رقبہ} = \left(\frac{1}{2}\text{ما}_0 + \text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \ldots\ldots \text{ما}_{\text{ن}-1} + \text{ما}_\text{ن}\right) \text{مف لا} \qquad (\text{ح})$$

حاصل ہوتا ہے ۔ ظاہر ہے کہ اس طریقہ میں مف لا جتنا چھوٹا ہوگا منحرف نماؤں کے رقبوں کا مجموعہ دیے ہوئے منحنی کے نیچے کے رقبہ کے قریب تر مساوی ہوگا ۔

# سمپسن (Simpson) کا قاعدہ (یا مکافی شکل کا قاعدہ)

اگر متواتر معینوں ما۰ اور ما۱ وغیرہ کے سروں کو وتروں کے ذریعہ ملانے کے عوض متصل کے تین تین معینوں کے سروں میں سے مناسب خطوط مکافی کھینچیں۔ (دیکھو شکل ۵۹) تو چونکہ انتصابی محور والا خط مکافی کسی بھی منحنی کے تین نقطوں میں سے گزارا جا سکتا ہے اور ایسی قوسوں کا سلسلہ دیے ہوئے منحنی کے ساتھ بہ نسبت وتروں کے شکستہ خط کے زیادہ منطبق ہوتا ہے اس لیے یہ طریقہ رقبہ کی صحیح قیمت کے قریب تر نتیجہ دیگا۔

شکل ۵۹

شکل ۵۹ میں محور م لا پر لا = ا = م ک۰ سے لے کر لا = ب = م کن تک کے وقفہ کو ن جفت مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ہر حصہ = مف لا۔ ہر تین نقطوں ف۰، ف۱، ف۲، ف۲، ف۳، ف۴، وغیرہ کے متواتر مجموعے میں سے انتصابی محور والے خطوط مکافی کھینچے گئے ہیں۔

چنانچہ مکافی ٹکڑے ک۰ ف۰ ف۱ ف۲ ک۲ کا رقبہ

= منحرف نما ک ب ف ب ف$_2$ ک$_2$ + قطاع مکافی ف ب ف$_1$ ف$_2$

لیکن منحرف نما ک ب ف ب ف$_2$ ک$_2$ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (م$_0$ + م$_2$) ۲ مف لا

= (م$_0$ + م$_2$) مف لا

اور قطاع مکافی ف ب ف$_1$ ف$_2$ = $\frac{2}{3}$ (رقبہ پیرامونی متوازی الاضلاع ب ب' ف' ف$_2$) [دیکھو مثال (۲) متعلقہ ص۔۔۔]

= $\frac{2}{3}$ (م$_1$ - $\frac{1}{2}$ (م$_0$ + م$_2$)) ۲ مف لا = $\frac{2}{3}$ (۲م$_1$ - م$_0$ - م$_2$) مف لا

پس پہلے مکافی ٹکڑے گ ب ف ب ف$_2$ ک$_2$ کا رقبہ = (م$_0$ + م$_2$) مف لا + $\frac{2}{3}$ (۲م$_1$ - م$_0$ - م$_2$) مف لا

= $\frac{\text{مف لا}}{3}$ (م$_0$ + ۴ م$_1$ + م$_2$)

اسی طرح دوسرے (دُہرے) ٹکڑے کا رقبہ = $\frac{\text{مف لا}}{3}$ (م$_2$ + ۴ م$_3$ + م$_4$)

تیسرے " " " = $\frac{\text{مف لا}}{3}$ (م$_4$ + ۴ م$_5$ + م$_6$)

. . . . . . . . . . . .

آخری " " " = $\frac{\text{مف لا}}{3}$ (م$_{ن-2}$ + ۴ م$_{ن-1}$ + م$_ن$)

ان سب کو جمع کرنے سے سمپسن کا قاعدہ (ن کو جفت لے کر) حاصل ہوتا ہے:-

(س) رقبہ = $\frac{\text{مف لا}}{3}$ (م$_0$ + ۴ م$_1$ + ۲ م$_2$ + ۴ م$_3$ + ۲ م$_4$ + .... م$_ن$)

منحرف نمائی قاعدہ کی طرح اس قاعدہ میں بھی مف لا جتنا چھوٹا ہوگا (یعنی ن کی تعداد بڑی ہوگی) منحنی کے نیچے کے رقبہ کی قیمت سے نتیجہ اتنا ہی زیادہ قریب تر ہوگا۔

مثال کے طور پر ہم تکملہ $\int^{2}$ $\sqrt{\text{۴ + لا}^3}$ ڈلا کی دونوں طریقوں سے تقریبی قیمت معلوم کرکے ان قیمتوں کا باہمدیگر مقابلہ کرتے ہیں۔

حل ۔ پہلے فرض کرو ن = ۴
پس مف لا = ۰٫۵، اور چونکہ ما = $\sqrt{۴ + لا^۳}$
اس کی مدد سے لا، ما کی قیمتوں کی ایک جدول
کر لیتے ہیں چنانچہ تقریبی ضابطہ (ح)
استعمال کرنے سے

| لا | ما | |
|---|---|---|
| ۰ | ۲٫۰۰۰ = | $ما_۰$ |
| ۰٫۵ | ۲٫۰۳۱ = | $ما_۱$ |
| ۱٫۰ | ۲٫۲۳۶ = | $ما_۲$ |
| ۱٫۵ | ۲٫۷۱۶ = | $ما_۳$ |
| ۲٫۰ | ۳٫۴۶۴ = | $ما_۴$ |

تکملہ = (۱٫۰۰۰ + ۲٫۰۳۱ + ۲٫۲۳۶ + ۲٫۷۱۶ + ۱٫۷۳۲) × ۰٫۵
= ۴٫۸۵۸ جواب

اگر ن = ۱۰ لیا جائے تو اسی قاعدے سے جواب ۴٫۸۲۶ آتا ہے
جو صحیح جواب سے قریب تر ہے۔
اسی تکملہ کو تقریبی ضابطہ (س) استعمال کر کے اور ن = ۴ ہی لے کر دریافت کریں تو
جواب برآمد ہوگا = (۲٫۰۰۰ + ۸٫۱۲۴ + ۴٫۴۷۲ + ۱۰٫۸۶۴ + ۳٫۴۶۴) × $\frac{۰٫۵}{۳}$
= ۴٫۸۲۱ جو ضابطہ (ح) میں ن = ۱۰ لے کر عمل کرنے کے قریب ہے

# مثالیں

سمپسن کے قاعدہ کے ذریعہ مندرجۂ ذیل تکملوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔ ن کی مصرحہ قیمتیں استعمال کی جائیں۔

(۱) $\int_{۰}^{۴} \sqrt[۳]{۱۰ + لا^۲}$ فزلا ن = ۴ ] جواب = ۹٫۸۴

(۲) $\int_{۰}^{۴} \sqrt{۱۰۰ - لا^۲}$ فزلا ن = ۴ ] جواب = ۳۹٫۳۹

(۳) $\int_{۰}^{۲} \sqrt{۹ + لا^۳}$ فزلا ن = ۴ ] جواب = ۶٫۸۹

(۴) $\int_{1}^{2} \sqrt{لا^2 - 16}$ فرلا ن = ۶ [جواب = ۱۸٫۱۰

## ۸۔ محدود تکملہ کے حدود کا باہمی تبادلہ مترادف ہے محدود تکملہ کی تبدیلی علامت کے۔

چونکہ $\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = ف(ب) - ف(ا)$

اور $\int_{ب}^{ا} فہ(لا)\, فرلا = ف(ا) - ف(ب)$

پس $\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = -\int_{ب}^{ا} فہ(لا)\, فرلا$

## ۹۔ محدود تکملہ کے وقفہ تکمل کی تحلیل۔

چونکہ $\int_{ا}^{لا_1} فہ(لا)\, فرلا = ف(لا_1) - ف(ا)$

اور $\int_{لا_1}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = ف(ب) - ف(لا_1)$

اس لیے دونوں کو جمع کرنے سے $\int_{ا}^{لا_1} فہ(لا)\, فرلا + \int_{لا_1}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = ف(ب) - ف(ا)$

لیکن $\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = ف(ب) - ف(ا)$

پس آخری دو جملوں کے مقابلہ سے واضح رہے کہ

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فرلا = \int_{ا}^{لا_1} فہ\, لا\, (فرلا) + \int_{لا_1}^{ب} فہ(لا)\, فرلا$$

اس مسئلہ کی ہندسی ترجمانی بھی بآسانی ہو سکتی ہے۔ بطور مشق یہ کام طالب علم

کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ یہ بھی واضح ہے کہ محدود تکملہ کی حسب طریقہ بالا نہ صرف دو بلکہ متعدد جداگانہ محدود تکملوں میں تحلیل ہو سکتی ہے۔

## ۹۔ ایک محدود تکملہ اس کے حدود کا تفاعل ہے۔

اس لیے کہ

$\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{د})$ اسی طرح $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{ی})\,\text{فری} = \text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{د})$

اور $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ کی بعینہ وہی قیمت ہے جو $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{ی})\,\text{فری}$ وغیرہ کی

## ۱۰۔ نامتناہی حدود۔

اب تک فرض کیا گیا تھا کہ تکمل کے حدود محدود ہیں۔ معمولی کاموں میں بھی بعض اوقات اس شرط کے رفع کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ خاص خاص صورتوں میں مندرجۂ ذیل تعریفات کی مدد سے یہ شرط رفع ہو سکتی ہے۔

### تعریفات:-

جب بالائی حد نامتناہی ہے تو $\int_{\text{د}}^{+\infty} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہیا}} \int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا}$

اور جب زیرین حد نامتناہی ہے تو $\int_{-\infty}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \underset{\text{د}\to-\infty}{\text{نہیا}} \int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا}$

بشرطیکہ ایسی انتہائیں موجود ہیں۔

**توضیحی مثال (۱)** گنبسی کی ڈائن کی مساوات $\text{لا}^2\,\text{ا} = 4\text{د}^2(2\text{د} - \text{ا})$ ہے

یعنے $\text{ا} = \frac{8\text{د}^3}{\text{لا}^2 + 4\text{د}^2}$ اور شکل نمبر ۹۰ اس کی ترسیم ہے

$\int_{0}^{+\infty} \frac{8\text{د}^3\,\text{فرلا}}{\text{لا}^2 + 4\text{د}^2}$ کی تعیین کی

ھا ف د ق م ب لا

شکل ۹۰

ہندسی ترجمانی رقبہ م ف ق ب کی قیمت دریافت کرنا ہے جبکہ معین ب ق لا تناہی تک سیدھے جانب ہٹتا چلا جاتا ہے۔ پہلی تعریف کے لحاظ سے

$$\int_{\cdot}^{+\infty} \frac{\text{۸}\,\text{و}^{\text{۳}}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۴}\,\text{و}^{\text{۲}}} = \underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}} \int_{\cdot}^{\text{ب}} \frac{\text{۸}\,\text{و}^{\text{۳}}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۴}\,\text{و}^{\text{۲}}} = \underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}} \left[\text{۴}\,\text{و}^{\text{۲}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}\,\text{و}}\right]_{\cdot}^{\text{ب}}$$

$$= \underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}} \left[\text{۴}\,\text{و}^{\text{۲}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{ب}}{\text{۲}\,\text{و}}\right] = \text{۴}\,\text{و}^{\text{۲}}\,\frac{\pi}{\text{۲}} = \text{۲}\pi\,\text{و}^{\text{۲}} \ \text{جواب}$$

اس نتیجہ سے ظاہر ہے $\text{۲}\pi\,\text{و}^{\text{۲}}$ کو ہم دیے ہوئے منحنی معین م ف اور محور م لا سے گھیرا ہوا یا محدود رقبہ کہہ سکتے ہیں۔ اگرچہ درحقیقت یہ رقبہ بالکلیہ گھیرا ہوا یا محدود نہیں ہے۔

توضیحی مثال (۲) $\int_{\text{۱}}^{+\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ دیا ہوا تکملہ $= \underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{۱}}^{\text{ب}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}} (\text{لوک ب})$

ب کی قیمت جب نا متناہی طریقہ پر بڑھتی ہے تو لوک ب کی انتہا وجود نہیں رکھتی۔ پس اس مثال میں تکملہ بے معنی ہے۔

**۱۱۱** ۔ اب ہم ایسی چند صورتوں سے بحث کرینگے جن میں تفاعل ما = فہ (لا) جس کا تکمل کرنا مقصود ہے تکمل کے حدود کے مابین متغیر کی جداگانہ قیمتوں کے لیے غیر مسلسل ہے۔

پہلے فرض کرو کہ تفاعل مدود او اور ب کے مابین لا کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء لا = و مسلسل ہے۔

اگر و > ب اور صہ مثبت ہے تو تکملہ کے لیے ہم تعریف ذیل استعمال کرینگے:۔

$$\int_{\text{و}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \underset{\text{صہ}\to\cdot}{\text{نہا}} \int_{\text{و}+\text{صہ}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ (\text{۱})$$

بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہے۔

اب فرض کرو کہ تفاعل حدود ا اور ب کے مابین لا کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء لا = ب مسلسل ہے۔ تو اس کے لیے یہ تعریف استعمال کرینگے

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\,فرلا = \lim_{صہ \to ۰} \int_{ا}^{ب-صہ} فہ(لا)\,فرلا \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہے۔

جب تفاعل دیے ہوئے حدود کے مابین لا کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء لا = ج مسلسل ہے اور ج واقع ہے ا اور ب کے درمیان۔ تو صہ اور ضہ کو مثبت اعداد مان کر تکملہ کی اس طرح تعریف کرینگے :-

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\,فرلا = \lim_{صہ \to ۰} \int_{ا}^{ج-صہ} فہ(لا)\,فرلا + \lim_{ضہ \to ۰} \int_{ج+ضہ}^{ب} فہ(لا)\,فرلا \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

بشرطیکہ یہ انتہائیں علیحدہ علیحدہ موجود ہیں۔

توضیحی مثال (۱) $\int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{لا^۲}$ کی تعیین کرو۔

حل۔ اس مثال میں $\frac{۱}{لا^۲}$ نامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰۔

پس تعریف (۱) کے بموجب $\int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{لا^۲} = \lim_{صہ \to ۰} \int_{صہ}^{۱} \frac{فرلا}{لا^۲} = \lim_{صہ \to ۰} \left[\frac{۱}{صہ} - \frac{۱}{۱}\right]$

اس صورت میں کوئی انتہا نہیں ہے اس لیے تکملہ کا وجود نہیں ہے۔

توضیحی مثال (۲) $\int_{۰}^{ا} \frac{فرلا}{\sqrt{ا^۲ - لا^۲}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ اس مثال میں $\frac{۱}{\sqrt{ا^۲ - لا^۲}}$ نامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ا

پس تعریف (۲) کے بموجب $\int_{0}^{\text{ا}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \int_{0}^{\text{ا-صہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$

$= \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \left[\text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right]_{0}^{\text{ا-صہ}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \left[\text{جب}^{-1}\left(1 - \frac{\text{صہ}}{\text{ا}}\right)\right] = \text{جب}^{-1} 1$

$= \frac{\pi}{2}$ جواب

**توضیحی مثال (۳)** $\int_{0}^{3\text{ب}} \frac{2\,\text{لا فرلا}}{\sqrt[3]{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^2}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس مثال میں تکمل طلب تفاعل حدود تکمل یعنے لا کی قیمتوں صفر اور ۳ ب کے مابین لا = ب پر غیر مسلسل ہوجاتا ہے۔

پس بموجب تعریف (۳) $\int_{0}^{3\text{ب}} \frac{2\,\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \int_{0}^{\text{ب-صہ}} \frac{2\,\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}}$

$+ \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \int_{\text{ب+صہ}}^{3\text{ب}} \frac{2\,\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \left[3(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{1}{3}}\right]_{0}^{\text{ب-صہ}}$

$+ \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \left[3(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{1}{3}}\right]_{\text{ب+صہ}}^{3\text{ب}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \left[3\sqrt[3]{(\text{ب-صہ})^2 - \text{ب}^2} + 3\,\text{ب}^{\frac{2}{3}}\right]$

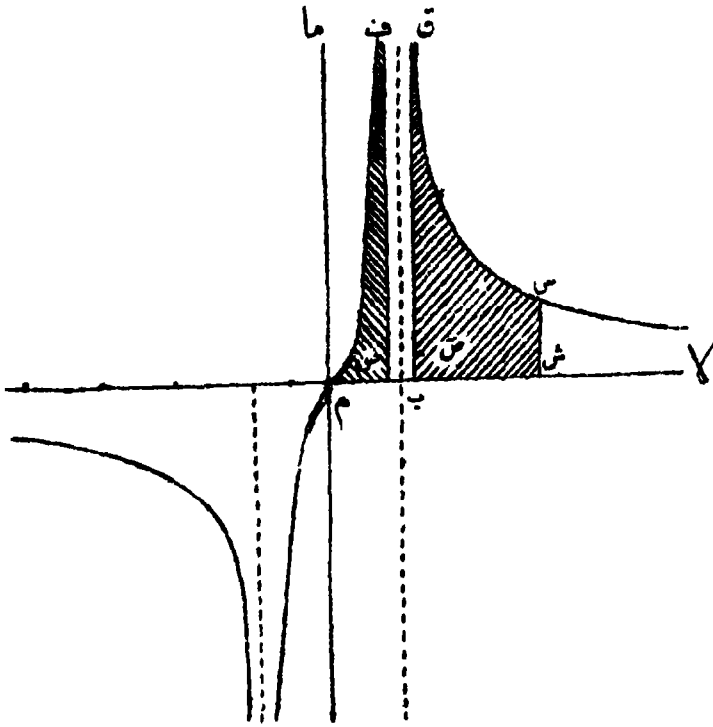
$+ \text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \left[3\sqrt[3]{8\,\text{ب}^2} - 3\sqrt[3]{(\text{ب+صہ})^2 - \text{ب}^2}\right]$

$= 3\,\text{ب}^{\frac{2}{3}} + 6\,\text{ب}^{\frac{2}{3}} = 9\,\text{ب}^{\frac{2}{3}}$ جواب

اس کی ہندسی ترجمانی کے لیے منحنی $\text{ما} = \frac{2\,\text{لا}}{\sqrt[3]{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^2}}$ شکل ۶۱ میں مرتسم کیا گیا ہے۔ اس کے ملاحظہ سے واضح ہوگا کہ لا = ب ایک متقارب ہے۔ م ش = ۳ ب، م ص = ب - صہ اور م ص' = ب + صہ رقبہ م ف ص = $\int_{0}^{\text{ب-صہ}} \frac{2\,\text{لا فرلا}}{\sqrt[3]{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)^2}} = 3\sqrt[3]{(\text{ب-صہ})^2 - \text{ب}^2} + 3\,\text{ب}^{\frac{2}{3}}$

جیسے جیسے ف ص متقارب کی طرف سیدھے جانب آگے بڑھتا ہے

یعنے جوں جوں صہ صفر کے قریب پہنچتا ہے، رقبہ م ف ص ۲ ب$^{\frac{۱}{۲}}$ کو بطور انتہا پہنچتا ہے۔

شکل ۱۶

سابقہ توضیحی مثال کی طرح ۲ ب$^{\frac{۱}{۲}}$ کو ہم م ف، متقارب اور محور م لا سے گھیرا ہوا رقبہ کہتے ہیں ۔

اسی طرح رقبہ ص' ق س ش = $\int_{ب+صہ}^{۲ب} \frac{۲لا\ فرلا}{\sqrt[۳]{(لا^۲ - ب^۲)^۲}}$

$= ۳ \sqrt[۳]{۳ب^۲} - ۳ \sqrt[۳]{(ب+صہ)^۲ - ب^۲}$

اور وہ بطور انتہا ۶ب$^{\frac{۲}{۳}}$ کو پہنچتا ہے جیسے جیسے ق ر ق ۔ ۔ دائیں جانب متقارب

کی طرف پہنچتا ہے یعنے جوں جوں صہ صفر کے قریب پہنچتا ہے۔ اس لیے ۶ ب^۲ کو ہم ق س' متقارب اور معین لا = ۲ ب کہتے ہیں۔ ان نتائج کو جمع کرنے سے ۹ ب^۲ حاصل ہوتا ہے جو محور م ما کے سیدھے جانب کا رقبہ مابین منحنی معین لا = ۳ ب اور محور م لا کہلاتا ہے۔

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\,(\text{۲لا}^{2}-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}$

(۲) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{ب}^{2} + \text{د}^{2}\,\text{لا}^{2}} = \frac{\pi}{\text{۲ب د}}$

(۳) $\int_{-\infty}^{1} \text{و}^{\text{ط}}\,\text{فرط} = \text{و}$

(۴) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{2} + \text{۲لا} - 2} = \pi$

(۵) $\int_{0}^{\text{ب}} \frac{\text{لا}^{2}\,\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{ب}^{2}+\text{لا}^{2})^{3}}} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} - 2\right)\text{ب}$

# تیرہواں باب

## تکملہ کا تصور بطور انتہائے مجموعہ

(گردشی مجسموں کے حجم، منحنیوں کی تخطیط گردشی سطحوں کے رقبے وغیرہ)

### ۱۔ تکملی احصاء کا اساسی مسئلہ ۔

فرض کرو کہ تفاعل فہ (لا) وقفہ لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے۔ اس وقفہ کو ن صغیر یا زیر وقفوں (Sub-intervals) میں تقسیم کرو جن کے طول مف لا$_1$، مف لا$_2$ .... مف لا$_ن$ ہیں اور ہر ایک صغیر زیر وقفہ میں ایک ایک نقطہ منتخب کرو۔ ان نقطوں کے فصلوں یا مقطوعوں کو علی الترتیب لا$_1$، لا$_2$ .... لا$_ن$ مانو۔ اب حاصل جمع

فہ(لا$_1$) مف لا$_1$ + فہ(لا$_2$) مف لا$_2$ + .... + فہ(لا$_ن$) مف لا$_ن$ = $\sum_{و=1}^{ن}$ فہ(لا$_و$) مف لا$_و$ ....(۱)

پر غور کرو - اس مجموعہ کی انتہائی قیمت جبکہ ن نامتناہی بڑا
ہوتا ہے اور ہر ایک زیر وقفہ بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے،
مساوی ہوتا ہے محدود تکملہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ (لا) فرلا کے

مختصراً $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ (لا) فرلا $=$ نہا$_{\text{ن} \to \infty}$ $\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}}$ فہ (لا$_{\text{و}}$) مف لا$_{\text{و}}$

اس مسئلہ کی اہمیت اس امر سے پیدا ہوتی ہے کہ ہم عمل تکمل سے
ایک ایسی مقدار کو محسوب کر سکتے ہیں جو (۱) کی صورت کے
مجموعہ کی انتہا ہے -

یہاں یہ یاد رہے کہ مجموعہ (۱) کی ہر رقم ایک تفرقی جملہ ہے، اس لیے
کہ طول مف لا$_1$، مف لا$_2$ ... مف لا$_{\text{ن}}$ بطور انتہا صفر کو پہنچتے ہیں -

اس مسئلہ کا جب عملی سوالات پر اطلاق کیا جاتا ہے تو مندرجہ ذیل
قاعدہ بکار آمد ہوتا ہے -

## اساسی مسئلہ کا قاعدہ

**پہلا عمل** - مطلوبہ مقدار کو متشابہ حصص میں تقسیم کرو، ایسے کہ
نتیجہ واضح طور پر ان حصص کے حاصل جمع کی انتہا معلوم کرنے سے دریافت
ہو جائے -

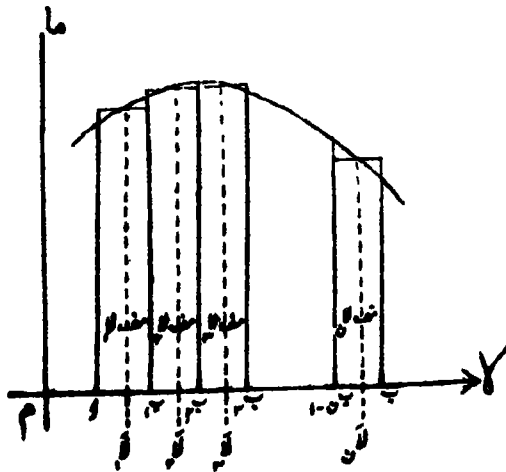
**دوسرا عمل** - ان حصص کی مقداروں کے لیے ایسے جملے اخذ
کرو کہ ان کا حاصل جمع صورت (۱) کا سا ہو -

**تیسرا عمل** - مناسب انتہائیں لا = ا اور لا = ب
منتخب کر لینے کے بعد اساسی مسئلہ

نہا$_{\text{ن} \to \infty}$ $\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}}$ فہ (لا$_{\text{و}}$) مف لا$_{\text{و}}$ $=$ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ (لا) فرلا

استعمال کر کے تکمل انجام دو۔

## ۳۔ اساسی مسئلہ کا تحلیلی ثبوت۔

سابقہ فصل کی طرح لا = ا سے لا = ب تک کے وقفہ کو کوئی بھی ن تعداد زیر وقفوں میں منقسم کرو جن کا مساوی ہونا لازمی نہیں۔ ان نقاط تقسیم کے فصلوں کو ب۱، ب۲ ..... ب سے تعبیر کرو اور زیر وقفوں کے طولوں کو معف لا۱، معف لا۲ ..... معف لان سے تعبیر کرو۔ اب فرض کرو کہ مسئلہ اوسط قیمت (باب دہم) کے ذریعہ ہر ایک زیر وقفہ میں ایک ایک فصلہ دریافت کیا جاتا ہے جو علی الترتیب لا۱، لا۲ ..... لان سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ ہر نقطہ پر ایک ایک معین بناؤ (دیکھو شکل ۶۲) اور ہر معین کے سرے میں سے افقی خط کھینچ کر ایک ایک مستطیل تیار کرو۔ یہ بات ذہن نشین رہے کہ یہاں اوسط قیمت کے مسئلہ والے فَ (لا) کی جگہ فہ (لا) ہے۔

شکل ۶۲

پس مساوات (ب) متعلق مسئلہ مذکور کے پہلے وقفہ (ا = ا، ب = ب) اور لا واقع ہے

ا اور ب۱ کے مابین) پر اطلاق سے،

$$\frac{\text{ف}(\text{ب}_1) - \text{ف}(\text{ا})}{\text{ب}_1 - \text{ا}} = \text{فہ}(\text{لا}_1)$$

یا، چونکہ ب۱ − ا = معـ(لا۱)، ف(ب۱) − ف(ا) = فہ(لا۱) معـ لا۱

اسی طرح دوسرے وقفہ کے لیے، ف(ب۲) − ف(ب۱) = فہ(لا۲) معـ لا۲

تیسرے وقفہ کے لیے، ف(ب۳) − ف(ب۲) = فہ(لا۳) معـ لا۳

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

ن-ویں وقفہ کے لیے، ف(ب) − ف(بن-۱) = فہ(لان) معـ لان

ان سبھوں کو جمع کرنے سے ف(ب) − ف(ا) = فہ(لا۱) معـ لا۱

+ فہ(لا۲) معـ لا۲ + .... + فہ(لان) معـ لان ..... (۱)

لیکن فہ(لا۱) معـ لا۱ = پہلے مستطیل کا رقبہ فہ(لا۲) معـ لا۲ = دوسرے مستطیل کا رقبہ وغیرہ

اس لیے مساوات (۱) کے بائیں جانب کا مجموعہ مستطیلوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

لیکن $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ(لا) فرلا = ف(ب) − ف(ا)

اور $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فہ(لا) فرلا منحنی ما = فہ(لا)، محور لا اور لا = ا، اور لا = ب پر کے معینوں کے درمیانی رقبہ کے مساوی ہے۔

پس مجموعہ $\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}}$ فہ(لاو) معـ لاو ..... (۲) اس رقبہ کے مساوی ہے

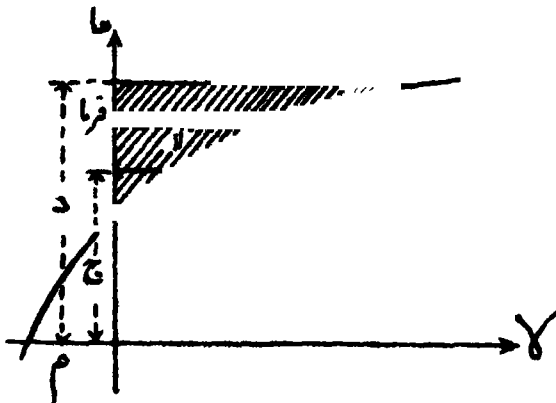
اور در انحالیکہ متناظر مجموعہ $\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}}$ فہ(لاو) معـ لاو ........ (۳)

(جس میں لاو زیرِ وقفہ مف لاو کا کوئی بھی فصلہ ہے' یہ رقبہ نہیں دیتا ہے' تاہم یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دونوں مجموعے (۲) اور (۳) مساوات کو پہنچ جاتے ہیں جبکہ ن نامتناہی بڑا ہوتا ہے اور ہر ایک زیرِ وقفہ بطور انتہا کے صفر کو پہنچتا ہے۔ کیونکہ تفاوت فہ (لاَو) - فہ (لاَو) کی عددی قیمت مف لاو میں اعظم و اقل معینوں کے تفاوت سے زیادہ نہیں ہوتی ہے معہذا یہ ہر وقت ممکن ہے (اگرچہ اس کا ثبوت تالیف ہذا کے نصاب سے باہر ہے) کہ ان تمام تفاوتوں کو بلحاظ عددی قیمت کے کسی مقررہ (assignable) مثبت عدد صہ سے' خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو' وقفوں کی تقسیم در تقسیم کافی حد تک عمل میں لا کر (یعنی بالفاظ دیگر ن کو کافی بڑا لے کر) کمتر بنا دیا جائے۔ پس ایسے ن کے لیے مجموعوں (۲) اور (۳) کا تفاوت عددی قیمت میں صہ (ب - ا) سے بقدر کسی مقررہ مثبت مقدار کے خواہ وہ کتنی بھی صغیر ہو کمتر ہے۔ بدیں وجہ ن جیسے جیسے نامتناہی بڑا ہوتا ہے مجموعہ (۲) اور مجموعہ (۳) باہم دیگر قریب تر مساوی ہوتے جاتے ہیں اور چونکہ (۲) ہمیشہ رقبہ کے مساوی ہوتا ہے' اساسی نتیجۂ ذیل برآمد ہوتا ہے:—

$$\int_{ا}^{ب} فہ (لا) \, فرلا = نہا_{ن \to \infty} \sum_{و=۱}^{ن} فہ (لاَو) \, مف لاو$$

جس میں وقفہ [ا، ب] کی کسی طرح سے بھی تقسیم در تقسیم عمل میں لائی جاتی ہے اور لاَو متناظر زیرِ وقفہ میں کوئی فصلہ ہے۔

## ۳۔ مستوی منحنیوں کے رقبے علی القوائم محدد۔

شکل ۴۳ پر غور کرنے سے واضح ہو گا کہ رقبہ مابین منحنی فہ ق محور لا

اور معین لا = ا و لا = ب = $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا ........ (ا)

ما کو لا کی رقموں میں تعویض کرنے اور مصرحۂ بالا محدود تکملہ

شکل ۶۳

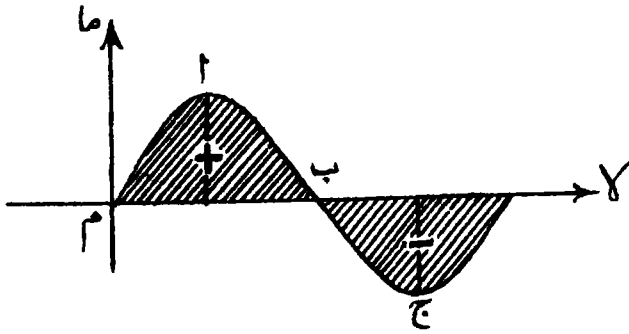
محسوب کرنے سے مطلوبہ رقبہ دریافت ہو جاتا ہے۔

اسی طرح شکل ۶۴ پر غور کرنے سے واضح ہوگا کہ رقبہ ماببن منحنی، محور ما اور اُفقی خطوط ما = ج اور ما = د = $\int_{ج}^{د}$ لا فرما ........ (ب)

شکل ۶۴

لا کو ما کی رقموں میں تعویض کرنے اور مصرحۂ بالا محدود تکملہ محسوب کرنے سے مطلوبہ رقبہ دریافت ہو جاتا ہے۔ رقبہ کے سامنے منفی علامت لکھی جائے تو اس کا کیا مفہوم ہے؟ ضابطہ (۱) میں ا کمتر ہے ب سے۔ چونکہ

$\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا سے مراد نہا $\sum_{و=1}^{ن}$ فہ (لاو) مف لاو ہے اور اس مجموعہ میں

و = ۱، ۲، ۳، ... ن تو اگر فہ (لاو) یا ما منفی ہو اس مجموعہ کی ہر ایک رقم منفی ہوگی اور ضابطہ (۱) ایک ایسا رقبہ دیگا جس کے سامنے منفی علامت ہوگی۔ اس کے یہ معنی ہونگے کہ رقبہ مذکور محور لا کے نیچے ہوگا۔ جیسے جیبی منحنی ما = جب لا سے متعلق م ا ب ج د کی کمان م ا ب کا رقبہ مثبت ہے اور کمان ب ج د کا رقبہ منفی ملاحظہ ہو شکل ۶۵۔

شکل ۶۵

کیونکہ ما = صفر لکھ کر لا کے لیے حل کرنے سے

لا = ۰، π، ۲π وغیرہ

اور ضابطہ (۱) سے رقبہ م ا ب = $\int_{0}^{ب}$ ما فرلا = $\int_{0}^{\pi}$ جب لا فرلا = ۲

اور رقبہ ب ج د = $\int_{ب}^{د}$ ما فرلا = $\int_{\pi}^{2\pi}$ جب لا فرلا = −۲

## توضیحی مثال ۔ خط مکافی $لا^2 = ۴ ل ما$ اور ڈائن $ما = \frac{۸ ل^3}{لا^2 + ۴ ل^2}$

کا درمیانی رقبہ معلوم کرو۔

حل ۔ اس کو دو طرح سے حل کر سکتے ہیں۔ ایک طریقہ یہ ہے کہ تکمل کے حدود معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی مساواتوں کو ہمزاد تصور کرکے مشترک لا و ما کی قیمتیں دریافت کرلی جائیں۔ یہ (−۲ ل، ل) اور (+۲ ل، ل) برآمد ہوتی ہیں۔ شکل ۶۶ میں ان نقطوں کو علی الترتیب ا اور ج سے نامزد کیا گیا ہے۔

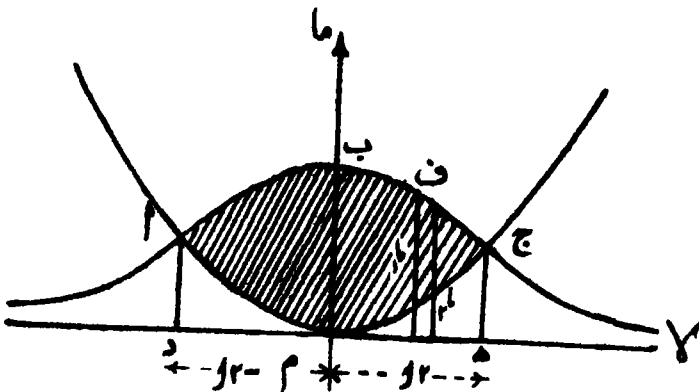
جس رقبہ کی تعیین مطلوب ہے وہ ا م ج ب = رقبہ د ھ ج ب ا ۔ رقبہ د ھ ج م ا ہے۔

لیکن رقبہ د ھ ج ب ا = ۲ × رقبہ م ھ ج ب

$$= ۲ \int_{۰}^{۲ل} \frac{۸ ل^3 \, فلا}{لا^2 + ۴ ل^2} = ۲ \pi ل^2$$

اور رقبہ د ھ ج م ا = ۲ × رقبہ م ھ ج

$$= ۲ \int_{۰}^{۲ل} \frac{لا^2}{۴ ل} \, فلا = \frac{۴ ل^2}{۳}$$

پس رقبہ ا م ج ب = $۲ \pi ل^2 - \frac{۴ ل^2}{۳} = ۲ ل^2 \left(\pi - \frac{۲}{۳}\right)$ جواب

شکل ۶۶

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ پٹی ف س کو مطلوب رقبہ کا ایک عنصر تصور کیا جائے۔
اگر ما۱ کو معین متعلق ڈائن قرار دیا جائے اور ما۲ کو معین متعلق خطِ مکافی تو پٹی ف س کے رقبہ کے لیے تفرقی جملہ = (ما۱ - ما۲) فرلا اس میں ما۱ اور ما۲ کی قیمتیں لا کی رقموں میں تعویض کرنے سے رقبہ ا م ج ب

$$= ۲ \times \text{رقبہ م ج ب} = ۲ \int_{0}^{۲ر} (ما_{۱} - ما_{۲}) \, فرلا$$

$$= ۲ \int_{0}^{۲ر} \left( \frac{۸ ر^{۳}}{لا^{۲} + ۴ ر^{۲}} - \frac{لا^{۲}}{۴ ر} \right) فرلا = ۲ ر^{۲} \left( \pi - \frac{۲}{۳} \right)$$

# مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ دو خطوطِ مکافی $ما^{۲} = ا لا$ اور $لا^{۲} = ب ما$ کا درمیانی رقبہ $= \frac{اب}{۳}$

(۲) ثابت کرو کہ منحنی $لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ر^{\frac{۲}{۳}}$ کا کامل رقبہ $\frac{۳}{۸} \pi ر^{۲}$ ہے۔

(۳) بتاؤ کہ متساوی المحورین ہذلولی (قطعِ زائد) $لا^{۲} - ما^{۲} = ر^{۲}$، محور لا اور مبداء سے منحنی پر کے کسی نقطہ (لا، ما) سے گھرا ہوا رقبہ $= \frac{ر^{۲}}{۲} \text{لوک} \left( \frac{لا + ما}{ر} \right)$

(۴) ثابت کرو کہ محور لا، خطِ مکافی $ما^{۲} = ۴ ر لا$ اور خطِ مستقیم $ما + ۲ لا = ۴ ر$ سے محدود رقبہ $= \frac{۹}{۴} ر^{۲}$ [اولاً خطِ مکافی اور خطِ مستقیم کی ترسیمیں تیار کرلی جائیں۔

(۵) ثابت کرو کہ بند منحنی $(ما - لا - ۳)^{۲} = ۴ - لا^{۲}$ خطوط $لا = -۲$ اور $لا = +۲$ کے درمیان واقع ہے، اس کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ اس کا رقبہ $۴\pi$ ہے۔

## ۴ - مستوی منحنیوں کے رقبے قطبی محدد۔

فرض کرو کہ ایک منحنی اور اس کے دو نیم قطر سمتیوں سے محدود رقبہ کی تعیین مطلوب ہے۔
منحنی کی مساوات کو ر = ف (طہ) مان کر فرض کرو کہ م ف۱ اور م د دیے ہوئے سمتی نیم قطر ہیں (دیکھو شکل ۶۷) جو قطبی محور کے ساتھ

علی الترتیب زاویہ ھ و بہ بناتے ہیں۔ اب ملے کا اساسی مسئلہ استعمال کرو۔

شکل ۶۷

اولاً مطلوبہ رقبہ بلاشبہ شکل میں بنائے ہوئے دائری قطاعوں کا حاصل جمع ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ متواتر قطاعوں کے مرکزی زاویے مف ط۱، مف ط۲ وغیرہ ہیں۔ اور ان کے نیم قطر ر۱، ر۲ وغیرہ ہیں۔ تب ان قطاعوں کے رقبوں کا حاصل جمع

$$= \frac{1}{2} ر_1^2 \,\text{مف}\, ط_1 + \frac{1}{2} ر_2^2 \,\text{مف}\, ط_2 + \cdots + \frac{1}{2} ر_ن^2 \,\text{مف}\, ط_ن$$

$$= \sum_{و=1}^{ن} \frac{1}{2} ر_و^2 \,\text{مف}\, ط_و$$

اس لیے کہ دائری قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ نیم قطر × قوس $= \frac{1}{2} ر_1 \, ر_1 \,\text{مف}\, ط_1$

$= \frac{1}{2} ر_1^2 \,\text{مف}\, ط_1$ وغیرہ۔

ثالثاً اساسی مسئلہ استعمال کرنے سے

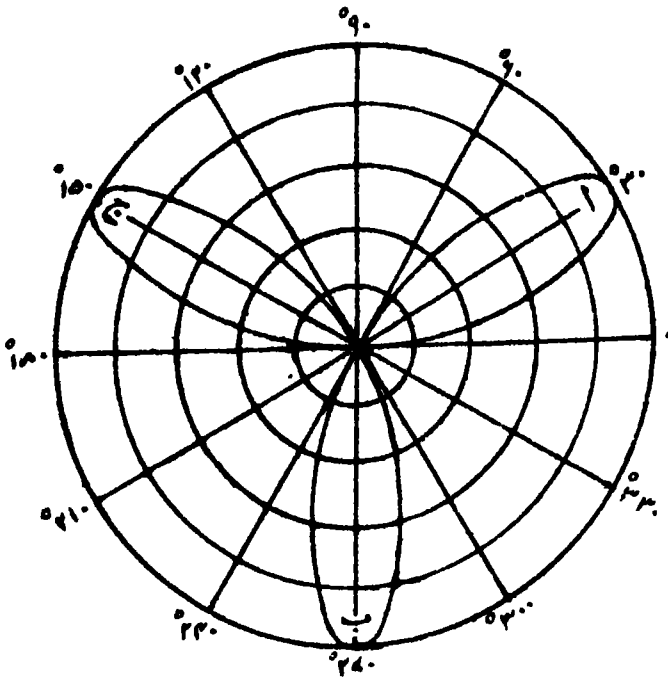
$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \sum_{و=۱}^{ن} \frac{۱}{۲} \text{ر}_و^{۲} \text{ مف طہ}_و = \int^{\text{ب}} \frac{۱}{۲} \text{ر}^{۲} \text{ فرطہ}$$

پس جبکہ منحنی کا نیم قطر سمتی وضع م ف۱ سے نکل کر وضع م د میں پہنچتا ہے تو اس سے جو رقبہ بنتا ہے

$$= \frac{۱}{۲} \int^{\text{ب}} \text{ر}^{۲} \text{ فرطہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{د})$$

منحنی کی مساوات سے ر کی قیمت طہ کی رقموں میں تعویض کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال (۱) منحنی ر = ل جب ۳ طہ کے ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل۔ شکل ۶۸ میں اس منحنی کی ترسیم بنائی گئی ہے۔ شکل کے مطالعہ سے

شکل ۶۸

فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ اس کے بنانے کا کیا طریقہ ہے۔ ہمیں کسی ایک حلقہ کا رقبہ تعیین کرنا ہے۔

واضح ہے کہ یہ رقبہ $\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} ا^2$ جب$^2$ ۳ طہ فرطہ تکمل کرنے کے لیے ۳ طہ کے عوض فہ لکھو

تب رقبہ $= \frac{ا^2}{6}\int_{0}^{\pi}$ جب$^2$ فہ فرفہ $= \frac{ا^2}{12}\int_{0}^{\pi}$ جم۲ فہ فرفہ

$= \frac{\pi ا^2}{12}$ جواب

**توضیحی مثال** (۲) ثابت کرو کہ خط مکافی ر $=$ ا قط$^2$ $\frac{طہ}{2}$ کا وہ رقبہ جو منحنی اور اس کے مرتب کے درمیان واقع ہے $\frac{8ا^2}{3}$ ہے۔

حل۔ ملاحظہ ہو شکل ۶۹، اس سے معلوم ہو جائیگا کہ تکمل کے حدود کیا ہونے چاہئیں:—

شکل ۶۹

$$\text{رقبہ} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{ر}^{۲}\, \text{فرط} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{ا}^{۲}\, \text{قط}^{۴} \frac{\text{ط}}{۲}\, \text{فرط}$$

$$= ۲\,\text{ا}^{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{قط}^{۴} \frac{\text{ط}}{۲}\, \text{فر}\frac{\text{ط}}{۲} = ۲\,\text{ا}^{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(۱ + \text{مس}^{۲} \frac{\text{ط}}{۲}\right) \text{قط}^{۲} \frac{\text{ط}}{۲}\, \text{فر}\frac{\text{ط}}{۲}$$

$$= ۲\,\text{ا}^{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{قط}^{۲} \frac{\text{ط}}{۲}\, \text{فر}\frac{\text{ط}}{۲} + ۲\,\text{ا}^{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{مس}^{۲} \frac{\text{ط}}{۲}\, \text{فر}\left(\text{مس} \frac{\text{ط}}{۲}\right)$$

$$= ۲\,\text{ا}^{۲} \left(۱ + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۸\,\text{ا}^{۲}}{۳}$$

# مثالیں

(۱) چشمہ منحنی $\text{ر}^{۲} = \text{ا}^{۲}\, \text{جم}\, ۲\,\text{ط}$ کا پورا رقبہ دریافت کرو [جواب = $\text{ا}^{۲}$]

(۲) ثابت کرو کہ منحنی $\text{ر} = \text{ا}\, \text{جم}\, ۲\,\text{ط}$ کا پورا رقبہ $\frac{\pi\, \text{ا}^{۲}}{۲}$ ہے۔

(۳) ارشمیدس کی لولبی $\text{ر} = \text{ا}\,\text{ط}$ کے نیم قطر سمتی کی ایک پوری گردش میں ($\text{ط} = ۰$ سے آغاز کرکے) کس قدر رقبہ تیار ہوتا ہے؟ دوسرے مکمل گردش میں کس قدر مزید رقبہ بنتا ہے؟ [جواب (۱) = $\frac{۴\pi^{۳}\text{ا}^{۲}}{۳}$ (۲) = $۸\pi^{۳}\text{ا}^{۲}$]

(۴) $\text{ر}^{۲} = \text{ا}^{۲}\, \text{جب}\, ۴\,\text{ط}$ سے گھیرا ہوا رقبہ دریافت کرو [جواب = $\text{ا}^{۲}$]

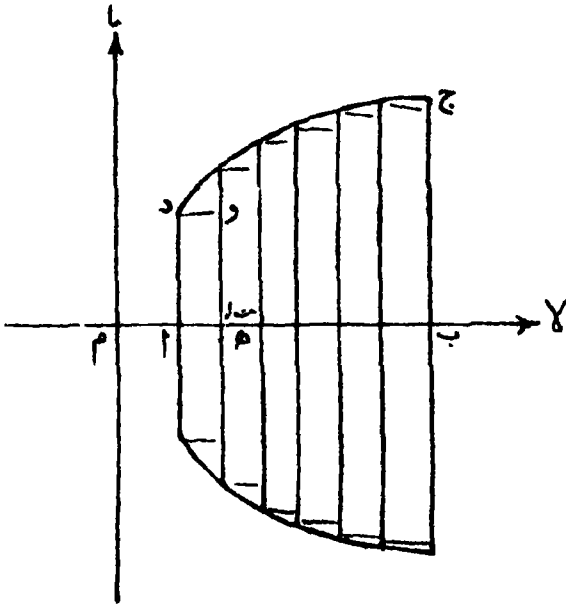
(۵) منحنی $\text{ر} = \text{ا}\, (\text{جب}\, ۲\,\text{ط} + \text{جم}\, ۲\,\text{ط})$ کا پورا رقبہ دریافت کرو۔ [جواب = $\pi\, \text{ا}^{۲}$]

(۶) ثابت کرو کہ ہذلولی لولبی $\text{ر} = \frac{\text{ا}}{\text{ط}}$ کا رقبہ جو اس کے کسی دو سمتی نیم قطروں سے محدود ہے متناسب ہے ان نیم قطر سمتیوں کے طولوں کے تفاوت کے۔

(۷) بتاؤ کہ خطِ ناقص $\text{ر}^{۲} = \frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}\text{جب}^{۲}\text{ط} + \text{ب}^{۲}\text{جم}^{۲}\text{ط}}$ کا رقبہ $\pi\, \text{ا}\,\text{ب}$ ہے۔

**۵ ۔ گردشی مجسموں کے حجم** ۔ فرض کرو کہ شکل ۔۔۔ میں

محور لا کے گرد مستوی سطح ا ب ج د کے گھومنے سے جو مجسم شکل پیدا ہوتی ہے اس کا حجم ح ہے اور مستوی منحنی د ج کی مساوات ما = ف (لا) ہے

شکل نٹ

اولاً ۔ مستوی رقبہ ا ب ج د میں شکل نٹ کی طرح مستطیل شکلیں ا ھ و د وغیرہ تیار کرو۔ جب یہ رقبہ محور لا کے گرد گھمایا جاتا ہے تو ہر ایک مستطیل ایک گردشی اسطوانہ بناتا ہے۔ مطلوبہ حجم صریحاً ان اسطوانوں کے حجموں کے حاصل مجموعہ کی انتہا کے مساوی ہے۔

ثانیاً ۔ مصرحۂ بالا مستطیلوں کے قاعدوں کو مف لا$_1$، مف لا$_2$ وغیرہ قرار دو اور ان کے متناظر ارتفاعوں کو ما$_1$، ما$_2$ وغیرہ۔ تب مستطیل ا ھ و د سے تیار شدہ اسطوانہ کا حجم $\pi$ ما$_1^2$ مف لا$_1$ ہوگا۔ اور ایسے تمام اسطوانوں کے حجموں کا مجموعہ

$$= \pi\, ما_1^2\, مف\, لا_1 + \pi\, ما_2^2\, مف\, لا_2 + \cdots + \pi\, ما_ن^2\, مف\, لا_ن = \sum_{و=1}^{ن} \pi\, ما_و^2\, مف\, لا_و \, .$$

ثالثاً۔ اساسی مسئلہ کی رُو سے (حدود م ا = و اور م ب = ب استعمال کیے)

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \sum_{ر=۱}^{ن} \pi\ \text{ما}_ر^۲\ \text{مف لا}_ر = \int_و^ب \pi\ \text{ما}^۲\ \text{فرلا}$$

پس محور لا کے گرد منحنی، محور لا اور معینوں لا = و اور لا = ب سے محدود رقبہ کو گھمانے سے جو حجم تیار ہوتا ہے اس کا ضابطہ یہ ہے :-

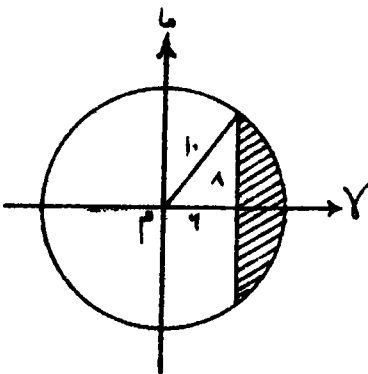
$$\text{ح}_{\text{لا}} = \pi \int_و^ب \text{ما}^۲\ \text{فرلا} \qquad \text{(ھ)}$$

جس میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے ما کی قیمت لا کی رقموں میں تعویض کی جانی چاہیئے۔

اسی طرح جب م ما محور گردش ہو تو گردشی مجسم کا حجم

$$\text{ح}_{\text{ما}} = \int_د^ج \text{لا}^۲\ \text{فرما} \qquad \text{(و)}$$

اس ضابطہ میں منحنی کی مساوات سے لا کی قیمت ما کی رقموں میں تعویض کی جانی چاہیے۔

توضیحی مثال (۱) دس انچ نصف قطر والے ٹھوس کُرہ سے ایک کروی قطاع تراشا جاتا ہے جس کی مستوی سطح ۸ انچ نصف قطر کا دائرہ ہے۔ کروی قطاع کا حجم دریافت کرو۔

حل۔ شکل ۷۱ سے ظاہر ہے کہ کروی قطاع کے مستوی دائرہ کا مرکز مبداء سے ۶ انچ فاصلہ پر واقع ہے اس لیے کہ $۱۰^۲ = ۸^۲ + ۶^۲$

شکل ۷۱

پس مطلوبہ حجم $= \pi \int_۶^{۱۰} \text{ما}^۲\ \text{فرلا}$

اور $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۱۰۰$

$\therefore\ \text{ما}^۲ = ۱۰۰ - \text{لا}^۲$

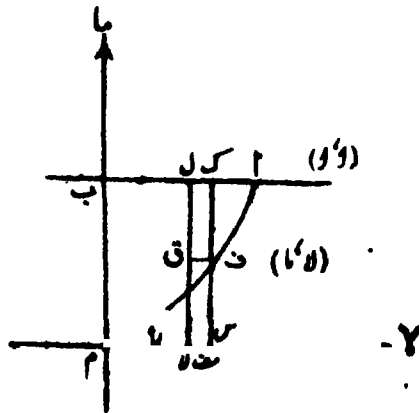
$$\therefore \text{ح} = \pi \int_{۶}^{۱۰} (۱۰۰ - \text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}$$

$$= ۱۰۰\pi \Big[\text{لا}\Big]_{۶}^{۱۰} + \pi \Big[\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\Big]_{۶}^{۱۰} = ۴۰۰\pi - \frac{\pi}{۳}(۱۰^{۳} - ۶^{۳})$$

$$= \frac{۴۱۶\pi}{۳} \text{ کعب انچ جواب}$$

**توضیحی مثال (۲)** نیم کعبی مکافی لا$^{۳}$ = ما$^{۲}$، محور ما اور خط اب (ما = و) (شکل ۲۷) سے محدود رقبہ خط اب کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ گردشی مجسم کا حجم معلوم کرو۔

حل۔ شکل میں گردشی رقبہ م ف اب بتایا گیا ہے۔ اگر خط اب کو ن مساوی حصوں میں (ہر ایک = مف لا) تقسیم کیا جائے تو ک ل

شکل ۲۷

ان میں سے ایک حصہ ہوگا۔ مستطیل ل ک ف ق کو جب اب کے گرد گھمایا جاتا ہے تو ایک گردشی اسطوانہ بنتا ہے جس کا حجم مطلوبہ حجم کا

ایک جزو ہے۔ پس

جزو یا عنصر حجم = π (ف ک)² مف لا

(ف ک) = ا - ما ∴ اساسی مسئلہ کی رو سے

مجسم حجم = ح = π ∫ (ا - ما)² فرلا = π ∫ (ا² - ۲ا ما + ما²) فرلا

کیسی مکافی کی مساوات سے ما = √(لا²/ا) یہ قیمت تکمل میں تعویض کرنے سے ح کی قیمت π ۵/۳ ا³ برآمد ہوتی ہے۔

# مثالیں

(۱) قطع ناقص لا²/ا² + ما²/ب² = ۱ کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم بنتا ہے اس کی قیمت دریافت کرو۔ [جواب = ۴/۳ π ا ب²]

(۲) گردشی مکافی نما کا حجم دریافت کرو جس کی سطح ما² = ۴ ف لا کی قوس کو اس کے محور کے گرد مابین مبدا، و نقطہ (لا، ما) گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔ [جواب = π/۲ ما² لا]

(۳) اگر مثال (۲) کی قوس کو محور ما کے گرد گھمایا جائے تو بتاؤ کہ

حجم = π/۵ لا² ما

(۴) ثابت کرو کہ درتدویر لا^{۲/۳} + ما^{۲/۳} = ا^{۲/۳} سے محدود رقبہ کو محور لا کے گرد گھمانے سے حجم ۳۲ π ا³ / ۱۰۵ بنتا ہے۔

(۵) ص نصف قطر کے ٹھوس کرہ سے ایک قاعدہ والا ٹ موٹائی کا قطاع تراشا جاتا ہے۔ عمل تکمل سے ثابت کرو کہ اس کا حجم π ٹ² (۳ص - ٹ) / ۳

(۶) زنجیرہ (catenary) ما = ا/۲ (قو^{لا/ا} + قو^{-لا/ا}) کو محور لا کے گرد

(مابین حدود لا = ۰ اور لا = ب) گھمانے سے جو حجم بنتا ہے
اس کی تعیین کرو۔　　[جواب = $\frac{\pi ر^2}{8}$ ( ...) + $\frac{\pi ر^2 ب}{2}$

(۷) بتاؤ کہ لبلابی خط (cissoid) $ما^2 = \frac{لا^3}{2ر - لا}$ کو اس کے
متقارب لا = ۲ ر کے گرد گھمانے سے جو حجم حاصل ہوتا ہے $2\pi^2 ر^3$ ہے۔

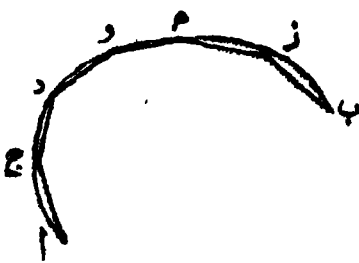
نوٹ:۔ شکل ۔۔ کے منحنی ج د کی مساوات اگر مبدلی صورت
لا = ف (و) اور ما = فہ (و) میں دی جائے تو
ضابطہ (ھ) یعنے حجم ح = $\pi$ ∫ ما² فرلا میں ما = فہ (و) اور
فرلا = فَ (و) فرو تعویض کرو اور حدود تکمل کو $و_1$ اور $و_2$ میں تبدیل کرو' اگر
و = $و_1$ جبکہ لا = ر اور و = $و_2$ جبکہ لا = ب

مثال (۱) درتدویر (hypocycloid) کی مبدلی مساوات $\begin{cases} لا = ر جم^3 طہ \\ ما = ر جب^3 طہ \end{cases}$
استعمال کر کے منحنی مذکور کو محور م لا کے گرد گھمانے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اس کا حجم
دریافت کرو۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ خطِ تدویر (cycloid) $\begin{cases} لا = ر (طہ - جب طہ) \\ ما = ر (۱ - جم طہ) \end{cases}$ کو
محور م لا کے گرد گھمانے سے جو حجم بنتا ہے $5\pi^2 ر^3$ ہے۔

مثال (۳) اگر خطِ تدویر کو اس کے قاعدہ م لا کے گرد گھمایا جائے
تو بتاؤ کہ حجم $6\pi^2 ر^3$ ہے



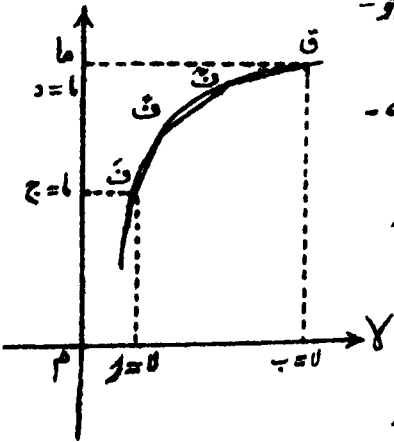
شکل ۔۔۔

## ۔۔ منحنی کا طول۔

شکل ۔۔ میں ایک منحنی ا ب دیا گیا
ہے۔ اس کا طول ناپنے کے لیے اس کو
متعدد حصوں میں جیسے ج' د' ھ' ز پر

نشان لگا کر تقسیم کرو اور تقسیم کے متصل نقطوں کو خطوطِ مستقیم کھینچ کر ملاؤ۔ اس طرح وتر اج، ج د، د و، و ھ، ھ ز، زب تیار ہونگے۔ واضح ہے کہ نقاطِ تقسیم جتنے بھی زیادہ ہونگے ان کے متعلقہ وتروں کا حاصل مجموعہ منحنی کے طول کے قریب تر مساوی ہوگا۔ پس منحنی کے طول کی یوں تعریف کی جاتی ہے کہ وہ منحنی کے وتروں کے مجموعہ کی انتہا ہے جیسے جیسے اس کے نقاطِ تقسیم کی تعداد نامتناہی بڑی ہوتی جاتی ہے اور ساتھ ہی ساتھ ہر ایک وتر فرداً فرداً بطور انتہا صفر کو پہنچ جاتا ہے۔ چونکہ یہ انتہا کسی خطِ مستقیم کے طول کی بھی پیمائش ہوگی اس لیے منحنی کے طول کی تعیین کو اس کی تخطیط بھی کہتے ہیں۔

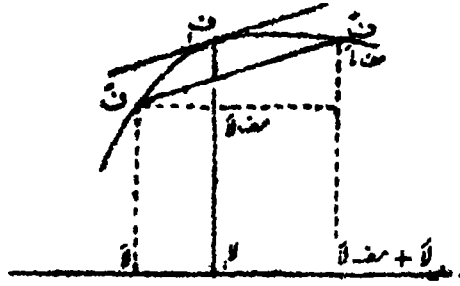
## ٹ۔ منحنیوں کے طول، علی القوائم محدّدوں کی رقموں میں۔

فرض کرو کہ منحنی شکل ٹ۷ کی مساوات ما = ف(لا) ہے اس کی قوس فَ ق کا طول معلوم کرنے کے لیے [جس میں فَ کے محدّد (ا، ج) ہیں اور ق کے محدّد (ب، د)]

اولاً۔ دی ہوئی قوس پر مابین فَ اور قَ کوئی بھی ن عدد نقطے لو اور متصل نقطوں کو ملانے والے وتر کھینچو۔

واضح ہے کہ قوس فَ ق کا مطلوبہ طول مصرحۂ بالا وتروں کے حاصل جمع کی انتہا ہے۔

ثانیاً۔ ان میں سے کسی ایک وتر مثلاً فَ فً پر غور کرو اور فرض کرو کہ فَ کے محدّد (لاَ، مَا) ہیں اور فً کے محدّد (لاَ + معَ لاَ، مَا + معَ مَا) آٹھویں باب کی فصل متعلق تفرقہ قوس کے بموجب

شکل ٹ۷

$$ف\bar{ف} = \sqrt{(\text{مف} لا)^2 + (\text{مف} ما)^2} \quad \text{یعنے} \quad ف\bar{ف} = \left[ 1 + \left( \frac{\text{مف} ما}{\text{مف} لا} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} لا$$

شکل ۳۵

لیکن باب دہم کی فصل متعلق مسائل اوسط قیمت اگر مف ما کو ف (ب) - ف (ا) سے تعبیر کیا جائے اور مف لا کو ب - ا سے تو

$$\frac{\text{مف} ما}{\text{مف} لا} = \bar{ف}(لا_1) \qquad [لا < لا_1 < لا + \text{مف} لا]$$

جس میں $لا_1$ منحنی پر کے ایک نقطہ ف ا کا (جو ف اور $\bar{ف}$ کے مابین واقع ہے اور جہاں خطِ مماس وتر کے متوازی ہے) فصلہ ہے

ابدال سے $ف\bar{ف} = \left[ 1 + \bar{ف}(لا_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} لا$ = پہلے وتر کا طول

اسی طرح $\bar{ف}\bar{\bar{ف}} = \left[ 1 + \bar{ف}(لا_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} \bar{لا}$ = دوسرے وتر کا طول

.....................................

$ف^{(ن)} ق = \left[ 1 + \bar{ف}(لا_ن)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} لا^{(ن)}$ = ن ویں وتر کا طول

پس ف اور ق کو ملانے والے قوس کے اندر کھینچے ہوئے شکستہ خطوط کا طول (یعنے جملہ وتروں کا مجموعی طول)

$$= \left[ 1 + \bar{ف}(لا_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} لا + \left[ 1 + \bar{ف}(لا_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} \bar{لا} + \cdots + \left[ 1 + \bar{ف}(لا_ن)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} لا^{(ن)}$$

$$= \sum_{1}^{ن} \left[ 1 + \bar{ف}(لا_ر)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{مف} لا^{(ر)}$$

ثالثاً۔ اساسی مسئلہ کی رُو سے

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \sum_{و=1}^{ن} \left[1 + \text{فَ}(\text{لاو})^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{مف لا}^{(و)} = \int_{ا}^{ب} \left[1 + \text{فَ}(\text{لا})^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

اس لیے اگر قوس فَ ق کا طول س سے تعبیر کیا جائے تو قوس کے طول کا ضابطہ ہے۔

$$\text{س} = \int_{ا}^{ب} \left[1 + \text{فَ}(\text{لا})^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \quad \text{یا} \quad \text{س} = \int_{ا}^{ب} \left\{1 + \text{مَا}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \quad \ldots \text{(ز)}$$

جس میں $\text{مَا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ قوس کی مساوات کے ذریعہ لا کی رقموں میں معلوم کرلیا جانا چاہیے۔

بعض اوقات ما کو متبوع متغیر ماننے میں زیادہ سہولت پائی جاتی ہے ایسی صورت کے لیے چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}}$، فرلا = لَا فرما اور ان قیمتوں کو ضابطہ (ز) میں تعویض کرنے اور متناظر حدود تکمل ج اور د قرار دینے سے قوس کے طول کا ضابطہ

$$\text{س} = \int_{ج}^{د} \left[\text{لَا}^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} \text{فرما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ح)}$$

جس میں $\text{لَا} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ قوس کی مساوات کے ذریعہ ما کی رقموں میں معلوم کرلیا جانا چاہیے۔

ضابطہ (ز) ایک دوسرے طریقہ سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے۔ آٹھویں باب کی فصل ( ۷ ) میں ضابطہ (د)

$$\text{فرس} = \left\{1 + (\text{مَا})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(۱)}$$

منحنی کی قوس کا تفرقہ معلوم کراتا ہے۔ اگر ہم بارھویں باب کی فصل متعلق بہ محدود تکملہ عمل کریں تو ضابطہ (ز) مصرحۂ بالا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح آٹھویں باب کی فصل محولہ بالا کے ضابطہ (ھ) سے ہمارا ضابطہ (ح) مترتب

ہوتا ہے۔

اگر منحنی کی تعریف مبدلی مساواتوں

لا = ف (و) اور ما = فہ (و)

کے ذریعہ کی گئی ہو تو س کی تعیین کا سہل طریقہ یہ ہے کہ

س = ∫ (فرلا$^2$ + فرما$^2$)$^{\frac{1}{2}}$ = ∫ [فَ$^2$ (و) + فہَ$^2$ (و)]$^{\frac{1}{2}}$ فرو . (۳)

اس لیے کہ (۲) سے فرلا = فَ (و) فرو اور فرما = فہَ (و) فرو

## توضیحی مثالیں۔

(۱) درتدویر (hypocycloid) { لا = ا جم$^3$ طہ ، ما = ا جب$^3$ طہ } کا طول دریافت کرو۔

حل۔ عمل تفرق سے فرلا = -۳ ا جم$^2$ طہ جب طہ فرطہ،

فرما = ۳ ا جب$^2$ طہ جم طہ فرطہ

جبکہ لا = ۰، طہ = $\frac{\pi}{2}$ اور جبکہ لا = ا، طہ = ۰

ضابطہ میں یہ قیمتیں تعویض کرنے سے، منحنی کا طول

س = ۴ ∫ √(۱ + (فرما/فرلا)$^2$) فرلا = ۴ ∫ قط طہ (-۳ ا جم$^2$ طہ جب طہ فرطہ)

= ۴ ∫ (-۳ ا جم طہ جب طہ) فرطہ = ۴ [۳ ا جم$^2$ طہ / ۲] = ۶ ا

(۲) خطِ مکافی لا$^2$ = ۴ ا ما کی قوس کا طول راس سے لے کر وترِ خاص کے ایک سرے تک دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ ما = لا$^2$/۴ ا، مَا = لا/۲ ا اور تکمل کے حدود ہیں لا = ۰ اور لا = ۲ ا

پس س = ∫ √(۱ + لا$^2$/۴ ا$^2$) فرلا = $\frac{1}{2ا}$ [ لا √(لا$^2$ + ۴ ا$^2$)/۲ + ۴ ا$^2$/۲ لوک (لا + √(لا$^2$ + ۴ ا$^2$)) ]

= $\frac{1}{4ا}$ [ ۲ ا √۸ ا$^2$ + ۴ ا$^2$ لوک (۱ + √۲) ]

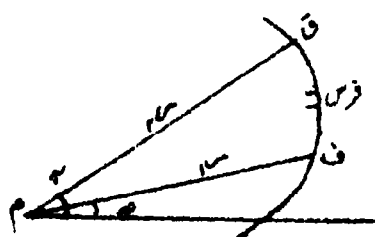
$= ا \left[ \sqrt{2} + \text{لوک} \left( 1 + \sqrt{2} \right) \right]$

## ٨ - مستوی منحنیوں کے طول کی پیمایش، قطبی محددوں کے ذریعے

آٹھویں باب کی فصل (٨) کے ضابطہ (ط) پر محدود تکمل کا عمل کرنے سے قوس کے طول کے لیے ضابطہ

$$س = \int_{ط_1}^{ط_2} \left[ ر^2 + \left( \frac{فر}{فرطہ} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} فرطہ \quad \cdots\cdots\cdots \quad (ط)$$

حاصل ہوتا ہے۔ جس میں ر اور $\frac{فر}{فرطہ}$ کو طہ کی رقموں میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے اخذ کرکے تعویض کرنا چاہیے۔

جن صورتوں میں بجائے طہ کے ر کو بطور متبوع متغیر استعمال کرنا زیادہ آسان معلوم ہوتا ہے اور مساوات بشکل

طہ = فہ (ر) ہے تو

$$فرطہ = فہَ(ر)\, فرر = \frac{فرطہ}{فرر}\, فرر$$

شکل ۷۶

اس کو $\left[ ر^2 فرطہ^2 + فرر^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ میں تعویض کرنے سے

$$\left[ ر^2 \left( \frac{فرطہ}{فرر} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} فرر$$ حاصل ہوتا ہے

پس اگر $ر_1$ اور $ر_2$ متبوع متغیر ر کے متناظر حدود تکمل ہیں تو قوس کے طول کے لیے

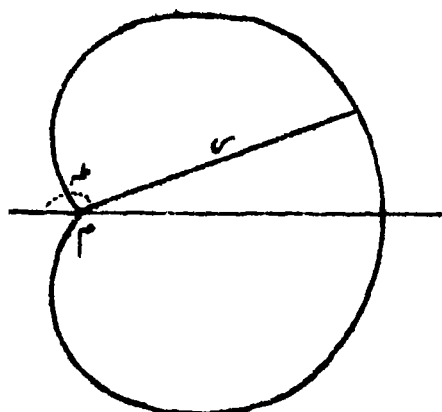
ضابطہ $$س = \int_{ر_1}^{ر_2} \left[ ر^2 \left( \frac{فرطہ}{فرر} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} فرر \quad \cdots\cdots \quad (ی)$$ برآمد ہوتا ہے۔

جس میں $\frac{فرطہ}{فرر}$ کو دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے ر کی رقموں میں

نعوبض کرنا چاہیے۔

**توضیحی مثال**۔ خطِ صنوبری ر = ا (۱ – جم طہ) کا محیط دریافت کرو۔

حل۔ منحنی کی ترسیم شکل ۷۷ میں بتائی گئی ہے وہ ابتدائی خط کے تشاکل ہے

شکل ۷۷

اور طہ کی قیمت اوپر والی نصف ترسیم کے لیے صفر سے لے کر π تک بدلتی ہے۔

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} = \text{ا جب طہ}$$

$$\text{پس قوس س} = 2\int_{0}^{\pi}\sqrt{\text{ا}^2(\text{۱ – جم طہ})^2 + \text{ا}^2\text{جب}^2\text{ طہ}}\ \text{فر طہ}$$

$$= 2\text{ا}\int_{0}^{\pi} 2\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{فر طہ} = \left[-8\,\text{ا جم}\,\frac{\text{طہ}}{2}\right]_{0}^{\pi} = 8\,\text{ا}$$

# مثالیں

بتاؤ کہ :—

(۱) نیم کعبی مکافی $\text{ر}\,\text{ا}^2 = \text{لا}^3$ کا طول مبدا سے لے کر معین لا = ۵ ا تک $\frac{۱۳۳۵}{۲۷}$ ہے۔

(۲) درتدویر (hypocycloid) $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ کا مکمل طول ۶ ا ہے۔

(۳) زنجیرہ ما = $\frac{\text{ل}}{۲}$ (و$^{\text{لا}/\text{ل}}$ + و$^{-\text{لا}/\text{ل}}$) کا طول لا = ۰ سے نقطہ (لا، ما) تک $\frac{\text{ل}}{۲}$ (و$^{\text{لا}/\text{ل}}$ - و$^{-\text{لا}/\text{ل}}$) ہے

(۴) خط تدویر (cycloid) لا = جم$^{-۱}$ $\left(\frac{\text{ل} - \text{ما}}{\text{ل}}\right)$ - $\sqrt{۲ \text{ ل ما} - \text{ما}^۲}$ کی ایک مکمل کمان کا طول = ۸ ل

(۵) منحنی ما = لوک $\frac{\text{و}^{\text{لا}} + ۱}{\text{و}^{\text{لا}} - ۱}$ کا مکمل طول مابین لا = ل اور لا = ب دریافت کرو۔

[جواب = لوک $\frac{\text{و}^{۲\text{ب}} - ۱}{\text{و}^{۲\text{ل}} - ۱}$ + ل - ب]

(۶) دائرہ کے درپیچہ کی مساواتیں
لا = ل (جم طہ + طہ جب طہ)
ما = ل (جب طہ - طہ جم طہ)
ہیں۔ اس کی قوس کا طول طہ = ۰ سے طہ = طہ۱ تک معلوم کرو۔
[جواب = $\frac{۱}{۲}$ ل طہ$_۱^۲$]

ثابت کرو کہ :-

(۷) ارشمیدس کی لولبی سر = ل طہ کا طول مبداء سے لے کر پہلی گردش کے ختم تک
ل ط $\sqrt{۱ + ۴ \text{ط}^۲}$ + $\frac{\text{ل}}{۲}$ لوک (۲ط + $\sqrt{۱ + ۴\text{ط}^۲}$) ہے

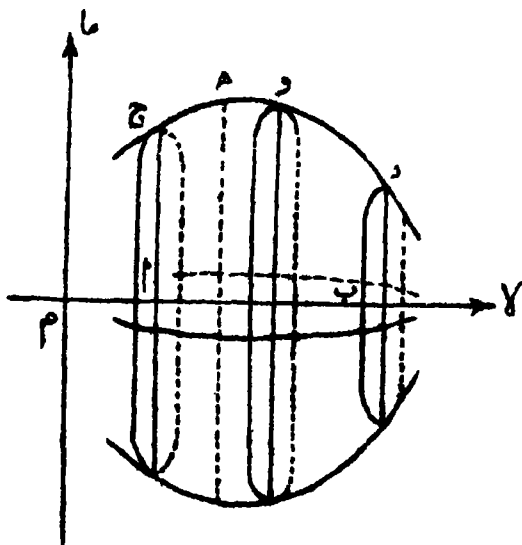
(۸) لولبی سر = و$^{\text{ل طہ}}$ کا طول مبداء سے نقطہ (سر، طہ) تک $\frac{\text{سر}}{\text{ل}}$ $\sqrt{\text{ل}^۲ + ۱}$ ہے۔
[اشارہ - ضابطہ (ی) استعمال کیا جائے۔]

(۹) خط مکافی سر = $\frac{۲}{۱ + \text{جم طہ}}$ کی قوس کا طول طہ = ۰ سے طہ = $\frac{\text{ط}}{۲}$ تک
$\sqrt{۲}$ + لوک ($\sqrt{۲}$ + ۱) ہے۔

(۱۰) لبلابی خط (cissoid) سر = ۲ ل مس طہ جب طہ کا طول طہ = طہ۱ سے طہ = طہ۲ تک
۲ ل $\left[\frac{\sqrt{۱ + ۳ \text{ جم}^۲ \text{طہ}}}{\text{جم طہ}} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ لوک } \frac{\text{جم طہ} \sqrt{۳} + \sqrt{۱ + ۳ \text{ جم}^۲ \text{طہ}}}{\text{جم طہ} \sqrt{۳} - \sqrt{۱ + ۳ \text{ جم}^۲ \text{طہ}}}\right]_{\text{طہ}_۱}^{\text{طہ}_۲}$ ہے

## ۹ ۔ گردشی سطحوں کے رقبے ۔ گردشی سطح محور لا کے

گرد کسی منحنی ما = ف(لا) کی قوس ج د کے گھومنے سے پیدا ہوتی ہے ۔ اب ہم اساسی مسئلہ کی مدد سے ایسی سطح کے رقبہ کی پیمائش کا طریقہ بیان کرنا چاہتے ہیں ۔

اولاً ۔ شکل سابق وقفہ یا فاصلہ ا ب کو کو چکتر حصوں مف لا، مف لا وغیرہ میں تقسیم کرو اور نقاطِ تقسیم پر معین کھڑا کرو ۔ منحنی کے وتر ج ھ، ھ و، وغیرہ کھینچو ۔

شکل ۹ ۔

جب منحنی ج ھ و د کو گھمایا جاتا ہے تو ہر ایک وتر ایک ناقصی یا ناکمل (مقطوع) گردشی مخروط کی جانبی سطح پیدا کرتا ہے ۔ منحنی کی گردشی سطح کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ ان ناقصی گردشی مخروطوں کے جانبی رقبوں کی انتہا ہے ۔

ثانیاً ۔ وضاحت کی خاطر ہم نے شکل ۹ میں پہلے ناقص گردشی مخروط کو زیادہ بڑے پیمانہ پر بنایا ہے ۔ اس شکل میں وتر ج ھ کا وسطی نقطہ م ہے ۔

تب چونکہ ناقص گردشی مخروط کا جانبی رقبہ = وسطی تراش × ترچھی بلندی

جانبی رقبہ = ۲ ۲ (ن م) (ج ھ) ........ (۱)

شکل ۹ ے

اساسی مسئلہ کے اطلاق کے لیے اس حاصل ضرب کو وقفہ معٓ لا میں کسی نقطہ کے مقطوعہ یا فصلہ کا تفاعل ظاہر کرنا چاہیے۔ ۔ کی طرح اوسط قیمت کا مسئلہ استعمال کرنے سے

وتر ج ھ کا طول = $\{$ ۱ + فٓ (لا۱)۲ $\}^{\frac{1}{2}}$ معٓ لا ...... (۲)

جس میں لا قوس ج ھ پر کے نقطہ ف۱ (لا۱، ما۱) کا مقطوعہ ہے، جہاں خطِ مماس وتر ج ھ کا متوازی ہے۔ ھ میں سے جو افقی خط کھینچا گیا ہے

اس کو ف پر کے معین ق ف کو نقطہ ر پر متقاطع ہونے دو۔ اور ر ف کو صم سے تعبیر کرو۔

[ طالب علم کو معلوم ہوگا کہ جیسے جیسے مف لا صفر کو بطور انتہا پہنچتا ہے صم بھی بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے ]

تب ن م = ما − صم . . . . . . . . . (۳)

(۲) اور (۳) کو (۱) میں تعویض کرنے سے

۲ π (ما − صم) {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا = پہلے ناقص مخروط کا جانبی رقبہ ہے۔

اسی طرح ۲ π (ما − صم) {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا = دوسرے ناقص مخروط کا جانبی رقبہ ہے۔

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

اور ۲ π (ما − صم) {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا = آخری ناقص مخروط کا جانبی رقبہ ہے۔

پس مجموعہ (و = ۱ سے ن) ۲ π (ما − صم) {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا = ناقص مخروطوں کے جانبی رقبوں کا حاصل جمع ہے

اس کو ہم لکھ سکتے ہیں مجموعہ (و = ۱ سے ن) ۲π ما {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا − ۲π مجموعہ (و = ۱ سے ن) صم {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا . (۴)

ثالثاً۔ پہلے مجموعہ پر اساسی مسئلہ کے اطلاق سے (حدود م ا = ا اور م ب = ب) استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

نہا (ن ← ∞) مجموعہ (و = ۱ سے ن) ۲π ما {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا = تکملہ (ا سے ب) ۲π ما {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) فر لا

(۴) کے دوسرے مجموعہ کی انتہا جبکہ ن ← ∞ صفر ہے* پس قوس ج د کو م ٧ کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطح کا رقبہ (س ا) پیدا ہوتا ہے

* اس لیے کہ اگر اس دوسرے مجموعہ کو جن سے تعبیر کیا جائے اور مثبت اعداد صم، صم . . . صم میں صم کو سب سے بڑے عدد کے مساوی فرض کیا جائے تو جن ≥ مجموعہ (و = ۱ سے ن) {۱ + فَ (لا)^۲}^(۱/۲) مف لا بائیں جانب کا حاصل جمع ۵ کی رو سے ج م، م د وغیرہ وتروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ فرض کرو کہ یہ مجموعہ لن ہے

تب جن ≥ صم لن۔ چونکہ نہا (ن ← ∞) صم = ۰ جن ایک متناہی ہے اور اس لیے نہا جن = ۰۔

اس کا ضابطہ حسب ذیل ہے :—

$$س_{لا} = ۲\pi \int_{و}^{ب} ما \left\{۱+\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}} فرلا \quad \ldots\ldots (ک)$$

جس میں ما اور $\frac{فرما}{فرلا}$ گھومے ہوئے منحنی کی مساوات سے لا کی رقموں میں تعویض کیے جانے چاہئیں۔

یا ہم اس ضابطہ کو بصورت $س = ۲\pi \int_{و}^{ب} ما\ فرس \ldots\ldots (ل)$

لکھ سکتے ہیں، جس میں $فرس = (فرلا^{۲} + فرما^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = \left\{۱+\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}} فرلا$

از روئے ضابطہ (د) — باب (۸)۔

اسی طرح اگر گردشی محور م ما ہو تو ضابطۂ ذیل استعمال کرنا ہوگا :

$$س_{ما} = ۲\pi \int_{ج}^{د} لا \left\{۱+\left(\frac{فرلا}{فرما}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}} فرما$$

جس میں منحنی کی مساوات سے لا اور $\frac{فرلا}{فرما}$ کی قیمتیں ما کی رقموں میں درج کرنی ہوں گی۔

توضیحی مثالیں (۱) خطِ ناقص (لا = جم فہ ، ما = جب فہ) کے محور لا کے گرد گھومنے سے جو گردشی ناقص نما مجسم پیدا ہوتا ہے اس کی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔

**حل** — فرلا = –ا جب فہ فرفہ، فرما = ب جم فہ فرفہ

اور $فرس = (فرلا^{۲} + فرما^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = (ا^{۲} جب^{۲} فہ + ب^{۲} جم^{۲} فہ)^{\frac{۱}{۲}} فرفہ$

پس جزو رقبہ $= ۲\pi ما\ فرس = ۲\pi ب (ا^{۲} جب^{۲} فہ + ب^{۲} جم^{۲} فہ)^{\frac{۱}{۲}} جب فہ\ جم فہ\ فرفہ$

$$\frac{۱}{۲} س_{لا} = ۲\pi ب \int^{\frac{\pi}{۲}} (ا^{۲} جب^{۲} فہ + ب^{۲} جم^{۲} فہ)^{\frac{۱}{۲}} جب فہ\ فرفہ$$

اس کو تکمل کرنے کے لیے فرض کرو ی = جم فہ تب فری = – جب فہ فرفہ معہذا

$$\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} = \text{ا}^2(1 - \text{جم}^2\,\text{فہ}) + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} = \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ء}^2$$

پس نئے حدود استعمال کرکے اور ء کے حدود میں باہمی تبادلہ کرنے سے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{س}_{\text{لا}} = 2\pi\,\text{ب}\int_0^1 \left\{\text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ء}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرء} \qquad (\text{ا} > \text{ب})$$

$$= 2\pi\,\text{ب}\int_0^1 \text{ا}\left(1 - \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\text{ء}^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{فرء} = 2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}\int_0^1 (1 - \text{خہ}^2\,\text{ء}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرء}$$

جس میں $\text{خہ} =$ خروج المرکز $= \dfrac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}{\text{ا}}$

اس تکمل کو معیاری صورت (۱۹) باب (۱۱) کے طریقہ پر حل کرنے سے

$$\text{س}_{\text{لا}}\ \text{کی قیمت}\ 2\pi\,\text{ب}^2 + \frac{2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}}{\text{خہ}}\,\text{جب}^{-1}\,\text{خہ}$$

**مثال** (۲) منحنی $\text{ر} = \text{ا}(1 + \text{جم}\,\text{طہ})$ ابتدائی خط کے گرد گھومنے سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔

حل۔ $\text{س} = 2\pi\int \text{ما}\,\text{فرس} = 2\pi\int_0^{\pi} \text{ر}\,\text{جب}\,\text{طہ}\,\dfrac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}\,\text{فرطہ}$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \text{ا}(1 + \text{جم}\,\text{طہ})\,\text{جب}\,\text{طہ}\sqrt{\text{ا}^2(1 + \text{جم}\,\text{طہ})^2 + \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ}}\ \text{فرطہ}$$

$$= 2\pi\,\text{ا}^2\int_0^{\pi}(1 + \text{جم}\,\text{طہ})\,\text{جب}\,\text{طہ}\left(2\,\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{2}\right)\text{فرطہ} = 16\pi\,\text{ا}^2\int_0^{\pi}\text{جم}^4\,\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{فرطہ}$$

$$= 32\pi\,\text{ا}^2\left[-\frac{\text{جم}^5\,\frac{\text{طہ}}{2}}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi\,\text{ا}^2$$

# مثالیں

(۱) درتدویر (hypocycloid) $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ محور لا کے گرد گھومنے سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔ [جواب $= \dfrac{12\pi\,\text{ا}^2}{5}$]

(۲) کبھی مکافی $\text{ا}^2\,\text{ما} = \text{لا}^3$ کی قوس محور م لا کے گرد ابین لا = ۰ اور لا = ا

گھمائی جاتی ہے۔ اس سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے بتاؤ کہ اس کا رقبہ

$$\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) و^2 \text{ ہے۔}$$

(۳) مکافی $ما^2 = ۲ ف لا$ کی قوس کے محور م لا کے گرد گھومنے سے جو سطح بنتی ہے اس کا رقبہ بین حدود لا = ۰ اور لا = ۴ ف دریافت کرو۔

[جواب = $\frac{۵۲ \pi ف^2}{۳}$ ]

(۴) خطِ ناقص $\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے محور م ما کے گرد گھومنے سے جو گردشی سطح بنتی ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔ خروج المرکز $= خ = \frac{\sqrt{و^2 - ب^2}}{و}$

[جواب $= ۲\pi و^2 + \frac{\pi ب^2}{خ} لوک \frac{۱+خ}{۱-خ}$ ]

(۵) ثابت کرو کہ زنجیرہ $ما = \frac{و}{۲}\left(قو^{\frac{لا}{و}} + قو^{-\frac{لا}{و}}\right)$ محور م لا کے گرد گھومنے سے پیدا ہونے والی سطح کا رقبہ لا = ۰ سے لا = و تک $\frac{\pi و^2}{۲}\left(قو^2 + ۴ - قو^{-2}\right)$ ہے اور اگر یہ منحنی محور م ما کے گرد گھومے تو انہی حدود کے اندر رقبہ $۲\pi و^2 (۱ - قو^{-1})$ ہے۔

## ۱۰ - معلوم متوازی عمودی تراشوں والے اجسام کے حجم

قبل ازیں ۸ میں ہم نے گردشی مجسم کے حجم کی تعیین سے متعلق بحث کی ہے۔ اور بتایا ہے کہ محور لا کے گرد دیے ہوئے منحنی سے محدود رقبہ، محور لا، محدد لا = و اور لا = ب کی گردش سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اس کا ضابطہ

$$ح_{لا} = \pi \int_{و}^{ب} ما^2 \, فرلا$$

ہے جس میں ما کی قیمت لا کی رقموں میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے درج کی جانی چاہیے۔

اب ہم ایسے مجسمات کے حجموں کی تعیین سے بحث کرنا چاہتے ہیں جو گردشی نہیں ہیں لیکن جن کی مستوی تراش کسی ثابت خط مثلاً محور لا سے علی القوائم کسی ثابت نقطہ مثلاً م سے اس کے فاصلہ لا کا تفاعل

لکھی جاسکتی ہے۔

ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ یہ حجم

ح = ∫ ف (لا) فرلا ہے ........ (ن)

ذیل کی توضیحی مثالوں سے یہ بات بآسانی ذہن نشین ہوجائیگی۔

**توضیحی مثال (۱)** ر محور والے ایک دائرہ کے قطر پر سے ایک مربع کا مرکز حرکت کرتا ہے۔ مربع کا مستوی اس قطر کے علی القوائم رہتا ہے اور اس کی مقدار اس طرح بدلتی ہے کہ اس کے یعنے مربع کے متقابل کے راس دیے ہوئے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتے ہیں تو بتاؤ کہ اس حرکت سے پیدا ہونے والے مجسم کا حجم = $\frac{8}{3}$ ر$^3$

حل۔ شکل ۸۰ کی ترسیم ملاحظہ ہو۔ ف ک ق ل مربع کی ایک وضع ہے۔ سرے ک ل دائرہ کے محیط پر حرکت کرتے ہیں۔ مربع کا مرکز قطر ا م پر جہاں کہیں ہوگا مربع کے ہندسی خواص سے ظاہر ہے کہ ن ک = ن ل = ن ف = ن ق سب ما کے مساوی ہونگے۔ اس لیے کہ اس کے متقاطع قطر مساوی ہوتے ہیں۔

دائرہ کی مساوات چونکہ لا$^2$ + ما$^2$ = ر$^2$ ہے جبکہ مبدا، مرکز سے منطبق ہوتا ہے، شکل ۸۰ میں م کو مبدا قرار دینے پر مساوات

ما$^2$ = ۲ لا ر - لا$^2$ ہوگی۔

مربع کا رقبہ = ۲ ما$^2$

یعنے = ۲ (۲ لا ر - لا$^2$)

اور فرلا موٹائی کے ایک مجسم جزو کا

شکل ۸۰

حجم = ۲ ( ۲ لا ر ـ لا$^{۲}$ ) فرلا

∴ مکمل جسم کا حجم = ۲ $\int_{۰}^{۲ر}$ (۲ لا ر ـ لا$^{۲}$) فرلا

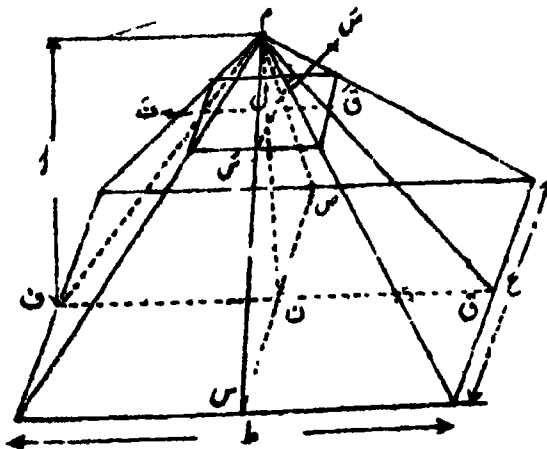
۲ $\left[ ۲ر \frac{لا^{۲}}{۲} \right]_{۰}^{۲ر}$ ـ ۲ $\left[ \frac{لا^{۳}}{۳} \right]_{۰}^{۲ر}$ = $\frac{۸ ر^{۳}}{۳}$

**توضیحی مثال (۲)** ایک قائم ہرم جس کا قاعدہ مستطیل ہے حسب ذیل ابعاد رکھتا ہے۔ طول = ط عرض = ع اور ارتفاع = ا اس کا حجم دریافت کیا جائے۔

حل ـ ارتفاع م ن کے علی القوائم اور اس لیے قاعدہ ف س ق ص کے متوازی ایک تراش فَ سَ قَ صَ کھینچو۔

اگر فَ قَ = لا اور سَ صَ = ما تو تراش کا رقبہ = لا ما اور اگر تراش کا عمودی فاصلہ م سے ی مانا جائے تو ہرم کا حجم

ح = $\int_{۰}^{ا}$ لا ما فری [دیکھو شکل ۱۰۸]

شکل ۱۰۸

ہرم کے ہندسہ سے واضح ہے کہ مثلث م ف ق اور مثلث م فَ قَ

متشابہ ہیں، پس $\frac{لا}{ی} = \frac{ط}{ع}$، اسی طرح مثلث م س ص اور مثلث م سَ صَ
متشابہ ہیں اس لیے $\frac{ما}{ی} = \frac{ع}{ع}$

$$\therefore \text{لا ما} = \frac{ط ع}{ع^2} ی^2 \quad \text{اور}\quad ح = \int_{0}^{ع} \text{لا ما فری} = \int_{0}^{ع} \frac{ط ع}{ع^2} ی^2 \text{ فری}$$

$$\text{پس } ح = \frac{ط ع}{ع^2}\left[\frac{ی^3}{3}\right]_{0}^{ع} = \frac{ط ع ع^3}{3 ع^2} = \frac{ط ع ع}{3}$$

# مثالیں

(۱) نصف قطر والے کرہ کا حجم دریافت کرو۔

(۲) ایک ہی تکمل کے ذریعہ گردشی ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$
کا حجم دریافت کرو۔ [جواب = $\frac{۴\pi}{۳}$ ا ب ج]

(۳) دو استوانوں کے نصف قطر مساوی ہیں اور ان کے محور باہم دیگر علی القوائم واقع ہیں اگر نصف قطر ر ہے تو بتاؤ کہ مشترک جسم کا حجم $\frac{۱۶}{۳}$ ر$^3$ ہے۔

(۴) خط زائد ۴ لا$^2$ - ۹ ما$^2$ = ۱، محور ما اور خطوط ما = $\pm \frac{۱}{۲}$ سے پہلے اور چوتھے ربعوں (quadrants) میں محصور رقبہ کو محور ما کے گرد گھما کر ایک مجسم تیار کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا حجم = $\frac{\pi}{۹۸}$

(۵) خط ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے دُہرے معینوں پر ۹۰° راسی زاویوں کے متساوی الساقین مثلث، ناقص کے مستوی کے علی القوائم مستویوں میں کھینچے جاتے ہیں۔ اس طرح جو مجسم تیار ہوتا ہے اس کا حجم دریافت کرو یہ فرض کرکے کہ اس مجسم کا تغیر پذیر مثلث ناقص کے محورِ اعظم کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا چلا جاتا ہے۔ [جواب = $\frac{۴ ا ب^2}{۳}$]

# چودھواں باب

## مختلف طریقوں سے باضابطہ تکمیل

**۱** ۔ باضابطہ تکمل ہر صورت میں بالآخر تکملوں کی جدول کے استعمال ہی پر منحصر ہے۔ اگر کبھی ایسے تکملہ سے سابقہ پڑتا ہے جو جدول کے کسی ضابطہ کے مشابہ نہیں نظر آتا تو اکثر اوقات یہ ہوسکتا ہے کہ اس تکملہ کو ایسی شکل میں تبدیل کیا جائے کہ وہ جدول کے کسی ضابطہ کے اطلاق کے قابل ہوجائے۔ اس عمل کے حسب ذیل طریقے ہیں :۔

(ا) تکمل بالحصص جس کا گذشتہ باب میں ذکر آچکا ہے۔

(ب) منطق کسروں کے نظریہ کا اطلاق۔

(ج) مناسب ابدالوں کا استعمال۔

پہلے ہم منطق کسروں کے طریقہ پر بحث کرینگے۔

**۲** ۔ منطق کسر سے مراد ایسی کسر ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح منطق تفاعل ہیں۔ یعنے متغیر کے قوت نما منفی یا کسری نہیں ہیں۔ اگر کسر کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کر کے کسر کو ایک مخلوط ( mixed ) مقدار میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً

$$\frac{۴ل^{۴} - ل^{۳} + ۱}{ل^{۲} - ۲ل + ۳} = ۴ل^{۲} + ۷ل + ۲ - \frac{۱۷ل + ۵}{ل^{۲} - ۲ل + ۳}$$

آخری رقم ایک خالص کسر ہے جس کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے کمتر ہے۔ اس کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے اس کو اس کے جزوی کسور میں تحویل کرنا پڑتا ہے جن کے متعلق اس کتاب کے حصہ اول باب دوم میں لکھا جا چکا ہے۔ یہاں ہم جزوی کسور کی مدد سے چند معمولی کسروں کے تکمل کے طریقے بیان کرینگے۔

## صورت اول۔ جبکہ نسب نما کے تمام اجزاء ضربی پہلے درجہ کے ہوں اور ان میں سے کوئی دُہرایا نہیں گیا ہے۔

ہر خطی جزو ضربی کے لیے جو دُہرایا نہیں جاتا ہے (مثلاً و لا + ب) ایک جزوی کسر ہوتی ہے جس کی عام صورت ا / (و لا + ب) ہے۔ اس میں ا، و اور ب مستقل ہیں۔

**توضیحی مثال۔** ∫ (لا۲ + ۳ لا + ۱) / (۳ لا۳ − ۵ لا۲ − ۴ لا + ۴) ڈلا کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ نسب نما کے اجزاءِ ضربی (لا − ۱)، (لا + ۲) اور (۳ لا − ۲) ہیں۔

فرض کرو کہ (لا۲ + ۳ لا + ۱) / ((لا − ۱)(لا + ۲)(۳ لا − ۲)) = ا / (لا − ۱) + ب / (لا + ۲) + ج / (۳ لا − ۲)

ہمیں مستقل مقادیر ا ب اور ج کی دریافت مقصود ہے۔

مساوات کو کسروں سے پاک کرنے سے

لا۲ + ۳ لا + ۱ = ا (لا + ۲)(۳ لا − ۲) + ب (لا − ۱)(۳ لا − ۲) + ج (لا − ۱)(لا + ۲)

= (۲ ا + ۳ ب + ج) لا۲ + ۴ ا − ۵ ب + ج) + (−۴ ا + ۲ ب − ۲ ج) ..... (۱)

غیر معین سروں کے طریقہ پر مساوات کی دونوں جانبوں کے لا کی مماثل قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

۱ = ۲ ا + ۳ ب + ج، ۳ = ۴ ا − ۵ ب + ج اور ۱ = −۴ ا + ۲ ب − ۲ ج

ان ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے $\text{ا} = \frac{۵}{۳}$، $\text{ب} = -\frac{۱}{۲۴}$ اور $\text{ج} = -\frac{۳۱}{۸}$ حاصل ہوتے ہیں۔

[**نوٹ** : بجائے ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے کے اس صورت میں ہم ایک آسان طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ چونکہ مساوات (۱) لا کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے، لا = ۱ لکھو تب ب اور ج کٹ کر ا کی قیمت $\frac{۳}{۵}$ برآمد ہوگی۔ اس کے بعد لا = ۲ لکھو تو ب کی قیمت $-\frac{۱}{۲۴}$ برآمد ہوگی اور پھر لا = $\frac{۲}{۳}$ لکھو تو ج کی قیمت $-\frac{۳۱}{۸}$ حاصل ہوگی ]

$$\text{پس} \int \frac{(\text{لا}^۲ + ۳\,\text{لا} + ۱)\,\text{فرلا}}{(\text{لا}-۱)(\text{لا}+۲)(۳\,\text{لا}-۲)} = \int \frac{\frac{۵}{۳}}{\text{لا}-۱}\,\text{فرلا} + \int \frac{-\frac{۱}{۲۴}}{\text{لا}+۲}\,\text{فرلا} + \int \frac{-\frac{۳۱}{۸}}{۳\,\text{لا}-۲}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۵}{۳}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۱) - \frac{۱}{۲۴}\,\text{لوک}\,(\text{لا}+۲) - \frac{۳۱}{۲۴}\,\text{لوک}\,(۳\,\text{لا}-۲) + \text{ج}$$

صورت دوم - جبکہ نسب نما کے تمام اجزاءِ ضربی پہلے درجہ کے ہیں اور بعض ان میں سے دہرائے گئے ہیں۔ ہر ن گنے خطی جزوِ ضربی مثلاً $(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})^{\text{ن}}$ کے لیے ن جزوی کسور کا مجموعہ لینا ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{ا}}{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})^{\text{ن}}} + \frac{\text{ب}}{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})^{\text{ن}-۱}} + \cdots + \frac{\text{ل}}{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})}$$

$$\text{مثلاً} \int \frac{\text{ا}\,\text{فرلا}}{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})^{\text{ن}}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}\,(۱-\text{ن})\,(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})^{\text{ن}-۱}} + \text{ج}$$

**توضیحی مثال** - $\int \frac{\text{لا}^۳ + ۱}{\text{لا}\,(\text{لا}-۱)^۳}\,\text{فرلا}$ کی قیمت دریافت کرو۔

**حل** - چونکہ نسب نما میں جزوِ ضربی (لا-۱) تین مرتبہ آیا ہے اس لیے ہم

$$\frac{\text{لا}^۳ + ۱}{\text{لا}\,(\text{لا}-۱)^۳} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{(\text{لا}-۱)^۳} + \frac{\text{ج}}{(\text{لا}-۱)^۲} + \frac{\text{د}}{(\text{لا}-۱)}$$

فرض کرتے ہیں۔

مساوات کو کسروں سے پاک کرنے پر

$$\text{لا}^۳ + ۱ = \text{ا}\,(\text{لا}-۱)^۳ + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}\,(\text{لا}-۱) + \text{د}\,\text{لا}\,(\text{لا}-۱)^۲$$

$$= (\text{ا} + \text{د})\,\text{لا}^{3} + (-3\text{ا} + \text{ج} - 2\text{د})\,\text{لا}^{2} + (3\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} + \text{د})\,\text{لا} - \text{ا}$$

جن میں لا کی مماثل قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

$$\text{ا} + \text{د} = 1،\quad -3\text{ا} + \text{ج} - 2\text{د} = 0،\quad 3\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} + \text{د} = 0 \quad \text{اور} \quad -\text{ا} = 1$$

ان کو حل کرنے سے $\text{ا} = -1$، $\text{ب} = 2$، $\text{ج} = 1$، $\text{د} = 2$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{لا}^{3}+1}{\text{لا}(\text{لا}-1)^{3}} = -\frac{1}{\text{لا}} + \frac{2}{(\text{لا}-1)^{3}} + \frac{1}{(\text{لا}-1)^{2}} + \frac{2}{\text{لا}-1}$$

$$\therefore \int \frac{\text{لا}^{3}+1}{\text{لا}(\text{لا}-1)^{3}}\,\text{فرلا} = -\text{لوگ لا} - \frac{1}{(\text{لا}-1)^{2}} - \frac{1}{\text{لا}-1} + 2\,\text{لوگ}(\text{لا}-1) + \text{ج}$$

$$= -\frac{\text{لا}}{(\text{لا}-1)^{2}} + \text{لوگ}\,\frac{(\text{لا}-1)^{2}}{\text{لا}} + \text{ج}$$

**صورتِ سوم۔** جبکہ نسب نما میں دوسرے درجہ کے اجزاءِ ضربی شامل ہیں لیکن ان میں سے کوئی دُہرائے نہیں گئے ہیں۔ ہر دوم درجہ کے جزوِ ضربی کے لیے جو دُہرایا نہ گیا ہو، مثلاً $\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}$ ایک جزوی کسر بصورت $\frac{\text{م}\,\text{لا} + \text{ن}}{\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}}$ لاحق ہوتی ہے، جس میں م اور ن مستقل مقادیر ہیں۔

ایسی رقم کو تکمل کرنے کے لیے، اگر ب صفر نہ ہو تو ہم نسب نما میں مربع کی تکمیل کرتے ہیں

$$\text{چنانچہ}\quad \text{ا}\left\{\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\text{ا}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ج}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}^{2}}{4\text{ا}^{2}}\right)\right\} = \text{ا}\left\{\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\text{ا}}\right)^{2} + \frac{1}{4\text{ا}^{2}}(4\text{اج} - \text{ب}^{2})\right\}$$

$$[4\text{اج} > \text{ب}^{2}]$$

اب فرض کرو کہ $\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\text{ا}} = \text{ی}$ تب $\text{لا} = \text{ی} - \frac{\text{ب}}{2\text{ا}}$ اور $\text{فرلا} = \text{فری}$
ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے نیا تکملہ متغیر ی کی رقموں میں فوراً تکمیل پا سکتا ہے

**توضیحی مثال۔** $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}+2)(\text{لا}^{2} - 2\text{لا} + 4)}$ کی تعیین کرو۔

حل۔

$$\frac{\text{۱}}{(\text{لا}+\text{۲})(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴})}=\frac{\text{ا}}{\text{لا}+\text{۲}}+\frac{\text{ب لا}+\text{ج}}{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴}}$$

$$\therefore\ \text{۱}=\text{ا}(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴})+(\text{ب لا}+\text{ج})(\text{لا}+\text{۲})$$

$$=\text{ا لا}^{\text{۲}}-\text{۲ا لا}+\text{۴ا}+\text{ب لا}^{\text{۲}}+\text{۲ب لا}+\text{ج لا}+\text{۲ج}$$

$$\text{۱}=\text{لا}^{\text{۲}}(\text{ا}+\text{ب})+\text{لا}(-\text{۲ا}+\text{۲ب}+\text{ج})+(\text{۴ا}+\text{۲ج})$$

پس $\text{ا}=\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}$ ، $\text{ب}=-\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}$ اور $\text{ج}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$

$$\therefore\ \text{تکملہ}=\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\text{۲}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\int\frac{\text{۴}-\text{لا}}{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴}}\,\text{فرلا}$$

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\,\text{لوک}\,(\text{لا}+\text{۲})+\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\int\frac{(\text{۴}-\text{لا})\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴}}$$

چونکہ $\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴}=(\text{لا}-\text{۱})^{\text{۲}}+\text{۳}=\text{د}^{\text{۲}}+\text{۳}$ اگر $\text{د}=(\text{لا}-\text{۱})$

$\therefore\ \text{لا}=\text{د}+\text{۱}$ اور $\text{فرلا}=\text{فرد}$ اور $\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\int\frac{\text{۴}-\text{لا}}{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴}}\,\text{فرلا}=\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\int\frac{\text{۳}-\text{د}}{\text{د}^{\text{۲}}+\text{۳}}\,\text{فرد}$

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\left[\sqrt{\text{۳}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{د}}{\sqrt{\text{۳}}}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک}\,(\text{د}^{\text{۲}}+\text{۳})\right]$$

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\left[\sqrt{\text{۳}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{لا}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴})\right]$$

اور پورا تکملہ $=\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\left\{\text{لوک}\,(\text{لا}+\text{۲})-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴})+\sqrt{\text{۳}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{لا}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}\right\}+\text{ج}$

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۲۴}}\,\text{لوک}\,\frac{(\text{لا}+\text{۲})^{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲لا}+\text{۴}}+\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۱۲}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{لا}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}+\text{ج}$$

**صورت چہارم - جبکہ نسب نما میں دوسرے درجہ کے اجزاءِ ضربی شامل ہیں اور ان میں سے چند دُھرائے گئے ہیں۔**

ہر ن گنے دوسرے درجہ کے جزوِ ضربی مثلاً $(\text{ا لا}^{\text{۲}}+\text{ب لا}+\text{ج})^{\text{ن}}$ کے لیے مندرجۂ ذیل ن جزوی کسور کا مجموعہ لینا ہوگا۔

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{(\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج})^{\text{ن}}} + \frac{\text{ج لا} + \text{د}}{(\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج})^{\text{ن}-1}} + \cdots\cdots + \frac{\text{م لا} + \text{ن}}{\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج}}$$

اس تکمل کے لیے ذیل کے تحویلی ضابطہ (Reduction formula) کی ضرورت داعی ہوتی ہے جو باب (۱۵) میں ثابت کیا گیا ہے،

$$\int \frac{\text{فری}}{(\text{ی}^2 + \text{ا}^2)^{\text{ن}}} = \frac{1}{2(\text{ن}-1)\text{ا}^2}\left[\frac{\text{ی}}{(\text{ی}^2 + \text{ا}^2)^{\text{ن}-1}} + (2\text{ن}-3)\int \frac{\text{فری}}{(\text{ی}^2 + \text{ا}^2)^{\text{ن}-1}}\right]$$

اگر $\text{ن} > 2$ مندرجہ بالا ضابطہ کو بار بار دُہرانا پڑتا ہے اور اگر ب صفر نہ ہو تو جیسا کہ صورت سوم میں بتایا گیا ہے مربع کو مکمل کرکے $(\text{ی}^2 + \text{ا}^2)$ کی شکل میں لانا پڑتا ہے۔

[نوٹ: سہولت کی خاطر ہم یہاں تحویلی ضابطہ کو اس کی عام صورت میں ظاہر کیے دیتے ہیں جبکہ $\text{لا}^2$ کا سر ا ہے اور ب صفر نہیں ہے - وہ یہ ہے:

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج})^{\text{ن}}} = \frac{1}{(\text{ن}-1)(4\text{اج} - \text{ب}^2)}$$

$$\left[\frac{2\text{ا لا} + \text{ب}}{(\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج})^{\text{ن}-1}} + 2(2\text{ن}-3)\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج})^{\text{ن}-1}}\right]$$

**توضیحی مثال-** $\int \frac{\text{لا}^2 + 4\text{لا} + 1}{(\text{لا}^2 + \text{لا} + 2)^2}$ فرلا کی قیمت دریافت کی جائے۔

حل - فرض کرو $\frac{\text{لا}^2 + 4\text{لا} + 1}{(\text{لا}^2 + \text{لا} + 2)^2} = \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{(\text{لا}^2 + \text{لا} + 2)^2} + \frac{\text{ج لا} + \text{د}}{\text{لا}^2 + \text{لا} + 2}$

مساوات کو کسور سے پاک کرکے لا اور اس کی قوتوں کے متناظر سروں کو بالترتیب مساوی لکھنے سے

ا = ۳، ب = -۱، ج = ۰ اور د = ۱ حاصل ہوتے ہیں۔

پس دیا ہوا تکملہ $= \int \frac{(3\text{لا} - 1)\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{لا} + 2)^2} + \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{لا} + 2}$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\text{فر}(\text{لا}^2 + \text{لا} + 2)}{(\text{لا}^2 + \text{لا} + 2)^2} - \frac{5}{2}\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{لا} + 2)^2} + \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{لا} + 2} \quad \ldots\ldots (1)$$

دوسری رقم کی تعیین کے لیے مصرحۂ بالا تحویلی ضابطہ راست استعمال کیا جا سکتا ہے۔ لیکن التکمل بالحصص کے طریقہ سے اس کی تعیین نہ صرف آسان ہے بلکہ سودمند بھی، اس لیے ہم

فرض کرتے ہیں کہ $ی = \frac{۱}{لا^۲ + لا + ۲}$ اور $فرو = فرلا \therefore فری = \frac{-(۲لا+۱)\, فرلا}{(لا^۲+لا+۲)^۲}$

اور $و = لا + ج$

پس چونکہ $\int ی\, فرو = ی و - \int و\, فری$

$$\therefore \int \frac{فرلا}{لا^۲+لا+۲} = \frac{لا+ج}{لا^۲+لا+۲} + ۲\int \frac{لا^۲ + (ج+\frac{۱}{۲})لا + \frac{ج}{۲}}{(لا^۲+لا+۲)^۲}\, فرلا$$

اب اگر $ج = \frac{۱}{۲}$ لکھیں، اور آخر الذکر تکملہ کے شمار کنندہ میں $\frac{۷}{۴}$ اضافہ کریں اور گھٹائیں تو

$$\int \frac{فرلا}{لا^۲+لا+۲} = \frac{لا+\frac{۱}{۲}}{لا^۲+لا+۲} + ۲\int \frac{لا^۲+لا+۲}{(لا^۲+لا+۲)^۲}\, فرلا - ۲\int \frac{\frac{۷}{۴}\, فرلا}{(لا^۲+لا+۲)^۲}$$

$$پس \int \frac{فرلا}{(لا^۲+لا+۲)^۲} = \frac{۲}{۷}\,\frac{لا+\frac{۱}{۲}}{لا^۲+لا+۲} + \frac{۲}{۷}\int \frac{فرلا}{لا^۲+لا+۲}$$

اس تکملہ کو مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے

دیا ہوا تکملہ یعنی
$$\int \frac{لا^۲+۳لا+۱}{(لا^۲+لا+۲)^۲}\, فرلا = \frac{۳}{۲}\int \frac{فر(لا^۲+لا+۲)}{(لا^۲+لا+۲)^۲} - \frac{۵(لا+\frac{۱}{۲})}{۷(لا^۲+لا+۲)} + \frac{۲}{۷}\int \frac{فرلا}{لا^۲+لا+۲}$$

$$= -\frac{۳}{۲(لا^۲+لا+۲)} - \frac{۵(لا+\frac{۱}{۲})}{۷(لا^۲+لا+۲)} + \frac{۴}{۷\sqrt{۷}}\, مس^{-۱}\frac{(۲لا+۱)}{\sqrt{۷}} + ج$$

## مثالیں

ذیل کے تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) $\int \frac{(\text{لا}-3)\,\text{فرلا}}{\text{لا}^2(\text{لا}+1)} = -\frac{3}{\text{لا}} + 4\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}} + \text{ج}$

(۲) $\int \frac{2\text{لا}^2+4\text{لا}+1}{\text{لا}(\text{لا}^2+2\text{لا}+1)}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{لا}) - \frac{1}{\text{لا}+1} + \text{ج}$

(۳) $\int \frac{2\text{ا}^3-2\text{ا}^2-2\text{ا}+1}{\text{ا}^2(\text{ا}^2-2\text{ا}+1)}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(\text{ا}-1)^2 + \frac{1}{\text{ا}(\text{ا}-1)} + \text{ج}$

(۴) $\int_3^4 \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}-1)^2(\text{لا}-2)} = \text{لوک}\,\frac{4}{3} - \frac{1}{6}$

(۵) $\int \frac{2\text{لا}^3+\text{لا}+3}{(\text{لا}^2+1)^2}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(\text{لا}^2+1) + \frac{1+3\text{لا}}{2(\text{لا}^2+1)} + \frac{3}{2}\,\text{مس}^{-1}\,\text{لا} + \text{ج}$

**۳** ۔ مندرجہ بالا بحث اور مثالوں سے ظاہر ہے کہ ہر منطق تفاعل کا (جو کہ ہمیشہ ایک منطق کسر کی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے) اور جس کا نسب نما حقیقی دو درجی اور خطی اجزاءِ ضربی میں جدا کر لیا جا سکتا ہے تکملہ دریافت ہو سکتا ہے۔ اور وہ سادہ ابتدائی تفاعلوں مثلاً جبری، لوکارتمی اور مقلوب مثلثی تفاعلوں کی رقموں میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

ذیل میں چند مزید مثالیں مشق کی خاطر دی جاتی ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ ان کو حل کر لے۔

## مزید مثالیں

ثابت کرو کہ :-

(۱) $\int \frac{\text{لا}^5-3\text{لا}+2}{(\text{لا}+2)^2(\text{لا}+1)^2}\,\text{فرلا} = \text{لا} - \frac{24}{\text{لا}+2} - \frac{6}{\text{لا}+1}$

$+\,14\,\text{لوک}\,(\text{لا}+2) - 19\,\text{لوک}\,(\text{لا}+1) + \text{ج}$

(۲) $\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(2\text{لا}+1)(\text{لا}^2+1)} = \frac{1}{10}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2+1}{(2\text{لا}+1)^2} + \frac{2}{5}\,\text{مس}^{-1}\,\text{لا} + \text{ج}$

$$(۳)\ \int \left(\frac{\text{لا}^{۲} - \text{ل}^{۲}}{\text{لا}^{۲} + \text{ل}^{۲}}\right)^{۲} \text{فرلا} = \text{لا} + \frac{۲\,\text{ل}^{۲}\,\text{لا}}{\text{لا}^{۲} + \text{ل}^{۲}} - ۲\,\text{ل}\ \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ل}} + \text{ج}$$

$$(۴)\ \int \frac{\text{ا}^{۶} + \text{ا}^{۵} + \text{ا}^{۳} + \text{ا}}{(\text{ا}^{۲} + ۲)^{۲}(\text{ا}^{۲} + ۳)^{۲}}\ \text{فرا} = \frac{۵}{۲(\text{ا}^{۲} + ۲)} + \frac{۱۰}{\text{ا}^{۲} + ۳}$$
$$+ \frac{۱۹}{۲}\ \text{لوک}\,(\text{ا}^{۲} + ۲) - ۹\,\text{لوک}\,(\text{ا}^{۲} + ۳) + \text{ج}$$

$$(۵)\ \int \frac{(۲\,\text{لا}^{۲} + ۱)\ \text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲} + ۴)(\text{لا} - ۳)} = \frac{۱۹}{۱۳}\ \text{لوک}\,(\text{لا} - ۳) + \frac{۷}{۲۶}\ \text{لوک}\,(\text{لا}^{۲} + ۴)$$
$$+ \frac{۲۱}{۲۶}\ \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{۲} + \text{ج}$$

$$(۶)\ \int \frac{(۳\,\text{ا} + ۲)\ \text{فرا}}{(\text{ا}^{۲} - ۳\,\text{ا} + ۳)^{۲}} = \frac{۱۳\,\text{ا} - ۲۴}{۳(\text{ا}^{۲} - ۳\,\text{ا} + ۳)} + \frac{۲۶}{۳\sqrt{۳}}\ \text{مس}^{-۱}\frac{۲\,\text{ا} - ۳}{\sqrt{۳}} + \text{ج}$$

$$(۷)\ \int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ل}^{۲} + \text{لا}^{۲})(\text{ب} + \text{لا})} = \frac{۱}{\text{ل}^{۲} + \text{ب}^{۲}}\left[\text{لوک}\ \frac{\text{ب} + \text{لا}}{\sqrt{\text{ل}^{۲} + \text{لا}^{۲}}} + \frac{\text{ب}}{\text{ل}}\ \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right] + \text{ج}$$

## ۴۔ نئے متغیر کی تعویض کے ذریعے تکمل۔

**منطق بنانا۔** گذشتہ فصل میں بیان کیا گیا تھا کہ تمام ایسے منطق تفاعلوں کے تکملے دریافت ہو سکتے ہیں جن کے نسب نما حقیقی دو درجی اور خطی اجزائے ضربی میں ڈھالے جا سکتے ہیں۔ جو جبری تفاعل غیر منطق ہیں ان میں سے صرف چند کو ابتدائی اور سادہ تفاعلوں کی رقموں میں تکمل کیا جا سکتا ہے۔ ایک نئے متغیر کی تعویض سے بعض صورتوں میں ان تفاعلوں کو ایسے معادل (equivalent) تفاعلوں میں بدل دیا جا سکتا ہے جو معیاری صورتوں کی فہرست میں داخل ہیں یا ان کو منطق بنا دیا جاتا ہے۔ غیر منطق تفاعل کو نئے تغیر کے ذریعے منطق بنا کر تکمل کرنے کے عمل کو منطق بنا کر تکمل کرنا کہتے ہیں۔ یہاں اس کی چند اہم مثالیں پیش کی جاتی ہیں۔

**(ا) تفرقے جن میں صرف لا کی کسری قوتیں شامل ہیں۔**

ایسے جملے کو بذریعہ تعویض $\text{لا} = \text{ی}^{\text{ن}}$ منطق بنایا جا سکتا ہے جس میں ن لا کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ہے۔ اس لیے کہ اب لا، فرلا اور جملہ اصلیہ ی کی رقموں میں منطق شکل میں ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔

**توضیحی مثال۔** $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\frac{۵}{۸}} - \text{لا}^{\frac{۱}{۸}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

**حل۔** چونکہ یہاں لا کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ۸ ہے اس لیے

$\text{لا} = \text{ی}^{۸}$ لکھو تب $\text{فرلا} = ۸\,\text{ی}^{۷}\,\text{فری}$، $\text{لا}^{\frac{۵}{۸}} = \text{ی}^{۵}$ اور $\text{لا}^{\frac{۱}{۸}} = \text{ی}$

$$\text{اور دیا ہوا تکملہ} = ۸\int \frac{\text{ی}^{۷}\,\text{فری}}{\text{ی}^{۵} - \text{ی}} = ۸\int \left(\text{ی}^{۲} + \frac{\text{ی}^{۳}}{\text{ی}^{۵} - \text{ی}}\right)\text{فری}$$

$$= ۸\int \text{ی}^{۲}\,\text{فری} + ۸\int \frac{\text{ی}^{۲}\,\text{فری}}{\text{ی}^{۴} - ۱}$$

$$= \frac{۸}{۳}\text{ی}^{۳} + ۸\int \frac{\text{ی}^{۲}\,\text{فری}}{(\text{ی}^{۲}+۱)(\text{ی}-۱)(\text{ی}+۱)}$$

$$\text{فرض کرو} \quad \frac{\text{ی}^{۲}}{(\text{ی}^{۲}+۱)(\text{ی}-۱)(\text{ی}+۱)} = \frac{\text{ا ی} + \text{ب}}{\text{ی}^{۲}+۱} + \frac{\text{ج}}{\text{ی}-۱} + \frac{\text{د}}{\text{ی}+۱}$$

مساوات کو کسروں سے پاک کر کے ترتیب دینے کے بعد ی کی مشابہ قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

$\text{ا} + \text{ج} + \text{د} = ۰$، $\text{ب} + \text{ج} - \text{د} = ۱$، $-\text{ا} + \text{ج} + \text{د} = ۰$ اور $-\text{ب} + \text{ج} - \text{د} = ۰$

ان کو حل کرنے سے $\text{ا} = ۰$، $\text{ب} = \frac{۱}{۲}$، $\text{ج} = \frac{۱}{۴}$ اور $\text{د} = -\frac{۱}{۴}$

$$\text{پس} \int \frac{\text{ی}^{۲}\,\text{فری}}{(\text{ی}^{۲}+۱)(\text{ی}-۱)(\text{ی}+۱)} = ۴\int \frac{\text{فری}}{\text{ی}^{۲}+۱} + ۲\int \frac{\text{فری}}{\text{ی}-۱} - ۲\int \frac{\text{فری}}{\text{ی}+۱}$$

$$= ۴\,\text{مس}^{-۱}\,\text{ی} + ۲\,\text{لوک}\,(\text{ی}-۱) - ۲\,\text{لوک}\,(\text{ی}+۱) + \text{ج}$$

$$= ۴\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}^{\frac{۱}{۸}} + ۲\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۸}} - ۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۸}} + ۱} + \text{ج}$$

اور جواب = $\frac{۸}{۳}$ لا$^{\frac{۳}{۸}}$ + ۴ مس$^{-۱}$ لا$^{\frac{۱}{۸}}$ + ۲ لوک $\frac{لا^{\frac{۱}{۸}} - ۱}{لا^{\frac{۱}{۸}} + ۱}$ + ج

واضح ہو کہ اوپر جو بحث کی گئی ہے ایسے غیر منطق جملوں سے کی گئی ہے جن کی عام شکل س ( لا$^{\frac{۱}{ن}}$ ) فرلا ہے - یہاں س سے مراد لا$^{\frac{۱}{ن}}$ کا منطق تفاعل ہے۔

## (ب) تفرقے جن میں صرف ا + ب لا کی کسری قوتیں

شامل ھیں - ایسے جملہ کو بذریعہ تعویض ا + ب لا = ی$^{ن}$ منطق شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں ن جملہ ا + ب لا کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ہے - اس لیے کہ اب لا، فرلا اور جملہ اصلیہ ی کی رقموں میں منطق شکل میں ظاہر کیے جا سکتے ہیں -

**توضیحی مثال** — $\int \frac{فرلا}{(ا + ب لا)^{\frac{۳}{۲}} + (ا + ب لا)^{\frac{۱}{۲}}}$

**حل** - چونکہ یہاں ( ا + ب لا ) کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ۲ ہے اس لیے ( ا + ب لا ) = ی$^{۲}$ لکھو

تب ( ا + ب لا )$^{\frac{۳}{۲}}$ = ی$^{۳}$ اور ( ا + ب لا )$^{\frac{۱}{۲}}$ = ی

اور ب فرلا = ۲ ی فری ∴ فرلا = $\frac{۲ ی فری}{ب}$

پس دیا ہوا تکملہ = $\frac{۲}{ب} \int \frac{ی فری}{ی (ی^{۲} + ۱)}$ = $\frac{۲}{ب} \int \frac{فری}{ی^{۲} + ۱}$ = $\frac{۲}{ب}$ مس$^{-۱}$ ی + ج

= $\frac{۲}{ب}$ مس$^{-۱}$ ( ا + ب لا )$^{\frac{۱}{۲}}$ + ج

جس تکملہ سے یہاں بحث کی گئی ہے اس کی عام صورت س [ لا، ( ا + ب لا )$^{\frac{۱}{ن}}$ ] فرلا ہے جس میں س سے مراد منطق تفاعل ہے -

# مثالیں

**ثابت کرو کہ :—**

(۱) ∫ فرما / (ما + ۲√ما + ۵) = لوک (ما + ۲√ما + ۵) - مس⁻¹ (√ما + ۱)/۲ + ج

(۲) ∫ ۲ فرلا / (لا (لا + ۲) √(لا + ۱)) = ½ لوک (√(لا+۱) - ۱)/(√(لا+۱) + ۱) - ۱/√۳ مس⁻¹ √((لا+۱)/۳) + ج

(۳) ∫ فرلا / (√(لا + ۱) + ∛(لا + ۱)) = ۳/۲ (لا+۱)^(۲/۳) - ۳ (لا+۱)^(۱/۳) + ۳ لوک (۱ + ∛(لا+۱)) + ج

(۴) ∫₁ فرلا / (√لا (۹ + ∛لا)) = ۶ (۱ - ۳ مس⁻¹ ۱/۳)

(۵) ∫₀² فرلا / ((لا + ۲)(لا + ۱)^(۳/۲)) = ۲(√۳ - ۱)/√۳ - π/۹

## ۵ ـ دو رقمی یا ثنائی تفرقے

(ا) لا^م (ا + ب لا^ن)^ف فرلا کی شکل کا تفرقہ جس میں ا اور ب کوئی مستقل ہیں اور قوت نما م، ن، ف منطق اعداد ہیں، دو رقمی تفرقہ کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ لا = ی^عہ تب فرلا = عہ ی^(عہ-۱) فری

اور لا^م (ا + ب لا^ن)^ف فرلا = عہ ی^(م عہ + عہ - ۱) (ا + ب ی^(ن عہ))^ف فری

اگر عہ نسب نماؤں م اور ن کا ذو اضعاف اقل لیا جائے تو م عہ اور ن عہ صحیح اعداد ہونگے۔

پس واضح ہے کہ دیا ہوا تفرقہ ایک دوسرے اسی شکل کے تفرقے کے مساوی ہے جس میں م اور ن کے بجائے صحیح اعداد درج ہیں۔ معہذا

(ب) لا^م (ا + ب لا^ن)^ف فرلا = لا^(م + ن ف) (ا لا^(-ن) + ب)^ف فرلا

دیے ہوئے تفرقہ کو اسی شکل کے ایک دوسرے تفرقہ میں تبدیل

کر دیتا ہے جس میں لا کے قوت نما ن کے عوض ـ ن درج ہے۔ پس ن کی جبری علامت خواہ کچھ ہی ہو ان دو تفرقوں میں سے ایک میں قوسوں کے اندر لا کا قوت نما یقیناً مثبت ہوگا۔

ف جبکہ ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے دو رقمی جملہ کو پھیلا کر اس کی ایک رقم کا تکملہ حاصل کر لیا جا سکتا ہے ذیل میں ف کو کسر مان کر اس کی بجائے $\frac{ر}{س}$ لکھا جاتا ہے جہاں ر اور س دونوں صحیح اعداد ہیں۔

پس ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر دو رقمی یا ثنائی تفرقہ $لا^م (ا + ب لا^ن)^{\frac{ر}{س}}$ فرلا کی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس میں م، ن، ر اور س صحیح عدد ہیں اور ن مثبت ہے۔

پہلے ہم دو رقمی تفرقہ $لا^م (ا + ب لا^ن)^{\frac{ر}{س}}$ فرلا . . . . (۲) کو منطق بنانے کے شرائط دریافت کرینگے۔

صورت (۱) فرض کرو $ا + ب لا^ن = ی^س$

تب $(ا + ب لا^ن)^{\frac{۱}{س}} = ی$ اور $(ا + ب لا^ن)^{\frac{ر}{س}} = ی^ر$

معہذا $لا = \left(\frac{ی^س - ا}{ب}\right)^{\frac{۱}{ن}}$ اور $لا^م = \left(\frac{ی^س - ا}{ب}\right)^{\frac{م}{ن}}$

پس $فرلا = \frac{س}{ب ن} ی^{س-۱} \left(\frac{ی^س - ا}{ب}\right)^{\frac{۱}{ن} - ۱}$ فری

(۲) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$لا^م (ا + ب لا^ن)^{\frac{ر}{س}} فرلا = \frac{س}{ب ن} ی^{ر+س-۱} \left(\frac{ی^س - ا}{ب}\right)^{\frac{م+۱}{ن} - ۱} فری$$

واضح ہے کہ اس جملہ کا دوسرا رکن منطق ہے جبکہ $\frac{م+۱}{ن}$ ایک صحیح عدد ہے یا صفر

صورت (۲) فرض کرو $ا + ب لا^{ن} = ی^{س} لا^{ن}$

تب $لا^{ن} = \frac{ا}{ی^{س} - ب}$ اور $ا + ب لا^{ن} = ی^{س} لا^{ن} = \frac{ا ی^{س}}{ی^{س} - ب}$

پس $(ا + ب لا^{ن})^{\frac{ر}{س}} = ا^{\frac{ر}{س}} (ی^{س} - ب)^{-\frac{ر}{س}} ی^{ر}$

معہذا $لا = ا^{\frac{1}{ن}} (ی^{س} - ب)^{-\frac{1}{ن}}$ اور $لا^{م} = ا^{\frac{م}{ن}} (ی^{س} - ب)^{-\frac{م}{ن}}$

$\therefore$ $فرلا = -\frac{س}{ن} ا^{\frac{1}{ن}} ی^{س-1} (ی^{س} - ب)^{-\frac{1}{ن}-1} فری$

(۱) میں ان کو تعویض کرنے سے

$$لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{\frac{ر}{س}} فرلا = -\frac{س}{ن} ا^{\frac{م+1}{ن} + \frac{ر}{س}}$$

$$(ی^{س} - ب)^{-(\frac{م+1}{ن} + \frac{ر}{س} + 1)} ی^{ر+س-1} فری$$

واضح ہے کہ اس جملہ کا دوسرا رکن منطق ہے جبکہ $\frac{م+1}{ن} + \frac{ر}{س}$ ایک صحیح عدد ہے یا صفر

پس دو رقمی تفرقہ $لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{\frac{ر}{س}}$ فرلا کو ان شرائط کے تحت منطق بنایا جا سکتا ہے۔

**توضیحی مثال (۱)** $\int \frac{لا^{3} فرلا}{(2 + 5 لا^{2})^{\frac{3}{2}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ تکملہ $= \int لا^{3} (2 + 5 لا^{2})^{-\frac{3}{2}} فرلا$ اور م = ۳، ن = ۲، ر = -۳، س = ۲

پس اس مثال میں $\frac{م+1}{ن} = 2$ جو ایک صحیح عدد ہے اس لیے یہ صورت (۱) کی مثال ہے۔

$\therefore$ ہم فرض کرتے ہیں کہ $(2 + 5 لا^{2}) = ی^{2}$

اس لیے $لا = \left(\frac{ی^۲ - ۲}{۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}$، $فرلا = \frac{ی\ فری}{(۵)^{\frac{۱}{۲}}(ی^۲ - ۲)^{\frac{۱}{۲}}}$ اور $(۲ + ۵لا^۲)^{\frac{۳}{۲}} = ی^۳$

$$\therefore \int لا^{-۲}(۲ + ۵لا^۲)^{-\frac{۳}{۲}} فرلا = \int \left(\frac{ی^۲ - ۲}{۵}\right)^{-۱} \frac{ی\ فری}{(۵)^{\frac{۱}{۲}}(ی^۲ - ۲)^{\frac{۱}{۲}}} \frac{۱}{ی^۳}$$

$$= \frac{۱}{(۵)^{\frac{۱}{۲}}} \int (۱ - ۲ی^{-۲}) فری = \frac{۱}{(۵)^{\frac{۱}{۲}}} \left[ی + ۲ی^{-۱}\right] + ج$$

$$= \frac{۱}{۲۵} \frac{۴ + ۵لا^۲}{لا\sqrt{۲ + ۵لا^۲}} + ج$$

**توضیحی مثال (۲)** $\int \frac{فرلا}{لا^۴\sqrt{ا + لا^۲}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل: تکملہ $= \int لا^{-۴}(ا + لا^۲)^{-\frac{۱}{۲}} فرلا$

جس میں $م = -۴$، $ن = ۲$، $\frac{ر}{س} = -\frac{۱}{۲}$

پس $\frac{م + ۱}{ن} + \frac{ر}{س} = -\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = -۲$ جو ایک صحیح عدد ہے، لہذا یہ صورت (۲) کی مثال ہے۔

اس لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ $ا + لا^۲ = ی^۲لا^۲ \therefore ی = \frac{(ا + لا^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{لا}$

لہذا $لا^۲ = \frac{ا}{ی^۲ - ا}$، $ا + لا^۲ = \frac{ای^۲}{ی^۲ - ۱}$، $(ا + لا^۲)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{ا^{\frac{۱}{۲}}ی}{(ی^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}}$

معہذا $لا = \frac{ا^{\frac{۱}{۲}}}{(ی^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}}$، $لا^۴ = \frac{ا^۲}{(ی^۲ - ۱)^۲}$

اور $فرلا = ا^{\frac{۱}{۲}}(ی^۲ - ۱)^{-\frac{۳}{۲}} ی\ فری$

$$\therefore \int لا^{-۴}(ا + لا^۲)^{-\frac{۱}{۲}} فرلا = -\int \frac{(ی^۲ - ۱)}{ا^۲} فری$$

$$= -\frac{1}{ر^2}\left(\frac{ی^3}{3} - ی\right) + ج = \frac{3ی - ی^3}{3ر^2}$$

$$= \frac{(ر+لا^2)^{\frac{1}{2}}(2لا^2 - ر)}{3ر^2لا^3} + ج$$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :—

$$(1)\ \int ا^5 (8 + ا^2)^{\frac{1}{2}}\ فرا = \frac{2(5ا^4 - 16)(8 + ا^2)^{\frac{3}{2}}}{105} + ج$$

$$(2)\ \int لا^5 (ر + ب لا^3)^{\frac{1}{2}}\ فرلا = \frac{2}{9}(2ر + ب لا^3)ب^{-2}(ر + ب لا^3)^{\frac{1}{2}} + ج$$

$$(3)\ \int لا^{-2}(1 + لا^2)^{-\frac{1}{2}}\ فرلا = -\frac{(1 + لا^2)^{\frac{1}{2}}}{لا} + ج$$

$$(4)\ \int لا^{-ن}(1 + لا^ن)^{\frac{1}{ن}}\ فرلا = -\frac{(1 + لا^ن)^{\frac{ن-1}{ن}}}{(ن-1)لا^{ن-1}} + ج$$

$$(5)\ \int لا^{-3}\ 2\sqrt{1 + لا^2}\ فرلا = لوک(لا^{-1} + \sqrt{1 + لا^{-2}}) - \frac{\sqrt{1 + لا^2}}{لا^2} + ج$$

## ۶ـ مثلثی تفرقوں کا استحالہ

**مسئلہ۔** مثلثی تفرقہ جس میں جب ى اور جم ى صرف منطق صورت میں شامل ہیں۔ بذریعہ تعویض۔

$$(1)\ مس\ \frac{ى}{2} = ی$$

یا بالفاظ دیگر بذریعہ تعویض۔

(۲) $\text{جب } ر = \frac{۲ی}{۱+ی^۲}$ ، $\text{جم } ر = \frac{۱-ی^۲}{۱+ی^۲}$ ، $\text{فر } ر = \frac{۲\ \text{فری}}{۱+ی^۲}$

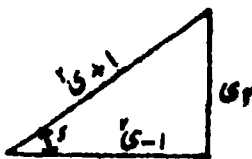
ایک دوسرے تفرقی جملہ میں جو ی میں منطق ہے تحویل کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت۔ چونکہ $\text{مس}^۲ \frac{ر}{۲} = \frac{۱-\text{جم } ر}{۱+\text{جب } ر}$

$\text{مس } \frac{ر}{۲} = ی$ تعویض کرکے جم ی کے لیے حل کرنے سے

(۳) $\text{جم } ر = \frac{۱-ی^۲}{۱+ی^۲}$ جو ضابطوں (۲) میں سے ایک ضابطہ ہے۔

شکل ۲۵ کے مثلث قائم الزاویہ سے اس کی توضیح ہوتی ہے اور نیز ضابطہ $\text{جب } ر = \frac{۲ی}{۱+ی^۲}$ کی جو (۲) میں شامل ہے۔ ھیذا ضابطہ (۱) سے

$ر = ۲\ \text{مس}^{-۱} ی$　　$\therefore \text{فر } ر = \frac{۲\ \text{فری}}{۱+ی^۲}$ جو (۲) کا تیسرا ضابطہ ہے۔

واضح ہے کہ اگر کسی مثلثی تفرقہ میں مس ر، جم ر، قط ر، قم ر صرف منطق صورتوں میں شامل ہوں تو مصرحۂ بالا مسئلہ اس پر بھی حاوی ہو سکتا ہے اس لیے کہ یہ چار تفاعل منطق طریقہ پر جب ر یا جم ر یا ان دونوں کی رقموں میں ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔

$۱+ی^۲$　$۲ی$　$۱-ی^۲$　$ر$

شکل ۲۵

پس کوئی منطق مثلثی تفرقہ تکمیل کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ ی کی رقموں میں مستحیل تفرقہ جزوی کسور میں جدا کیا جا سکتا ہے۔ (ملاحظہ ہو فصل ۱)

توضیحی مثال ۔ ثابت کرو کہ

$$\int \frac{فرلا}{ا + ب جب ۲لا} = \frac{۱}{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}} مس^{-۱}\left(\frac{ا مس لا + ب}{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}}\right) + ج$$

[نوٹ ا > ب]

حل ۔ فرض کرو ۲لا = د تب لا = $\frac{د}{۲}$ اور فرلا = $\frac{۱}{۲}$ فرد

اب ی = مس $\frac{د}{۲}$ لکھو تب جب د = $\frac{۲ فری}{۱ + ی^۲}$

اور دیا ہوا تکملہ $= \frac{۱}{۲}\int \dfrac{\frac{۲ فری}{۱ + ی^۲}}{ا + \frac{۲ ب ی}{۱ + ی^۲}} = \int \frac{فری}{ا ی^۲ + ۲ ب ی + ا}$

$$= \frac{۱}{ا}\int \frac{فری}{\left(ی + \frac{ب}{ا}\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}}{ا}\right)^۲} = \frac{۱}{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}} مس^{-۱}\frac{ا ی + ب}{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}} + ج$$

ی کو لا کی رقموں میں واپس لانے سے جواب $= \frac{۱}{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}} مس^{-۱}\left(\frac{ا مس لا + ب}{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}}\right) + ج$

# مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) $\int \frac{فرط}{جب ط + مس ط} = \frac{۱}{۲} لوک مس \frac{ط}{۲} - \frac{۱}{۴} مس^۲ \frac{ط}{۲} + ج$

(۲) $\int \frac{مس لا فرلا}{۱ + جب لا} = \frac{۱}{۲} لوک \frac{۱ + مس \frac{لا}{۲}}{۱ - مس \frac{لا}{۲}} + \frac{۱}{\left(۱ + مس \frac{لا}{۲}\right)^۲}$

$- \frac{۱}{۱ + مس \frac{لا}{۲}} + ج$

(۳) $\int \frac{\text{فرط}}{۳ + \text{جم ط}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}\,\frac{\text{ط}}{۲}\right) + \text{ج}$

(۴) $\int \frac{\text{تم لا} + ۱}{\text{جم لا} + ۱}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۴}\,\text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۲} + \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{۲} + \text{ج}$

(۵) $\int^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{فرط}}{۱۲ + ۱۳\,\text{جم ط}} = \frac{۱}{۵}\,\text{لوک}\,\frac{۳}{۲}$

## ۷۔ متفرق تعویضیں

— جو تعویضیں اب تک پیش ہوئی تھیں ان سے دیے ہوئے تفرقی جملوں کو منطق بنا کر تکمل کیا گیا تھا۔ بہتیری صورتوں میں دیے ہوئے تفرقہ کو منطق بنائے بغیر بھی بعض تعویضوں کے ذریعے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ لیکن اس کا کوئی عام قاعدہ نہیں بتایا جا سکتا۔ متفرق قسم کے سوالات بکثرت حل کرنے کے بعد طالب علم کو تجربہ بتا دیگا کہ کن صورتوں میں کیا کرنا چاہیے۔

ایک مفید عام تعویض جو متکافی تعویض کہلاتی ہے

$\text{لا} = \frac{۱}{\text{ی}}$ ہے جس سے $\text{فرلا} = -\frac{\text{فری}}{\text{ی}^{۲}}$

**توضیحی مثال۔** $\int \frac{\text{فرف}}{\text{ف}^{۲}\sqrt{۱ + ۲\text{ف} + ۳\text{ف}^{۲}}}$ کا تکملہ معلوم کرو۔

**حل۔** $\text{ف} = \frac{۱}{\text{ی}}$ لکھو تب دیا ہوا تکملہ

$$= \int \frac{-\text{ی}^{-۲}\,\text{فری}}{\frac{۱}{\text{ی}^{۲}}\sqrt{۱ + \frac{۲}{\text{ی}} + \frac{۳}{\text{ی}^{۲}}}} = -\int \frac{\text{ی}\,\text{فری}}{(\text{ی}^{۲} + ۲\text{ی} + ۳)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\int \frac{\text{فر}(\text{ی}^{۲} + ۲\text{ی} + ۳)}{(\text{ی}^{۲} + ۲\text{ی} + ۳)^{\frac{۱}{۲}}} + \int \frac{\text{فری}}{(\text{ی}^{۲} + ۲\text{ی} + ۳)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$= -(\text{ی}^{۲} + ۲\text{ی} + ۳)^{\frac{۱}{۲}} + \int \frac{\text{فری}}{\left\{(\text{ی} + ۱)^{۲} + (\sqrt{۲})^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}} + \bar{\text{ج}}$$

$$= - (ی^۲ + ۲ی + ۳)^{\frac{۱}{۲}} + لوک \left\{ (ی + ۱) + \sqrt{ی^۲ + ۲ی + ۳} \right\} + ج$$

دوبارہ فہ کی رقموں میں تبدیل کرنے سے

$$= -\frac{\sqrt{۱ + ۲فہ + ۳فہ^۲}}{۳} + لوک \frac{(۱ + فہ) + \sqrt{۱ + ۲فہ + ۳فہ^۲}}{فہ} + ج$$

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) $\int \frac{فرط}{ط\sqrt{۲ + ط - ط^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} لوک \left( \frac{\sqrt{۲ + ۲ط} - \sqrt{۲ - ط}}{\sqrt{۲ + ۲ط} + \sqrt{۲ - ط}} \right) + ج$

[اشارہ : فرض کرو کہ $\sqrt{۲ + ط - ط^۲} = ط (فہ + ۱)$ ]

(۲) $\int \frac{فرلا}{لا^۲ \sqrt{۲۷لا^۲ + ۶لا - ۱}} = \frac{\sqrt{۲۷لا^۲ + ۶لا - ۱}}{لا} - ۳ جب^{-۱} \left( \frac{۱ - ۳لا}{۶لا} \right) + ج$

[اشارہ : فرض کرو کہ $لا = \frac{۱}{ی}$ ]

(۳) $\int \frac{فرلا}{ہولا + ہو^{-لا}} = مس^{-۱} ہو - \frac{\pi}{۴}$ [اشارہ : فرض کرو $ہو^{لا} = ی$ ]

(۴) $\int \frac{فرلا}{لا \sqrt{لا^۲ + ۲لا + ۳}} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} لوک \frac{۱}{لا} \left\{ ۳ + لا + \sqrt{۳لا^۲ + ۶لا + ۹} \right\} + ج$

[اشارہ : $لا = \frac{۱}{ی}$ لکھو ]

(۵) $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۲و + و^۲}\, فرو = \sqrt{۳} - \frac{۱}{۲} لوک \left( ۲ + \sqrt{۳} \right)$

[اشارہ : $و + ۱ = ی$ ]

# پندرھواں باب

## تحویلی ضابطے (Reduction Formulae)

## تکملوں کی جدول کا استعمال

### ۱ـ دو درجی تفرقوں کے لیے تحویلی ضابطے

اب تک جو طریقے بتائے گئے ہیں ان سے اگر دو درجی تفرقوں کے تکملے جلد دریافت نہیں ہو سکتے تو تکمل بالحصص کے طریقے استعمال کر کے عام طور پر تحویلی ضابطوں سے کام لیا جاتا ہے۔ ان تحویلی ضابطوں سے دیا ہوا تفرقہ دو رقموں کے حاصل جمع کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے جن میں سے ایک رقم تکمل کی علامت سے معرّا رہتی ہے اور دوسری رقم ابتدائی دیے ہوئے جملہ کی ہم صورت ہوتی ہے لیکن اس کا تکمل آسان تر ہوتا ہے۔ اہم تحویلی ضابطے چار ہیں اور ذیل میں درج کیے جاتے ہیں:—

$$(\text{ا})\quad \int \text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}+1}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}}{(\text{ن ف}+\text{م}+1)\,\text{ب}} - \frac{(\text{م}-\text{ن}+1)\,\text{ا}}{(\text{ن ف}+\text{م}+1)\,\text{ب}}\int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$$

$$(\text{ب})\quad \int \text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+1}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}}{\text{ن ف}+\text{م}+1} + \frac{\text{ا ن ف}}{\text{ن ف}+\text{م}+1}\int \text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا}$$

(ج) $\int لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{ف} \, فرلا = \frac{لا^{م+1} (ا + ب لا^{ن})^{ف+1}}{(م+1) ا}$

$- \frac{(ن ف + ن + م + 1) ب}{(م+1) ا} \int لا^{م+ن} (ا + ب لا^{ن})^{ف} \, فرلا$

(د) $\int لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{ف} \, فرلا = - \frac{لا^{م+1} (ا + ب لا^{ن})^{ف+1}}{ن (ف+1) ا}$

$+ \frac{ن ف + ن + م + 1}{ن (ف+1) ا} \int لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{ف+1} \, فرلا$

ان ضابطوں کو حفظ کرنے کی ضرورت نہیں لیکن یہ معلوم ہونا چاہیے کہ ہر ضابطہ میں کیا کیا جاتا ہے اور وہ کب ناقابلِ عمل ہوتا ہے۔

ضابطہ (ا) م کو بقدر ن گھٹاتا ہے۔ یہ ضابطہ ناقابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ $ن ف + م + 1 = 0$
ضابطہ (ب) ف کو بقدر ا گھٹاتا ہے۔ یہ " " " جبکہ $ن ف + م + 1 = 0$
ضابطہ (ج) م کو بقدر ن بڑھاتا ہے۔ یہ " " " جبکہ $م + 1 = 0$
ضابطہ (د) ف کو بقدر ا بڑھاتا ہے۔ یہ " " " جبکہ $ف + 1 = 0$

[ا] ضابطہ (ا) اخذ کرنے کے لیے ہم تکمیل بالحصص کے ضابطہ $\int ی \, فرو = ی و - \int و \, فری$ کو اس طرح استعمال کرتے ہیں۔

$\int لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{ف} \, فرلا$ کو بشکل $\int ی \, فرو$ ڈھالنے اور فرو کو گیارھویں باب کی معیاری صورت (ا) یعنے قوت کے ضابطہ سے تکمیل کرنے کے لیے ظاہر ہے کہ قوسین کے باہر کے لا کا قوت نما ن - ا ہونا چاہیے پس ی میں لا کے قوت نما کے لیے م میں سے ن - ا تفریق کرنے پر م - ن + ا رہجاتا ہے۔

$\therefore ی = لا^{م-ن+1}$ لکھو اور $فرو = (ا + ب لا^{ن})^{ف} لا^{ن-1} \, فرلا$

لہٰذا $\text{فرد} = (\text{م} - \text{ن} + ۱)\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}$ اور $\text{و} = \dfrac{(\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+۱}}{\text{ن ب}\,(\text{ف}+۱)}$

تکمیل بالحصص کے ضابطہ میں ان کو تعویض کرنے سے

$$\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}+۱}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+۱}}{\text{ن ب}\,(\text{ف}+۱)}$$

$$- \frac{\text{م}-\text{ن}+۱}{\text{ن ب}\,(\text{ف}+۱)} \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+۱}\,\text{فرلا} \quad \ldots (۱)$$

لیکن $\int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+۱}\,\text{فرلا} = \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})\,\text{فرلا}$

$$= \text{ا} \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} + \text{ب} \int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$$

اس کو (۱) میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے ۔

$$\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}+۱}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+۱}}{\text{ن ب}\,(\text{ف}+۱)}$$

$$- \frac{\text{ا}(\text{م}-\text{ن}+۱)}{\text{ن ب}\,(\text{ف}+۱)} \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$$

$$- \frac{\text{م}-\text{ن}+۱}{\text{ن}\,(\text{ف}+۱)} \int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$$

سب سے آخری رقم کو مساوات کے سیدھے جانب منتقل کرنے اور $\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$ کے لیے مساوات کو حل کرنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔
اس کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ ضابطہ (۲) دیے ہوئے تفرقی جملہ $\text{لا}^{\text{م}} (\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$ کے تکمیل کو اسی وضع کے ایک دوسرے تفرقی جملہ کے تکمیل کے تابع بنا دیتا ہے جس میں م کے بجائے م - ن درج ہے ۔ پس ضابطہ (۲) کے بار بار استعمال سے م کو بقدر ن کی کسی بھی ضعف کے گھٹایا جا سکتا ہے ۔

جبکہ $\text{ن ف} + \text{م} + ۱ = ۰$ ، ضابطہ (۲) ناقابلِ عمل ہوتا ہے اس لیے کہ

نسب نما معدوم ہو جاتا ہے۔ لیکن اس صورت میں

$$\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}+\text{ف}=0$$

اس لیے چودھویں باب کی فصل ۱ کے طریقے سے تکملہ بآسانی دریافت ہو سکتا ہے۔ (ا) کی ضرورت نہیں ہوتی۔

[۲] ضابطہ (ب) اخذ کرنے کے لیے ہم تفرقی جملہ کے اجزاء ضربی کو علیحدہ کر کے لکھ سکتے ہیں۔

$$\int\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}=\int\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})\,\text{فرلا}$$

$$=\text{ا}\int\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا}$$

$$+\text{ب}\int\text{لا}^{\text{م}+\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا}\;\ldots\ldots(2)$$

اب اگر (۲) کی آخری رقم پر ضابطہ (۱) عائد کریں (یعنے اس ضابطہ میں بجائے م کے م + ن لکھیں اور بجائے ف کے ف - ا لکھیں تو

$$\text{ب}\int\text{لا}^{\text{م}+\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا}=\frac{\text{لا}^{\text{م}+1}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}}{\text{ن ف}+\text{م}+1}-\frac{\text{ا}(\text{م}+1)}{\text{ن ف}+\text{م}+1}\int\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا}$$

اس کو (۲) میں تعویض کرنے سے ہمیں ضابطہ (ب) حاصل ہوتا ہے۔

ضابطہ (ب) کے ہر استعمال سے ف بقدر اکائی گھٹ جاتا ہے۔ یہ ضابطہ بھی اس صورت میں ناقابلِ عمل ہوتا جس میں (ا) ہوتا ہے

یعنے $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}+\text{ف}=0$

[۳] ضابطہ (ج) اخذ کرنے کے لیے ہم ضابطہ (ا) کو $\int\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$ کے لیے حل کرنے سے

$$\int لا^{م-ن}(ا+ب لا^ن)^ف فرلا = \frac{لا^{م-ن+۱}(ا+ب لا^ن)^{ف+۱}}{(م-ن+۱)ا} - \frac{(ن ف+م+۱)ب}{(م-ن+۱)ا}$$

$$\int لا^م (ا+ب لا^ن)^ف فرلا$$

اس کے اندر م کی جگہ م + ن تعویض کرنے سے ضابطہ (ج) حاصل ہوتا ہے۔
پس ہر مرتبہ جبکہ ضابطہ (ج) استعمال ہوتا ہے م کے بجائے م + ن لکھا جاتا ہے۔ جس وقت ن + ۱ صفر ہوتا ہے تو ضابطہ (ج) ناقابلِ عمل ہوتا ہے لیکن اس صورت میں اس کی ضرورت نہیں ہوتی باب (۱۴) کی فصل ۱ کی مدد سے تفرقی جملہ کو منطق بنایا جا سکتا ہے۔

[۴] ضابطہ (د) اخذ کرنے کے لیے ہم ضابطہ (ب) کو
$\int لا^م (ا+ب لا^ن)^{ف-۱}$ فرلا کے لیے حل کر کے اس کے اندر ف کی جگہ ف + ۱ تعویض کرتے ہیں۔

ہر مرتبہ جبکہ ضابطہ (د) استعمال ہوتا ہے ف کو بقدر اکائی بڑھا دیتا ہے۔ ظاہر ہے کہ (د) ناقابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ ف + ۱ = ۰ لیکن اس صورت میں چونکہ ف = -۱ دیا ہوا تفرقی جملہ منطق ہے۔

ظاہر ہے کہ چودھویں باب کی فصل ۱ میں صورت چہارم کا تحویلی ضابطہ (د) کی ایک خاص صورت ہے جس میں م = ۰، ف = -ن، ن = ۲
ا = ا^۲، ب = ۱

## توضیحی مثال (۱) $\int لا^۲ \sqrt{ا^۲ + لا^۲}$ فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

حل - اس تکملہ کی تعیین کے لیے تحویلی ضابطہ (ا) موزوں ہے کیونکہ اس کے استعمال سے تکملہ $\int لا \sqrt{ا^۲ + لا^۲}$ فرلا کی تعیین کرنی ہوگی جو سابقہ باب کی معیاری صورت (ا) متعلق ضابطۂ قوت کے تحت آتا ہے۔
پس

$$\int لا^۲ \sqrt{ا^۲+لا^۲}\ فرلا = \frac{۱}{۵} لا^۲ (ا^۲+لا^۲)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۵} ا^۲ \int لا \sqrt{ا^۲+لا^۲}\ فرلا$$

$$= \frac{1}{5}\,\text{لا}^2\left(\text{و}^2+\text{لا}^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\,\text{و}^2\left(\text{و}^2+\text{لا}^2\right)^{\frac{3}{2}} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{15}\left(3\,\text{لا}^2 - 2\,\text{و}^2\right)\left(\text{و}^2+\text{لا}^2\right)^{\frac{3}{2}} + \text{ج}$$

**توضیحی مثال (۲)** ثابت کرو کہ

$$\int\sqrt{\text{و}^2+\text{لا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{2}\sqrt{\text{و}^2+\text{لا}^2} + \frac{\text{و}^2}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{و}^2+\text{لا}^2}\right) + \text{ج}$$

حل۔ اس سوال کے حل کے لیے ضابطہ (ب) موزوں ہے اس لیے $\int\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{و}^2+\text{لا}^2}}$ کی تعیین معیاری صورت (۱۸) کے ضابطہ کے تحت آتی ہے۔ پس

$$\int\left(\text{و}^2+\text{لا}^2\right)^{\frac{1}{2}}\text{فرلا} = \frac{\text{لا}\left(\text{و}^2+\text{لا}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\text{و}^2}{2}\int\left(\text{و}^2+\text{لا}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{لا}}{2}\sqrt{\text{و}^2+\text{لا}^2} + \frac{\text{و}^2}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2+\text{و}^2}\right) + \text{ج}$$

**توضیحی مثال (۳)** تکمل کرو۔ $\int\frac{\text{فرط}}{\text{ط}^3\sqrt{\text{ط}^2-1}}$

حل۔ یہاں ضابطہ (ج) استعمال کرنا موزوں ہوگا کیونکہ اس سے تکملہ $\int\frac{\text{فرط}}{\text{ط}\sqrt{\text{ط}^2-1}}$ کی تعیین کرنی ہوگی جو معیاری صورت

$$\int\frac{\text{فرو}}{\text{و}\sqrt{\text{و}^2-\text{و}^2}} = \frac{1}{\text{و}}\,\text{قط}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{و}} + \text{ج}$$ میں شامل ہے۔

پس $$\int\frac{\text{فرط}}{\text{ط}^3\sqrt{\text{ط}^2-1}} = \frac{\left(\text{ط}^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{2\,\text{ط}^2} + \frac{1}{2}\,\text{قط}^{-1}\,\text{ط} + \text{ج}$$

**توضیحی مثال (۴)** $\int\frac{\text{فرلا}}{\left(2\,\text{و}\,\text{لا}-\text{لا}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ $۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^2 = \text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2$ اور $\text{فرلا} = \text{فر}(\text{لا} - \text{ا})$

ہم اس کو $\int \frac{\text{فر}(\text{لا} - \text{ا})}{\left\{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$ لکھ سکتے ہیں۔ اس کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ اس کا تکمل بذریعہ ضابطہ (د) سود مند ہوگا۔

$$\text{پس تکملہ} = -\frac{(\text{لا} - \text{ا})\left\{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\right\}^{-\frac{1}{2}}}{-\text{ا}^2} + 0\int\left\{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\,\text{فر}(\text{لا} - \text{ا})$$

چونکہ (ن ف + ن + م + ۱) = صفر اس لیے دوسری رقم کو تکملانے کی ضرورت ہی نہیں پیش آتی۔

$$\text{لہذا جواب} = \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}^2\left\{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\right\}^{\frac{1}{2}}} + \text{ج} = \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}^2\sqrt{۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^2}} + \text{ج}$$

## مثالیں

ذیل کے تکملوں کی تصدیق کرو:-

$$(۱)\quad \int \frac{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{لا}^2}\,\text{فرلا} = -\frac{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{5}{2}}}{\text{ا}^2\,\text{لا}} - \frac{\text{لا}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^2} - \frac{3}{2}\,\text{لا}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\,\text{ا}^2\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

[اشارہ۔ پہلے ضابطہ (ا) استعمال کیا جائے پھر ضابطہ (ب) دو مرتبہ]

$$(۲)\quad \int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^2}} = -\sqrt{۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^2} + \text{ا}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

[اشارہ۔ متکمل یعنے $\int \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ میں ف(لا) کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\text{لا}^{\frac{1}{2}}$ پر تقسیم کرنے سے وہ $\frac{\text{لا}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{۲\,\text{ا} - \text{لا}}}$ بن جاتا ہے اور اس شکل میں ضابطہ (ا) کے ذریعہ بآسانی تکمل کیا جاسکتا ہے]

$$(۳)\quad \int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + ۴}} = \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 + ۴}}{۲} - \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + ۴}\right) + \text{ج}$$

(۴) $\int \text{ا}^{۳}(۱+\text{ا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرا} = \frac{(۵\text{ا}^{۲}+۲\text{ا}^{۴})\sqrt{۱+\text{ا}^{۲}}}{۳۲}$

$+\frac{۳}{۳۲}\,\text{لوک}\,(\text{ا}+\sqrt{۱+\text{ا}^{۲}}) + \text{ج}$

(۵) $\int \text{ط}^{۵}\sqrt{۱-\text{ط}^{۲}}\,\text{فرط} = \frac{۱}{۱۶}\left\{\text{جب}^{-۱}\text{ط} + (۲\text{ط}^{۳}-\text{ط})\sqrt{۱-\text{ط}^{۲}}\right\} + \text{ج}$

(۶) $\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۲\text{ولا}-\text{لا}^{۲}}} = -\frac{(\text{لا}+۳\text{و})\sqrt{۲\text{ولا}-\text{لا}^{۲}}}{۲}$

$+\frac{۳\text{و}^{۲}}{۲}\,\text{جم}^{-۱}\left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{و}}\right) + \text{ج}$

[اشارہ ضابطہ (۲) دو مرتبہ استعمال کیا جائے]

(۷) $\int \frac{\text{لا}+\sqrt{۱+\text{لا}}}{\text{لا}-\sqrt{۱+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = ۱+\text{لا}+۲\sqrt{۱+\text{لا}}+$

$+۲\,\text{لوک}(\text{لا}-\sqrt{۱+\text{لا}}) + \frac{۶}{\sqrt{۵}}\,\text{لوک}\,\frac{۲\sqrt{۱+\text{لا}}-۱-\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۱+\text{لا}}-۱+\sqrt{۵}} + \text{ج}$

(۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(۳\text{لا}^{۲}+۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{۳\text{لا}^{۲}+۲}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳\text{لا}^{۲}+۲}+\sqrt{۲}}\right.$

$\left.+\frac{۱}{\sqrt{۳\text{لا}^{۲}+۲}}\right] + \text{ج}$

(۹) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲}+۳\text{لا}-۲}} = \sqrt{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{۲}+۳\text{لا}-۲}}{\sqrt{۲}} + \text{ج}$

(۱۰) $\int \frac{\text{ط}^{۲}\,\text{فرط}}{\sqrt{(۲-۳\text{ط}-۲\text{ط}^{۲})^{۳}}} = \frac{۱۷\text{ط}-۶}{۲۵\sqrt{۲-۳\text{ط}-۲\text{ط}^{۲}}}$

$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\sqrt{\frac{۴+۲\text{ط}}{۱-۲\text{ط}}} + \text{ج}$

## ۲۔ مثلثی تفرقوں کے لیے تحویلی ضابطے۔

سابقہ فصل کا طریقہ جس سے دیے ہوئے تکملہ کا حل ایک دوسرے

اس کے مشابہ صورت کے تکملہ کی تعیین کے تابع گردانا جاتا ہے **متواتر تحویل** کہلاتا ہے ۔ یہی طریقہ اب مندرجۂ ذیل مثلثی تحویلی ضابطوں کو اخذ کرکے اور ان کا استعمال بنا کر مثلثی تفرقوں پر عائد کیا جاتا ہے ۔

(ھ) $\int \text{جب}^{\text{م}} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}} \text{لا} \; \text{فرلا} = \dfrac{\text{جب}^{\text{م}+۱} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}-۱} \text{لا}}{\text{م}+\text{ن}}$

$+ \dfrac{\text{ن}-۱}{\text{م}+\text{ن}} \int \text{جب}^{\text{م}} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}-۲} \text{لا} \; \text{فرلا}$

(و) $\int \text{جب}^{\text{م}} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}} \text{لا} \; \text{فرلا} = - \dfrac{\text{جب}^{\text{م}-۱} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}+۱} \text{لا}}{\text{م}+\text{ن}}$

$+ \dfrac{\text{م}-۱}{\text{م}+\text{ن}} \int \text{جب}^{\text{م}-۲} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}} \text{لا} \; \text{فرلا}$

(ز) $\int \text{جب}^{\text{م}} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}} \text{لا} \; \text{فرلا} = - \dfrac{\text{جب}^{\text{م}+۱} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}+۱} \text{لا}}{\text{ن}+۱}$

$+ \dfrac{\text{م}+\text{ن}+۲}{\text{ن}+۱} \int \text{جب}^{\text{م}} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}+۲} \text{لا} \; \text{فرلا}$

(ح) $\int \text{جب}^{\text{م}} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}} \text{لا} \; \text{فرلا} = \dfrac{\text{جب}^{\text{م}+۱} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}+۱} \text{لا}}{\text{م}+۱}$

$+ \dfrac{\text{م}+\text{ن}+۲}{\text{م}+۱} \int \text{جب}^{\text{م}+۲} \text{لا} \; \text{جم}^{\text{ن}} \text{لا} \; \text{فرلا}$

طالب علم کو چاہیے کہ ان ضابطوں سے متعلق یاد رکھے کہ :

ضابطہ (ھ) میں ن کو بقدر ۲ گھٹا دیا جاتا ہے۔ (ھ) نا قابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ م + ن = ۰

ضابطہ (و) میں م کو بقدر ۲ گھٹا دیا جاتا ہے۔ (و) نا قابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ م + ن = ۰

ضابطہ (ز) میں ن کو بقدر ۲ بڑھا دیا جاتا ہے۔ (ز) نا قابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰

ضابطہ (ح) میں م کو بقدر ۲ بڑھا دیا جاتا ہے۔ (ح) نا قابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰

ان ضابطوں کو اخذ کرنے کے لیے مثل سابق تکمل بالحصص کا

ضابطہ عائد کرتے ہیں یعنے

$$\int ی \, فرو = ی و - \int و \, فری$$

فرض کرو ی = جم$^{ن-1}$ لا اور فرو = جب$^م$ لا جم لا فرلا

تب فری = -(ن-1) جم$^{ن-2}$ لا جب لا فرلا اور و = $\frac{جب^{م+1} لا}{م+1}$

تکمل بالحصص کے ضابطہ میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\int جب^م لا جم^ن لا فرلا = \frac{جب^{م+1} جم^{ن-1} لا}{م+1}$$

$$+ \frac{ن-1}{م+1} \int جب^{م+2} لا جم^{ن-2} لا فرلا \dots (1)$$

اس طرح اگر فرض کیا جائے کہ ی = جب$^{م-1}$ لا اور فرو = جم$^ن$ لا جب لا فرلا

تو حاصل ہوتا ہے $\int جب^م لا جم^ن لا فرلا = -\frac{جب^{م-1} لا جم^{ن+1} لا}{ن+1}$

$$+ \frac{م-1}{ن+1} \int جب^{م-2} لا جم^{ن+2} لا فرلا \dots (2)$$

لیکن $\int جب^{م+2} لا جم^{ن-2} لا فرلا = \int جب^م لا (1 - جم^2 لا) جم^{ن-2} لا فرلا$

$= \int جب^م لا جم^{ن-2} لا فرلا - \int جب^م لا جم^ن لا فرلا$

اس کو مساوات (1) میں تعویض کرکے مشابہ رقموں کو ترکیب دینے کے بعد $\int جب^م لا جم^ن لا فرلا$ کے لیے حل کیا جائے تو ضابطہ (ھ) حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (2) میں اس کے مشابہ تعویض کرنے سے ضابطہ (و) حاصل ہوتا ہے

ضابطہ (ھ) کو علامتِ مساوات کے بائیں جانب کے تکمل کے لیے حل کرنے اور ن کو بقدر ۲ اضافہ کرنے سے ضابطہ (ز) حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح ضابطہ (و) سے ضابطہ (ح) حاصل ہوتا ہے۔

جیسا کہ قبل ازیں کہا جا چکا ہے (ھ) اور (و) ضابطے ناقابل عمل ہوتے ہیں جبکہ م + ن = ۰۔ ضابطہ (ز) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰ اور ضابطہ (ح) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ م + ۱ = ۰۔ لیکن ان صورتوں میں دیے ہوئے تکملوں کی تعیین دوسرے طریقوں سے ہو سکتی ہے جو قبل ازیں بیان کیے جا چکے ہیں۔

ظاہر ہے کہ م اور ن جب صحیح اعداد ہیں تو تکملہ ∫ جب^م لا جم^ن لا فرلا کو مصرحۂ بالا تحویلی ضابطوں میں سے کسی ایک کو استعمال کرکے مندرجۂ ذیل ضابطوں میں سے ایک ضابطہ کے تابع گردانا جا سکتا ہے:

∫ فرلا، ∫ جب لا فرلا، ∫ جم لا فرلا، ∫ جب لا جم لا فرلا، ∫ (فرلا / جب لا) = ∫ قم لا فرلا

∫ (فرلا / جم لا) = ∫ قط لا فرلا، ∫ (فرلا / جم لا جب لا)، ∫ مس لا فرلا، ∫ مم لا فرلا

جن کے تکمل کے طریقے قبل ازیں معلوم کر لیے جا چکے ہیں۔

**توضیحی مثال (۱)** ∫ جب^۲ طہ جم^۴ طہ فرطہ کی قیمت دریافت کرو۔

[یہاں م = ۲، ن = ۴]

حل- ضابطہ (و) استعمال کرنے سے

∫ جب^۲ طہ جم^۴ طہ فرطہ = − (جب طہ جم^۵ طہ) / ۶ + ۱/۶ ∫ جم^۴ طہ فرطہ ..... (۱)

(۱) کے بائیں جانب کے تکملہ پر ضابطہ (ھ) عائد کرنے سے

[اور یہ یاد رکھ کر کہ م = ۰، ن = ۴]

∫ جم^۴ طہ فرطہ = (جب طہ جم^۳ طہ) / ۴ + ۳/۴ ∫ جم^۲ طہ فرطہ ......... (۲)

(۲) کے بائیں جانب کے تکملہ پر ضابطہ (ھ) عائد کرنے سے

[یہاں م = ۰، ن = ۲]

∫ جم^۲ طہ فرطہ = (جب طہ فرطہ) / ۲ + ۱/۲ لا ......... (۳)

اب (۳) کا نتیجہ (۲) میں تعویض کرو اور جو نتیجہ اس طرح حاصل ہوتا ہے اس کو (۴) میں تعویض کرو، تو

$$\int \text{جب}^{۲}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{۴}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = -\frac{\text{جب طہ جم}^{۵}\,\text{طہ}}{۶} + \frac{\text{جب طہ جم}^{۳}\,\text{طہ}}{۲۴} + \frac{۱}{۱۶}\left(\text{جب طہ جم طہ} + \text{طہ}\right) + \text{ج}$$

**توضیحی مثال** (۲) $\int \text{جب}^{۲}\,\text{فہ}\ \text{جم}^{-۳}\,\text{فہ}\ \text{فرفہ}$ کی قیمت دریافت کرو۔
[یہاں م = ۲، ن = −۳]

**حل** ۔ ضابطہ (ہر) استعمال کرنے سے

$$= -\frac{\text{جب}^{۳}\,\text{فہ}\ \text{جم}^{-۲}\,\text{فہ}}{-۲} - \frac{۱}{۲}\int \text{جب}^{۲}\,\text{فہ}\ \text{جم}^{-۱}\,\text{فہ}\ \text{فرفہ}$$

اور $\int \text{جب}^{۲}\,\text{فہ}\ \text{جم}^{-۱}\,\text{فہ}\ \text{فرفہ}$ [جس میں م = ۲ اور ن = −۱] پر ضابطہ (و) عائد کرنے سے اس کی قیمت $-\text{جب فہ} + \int \text{جم}^{-۱}\,\text{فہ}\ \text{فرفہ} = -\text{جب فہ} + \text{لوک}\left(\text{قط فہ} + \text{مس فہ}\right)$ برآمد ہوتی ہے ان نتائج کو اپنی اپنی جگہ پر تعویض کرنے سے

$$\int \text{جب}^{۲}\,\text{فہ}\ \text{جم}^{-۳}\,\text{فہ}\ \text{فرفہ} = \frac{\text{جب}^{۳}\,\text{فہ}\ \text{جم}^{-۲}\,\text{فہ}}{۲} - \frac{۱}{۲}\left[-\text{جب فہ} + \text{لوک}\left(\text{قط فہ} + \text{مس فہ}\right)\right] + \text{ج}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\text{جب فہ}\left(\frac{\text{جب}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جم}^{۲}\,\text{فہ}} + ۱\right) + \text{لوک}\left(\text{قط فہ} + \text{مس فہ}\right)\right] + \text{ج}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\text{مس فہ قط فہ} + \text{لوک}\left(\text{قط فہ} + \text{مس فہ}\right)\right] + \text{ج}$$

# مثالیں

مندرجہ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) $\int \text{جب}^{۴}\,\text{لا}\ \text{جم}^{۳}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۵}\,\text{جب}^{۵}\,\text{لا} - \frac{۱}{۷}\,\text{جب}^{۷}\,\text{لا} + \text{ج}$

(۲) $\int \text{جم}^{\frac{2}{3}}\, \text{۳طہ}\ \text{جب}^{3}\, \text{۳طہ فرطہ} = \text{جم}^{\frac{5}{3}}\, \text{۳طہ} \left( \frac{1}{11}\, \text{جم}^{2}\, \text{۳طہ} - \frac{1}{5}\, \text{جم۲طہ} \right) + \text{ج}$

(۳) $\int \text{مم}^{3}\, \frac{\text{فہ}}{3}\ \text{قم}^{4}\, \frac{\text{فہ}}{3}\ \text{فرفہ} = -\frac{1}{4}\, \text{مم}^{4}\, \frac{\text{فہ}}{3} \left( 3 + 2\, \text{مم}^{2}\, \frac{\text{فہ}}{3} \right) + \text{ج}$

(۴) $\int \text{مس}^{\frac{5}{2}}\, \text{لا}\ \text{قط}^{6}\, \text{لا فرلا} = \text{مس}^{\frac{7}{2}}\, \text{لا} \left( \frac{2}{7} + \frac{4}{11}\, \text{مس}^{2}\, \text{لا} + \frac{2}{15}\, \text{مس}^{4}\, \text{لا} \right) + \text{ج}$

(۵) $\int \frac{\text{فرطہ}}{\text{جب}^{2}\, \text{طہ جم}^{3}\, \text{طہ}} = -\frac{1}{\text{جب طہ جم}^{2}\, \text{طہ}} + \frac{3\, \text{جب طہ}}{2\, \text{جم}^{2}\, \text{طہ}}$

$+ \frac{3}{2}\, \text{لوک} \left( \text{قط طہ} + \text{مس طہ} \right) + \text{ج}$

(۶) $\int \frac{\text{مم}^{2}\, \text{۲طہ فرطہ}}{\text{جب ۲طہ}} = -\frac{1}{4}\, \text{مم ۲طہ قم ۲طہ} - \frac{1}{4}\, \text{لوک} \left( \text{قم ۲طہ} - \text{مم ۲طہ} \right) + \text{ج}$

(۷) $\int \frac{\text{فرما}}{\text{جب}^{4}\, \text{ما}} = -\frac{\text{جم ما}}{3\, \text{جب}^{3}\, \text{ما}} - \frac{2\, \text{جم ما}}{3\, \text{جب ما}} + \text{ج}$

(۸) $\int \text{جم}^{6}\, \text{فہ فرفہ} = \frac{\text{جم فہ جب فہ}}{48} \left\{ 8\, \text{جم}^{4}\, \text{فہ} + 10\, \text{جم}^{2}\, \text{فہ} + 15 \right\} + \frac{5\,\text{فہ}}{16} + \text{ج}$

(۹) $\int^{\pi} \text{جب}^{8}\, \text{طہ فرطہ} = \frac{35\pi}{128}$

(۱۰) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^{4}\, \text{فہ فرفہ}}{\text{جب}^{2}\, \text{فہ}} = \frac{3\pi}{8} - \frac{5}{4}$

## ۳۔ تکملوں کی جدول کا استعمال —

گیارہویں چودہویں اور موجودہ بابوں میں تکمل کے جو طریقے بیان ہوئے ہیں ان میں دیے ہوئے تکملہ کو معیاری ابتدائی صورتوں میں سے کسی ایک یا ایک سے زیادہ صورت میں تحویل کرنے کی کوشش کی گئی ہے ۔ اس غرض کے لیے متعدد ترکیبیں (مثلاً تکمل بالحصص، جزوی کسور، نئے متغیر کی تعویض اور تحویلی ضابطو

کا استعمال) کام میں لائی گئی ہیں۔

جب کبھی ایک نسبتہً وسیع جدول تکملوں کی مہیا ہو تو باضابطہ تکمل کے کسی سوال کو حل کرنے کے لیے سب سے پہلے اس جدول میں ایک ایسے ضابطہ کی تلاش کی جانی چاہیے جس سے دیا ہوا سوال براہِ راست بغیر کسی مصرحہ بالا ترکیبوں کی مدد کے حل ہو سکتا ہے۔ اس قسم کی جدول باٹرلی کے تکملی احصاء یا گرنول اور اسمتھ کے احصاء کی کتابوں میں موجود ہے۔ ان سے استفادہ کیا جا سکتا ہے۔

اگر کوئی ایسا سوال پیش ہو جس کے لیے جدول میں ضابطہ نہ مل سکے تو جن ترکیبوں کا اوپر ذکر آ چکا ہے ان سے مدد لے کر ایسی صورت پیدا کی جانی چاہیے جس سے سوال پر جدول کے ضابطوں میں سے کسی ایک کا اطلاق ہو سکے۔ یہ کام زیادہ تر دیرینہ مشق اور ضابطوں کے کثرت استعمال ہی سے ہو سکتا ہے۔

---

# سولھواں باب

# تکملی احصاء کے ذریعے طبیعیات کے بعض مسائل کا حل

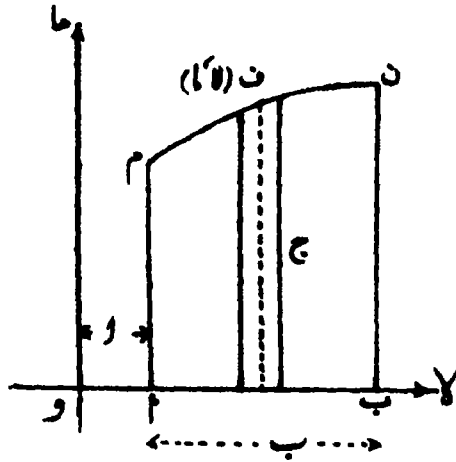
## ۱ - رقبہ کا معیارِ اثر - ہندسی مرکز - طبیعیات کے

طالب کو معلوم ہے کہ ہر مادّی جسم کا ایک مرکزِ ثقل ہوتا ہے۔ یکساں مادّے کے رقبوں کا مرکزِ ثقل ان کا ہندسی مرکز ہوتا ہے۔ اگر کوئی مستوی شکل مرکزِ تشاکل رکھتی ہے تو وہی اس کا ہندسی مرکز بھی ہے۔ اور اگر کسی مستوی شکل کا محور تشاکل ہے تو اس کا ہندسی مرکز اس محور پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ شکل ۳۰۵ میں رقبہ ا م ف ن ب ایک بڑی تعداد کون مستطیلوں میں تقسیم کیا جاتا ہے، جن میں سے ہر ایک کا قاعدہ مف لا ہے۔ شکل میں صرف ایک مستطیل بتایا گیا ہے۔ اگر اس کا رقبہ فر س مانا جائے اور ج (جس کے محدد ھ اور ک ہیں) اس کا ہندسی مرکز تو فر س = ما فر لا، ھ = لا، اور ک = $\frac{1}{2}$ ما

اس عنصری مستطیل کے رقبہ کا معیارِ اثر محور و لا (یا و ما) کے گرد، اس کے رقبہ کا اس کے ہندسی مرکز کے محور و لا (یا و ما) سے عمودی فاصلہ کے ساتھ حاصل ضرب ہے۔ اگر ایسے معیارہائے اثر کو بالترتیب فر م لا اور فر م ما سے تعبیر کیا جائے

تو فرھ‌لا = ک فرس اور فرھ‌ما = ھ فرس ........ (ا)

شکل ۸۳

اور شکل ا م ف ن ب کے رقبہ کا معیارِ اثر تکملی احصاء کے اساسی مسئلہ (دیکھو ۱ باب ۱۳) کو ن عنصری مستطیلوں کے معیار ہائے اثر کے مجموعہ پر عائد کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس

ھ‌لا = ∫ک فرس اور ھ‌ما = ∫ھ فرس ........ (ب)

اور اگر (لاَ، ماَ) رقبہ ا م ف ن ب کا ہندسی مرکز ہے اور س اس کا رقبہ تو دی ہوئی شکل کے رقبہ کے معیارِ اثر (متعلقہ مساوات ب) اور لاَ و ماَ میں رابطے ہیں :-

س لاَ = ھ‌ما اور س ماَ = ھ‌لا ........ (ج)

لاَ، ماَ کے محسوب کرنے کے لیے رقبہ کے معیارِ اثر ھ‌لا اور ھ‌ما معلوم کرو۔ شکل ۸۳ کے لیے

ھ‌لا = $\frac{1}{2}$ ∫ا^ب ما$^2$ فرلا اور ھ‌ما = ∫ا^ب لا ما فرلا

ان ضابطوں میں ما کی قیمت لا کی رقموں میں (منحنی م ف ن کی مساوات کی مدد سے) تعویض کی جانی چاہیے۔ اگر رقبہ ر معلوم ہے تو

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}_{\text{ما}}}{\text{ر}} \quad \text{اور} \quad \overline{\text{ما}} = \frac{\text{ھ}_{\text{لا}}}{\text{ر}}$$

اگر معلوم نہیں ہے تو $\text{ر} = \int \text{ما فرلا}$ کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

توضیحی مثال (۱) ایک ایسے رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو جو خطِ مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ف لا}$، محور لا اور منحنی کے نقطہ $\text{لا}_1$، $\text{ما}_1$ کے معیّن سے محدود ہے۔

حل۔ چونکہ

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}_{\text{ما}}}{\text{ر}} \quad \text{اور} \quad \overline{\text{ما}} = \frac{\text{ھ}_{\text{لا}}}{\text{ر}}$$

$$\text{اور}\ \text{ھ}_{\text{ما}} = \int_0^{\text{لا}_1} \text{لا ما فرلا}،\quad \text{ھ}_{\text{لا}} = \frac{1}{2}\int_0^{\text{لا}_1} \text{ما}^2\,\text{فرلا}\quad \text{اور}\ \text{ر} = \int_0^{\text{لا}_1} \text{ما فرلا}$$

$$\text{پس}\ \overline{\text{لا}} = \frac{۲\,\text{ف}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\text{لا}_1} \text{لا}^{\frac{3}{2}}\,\text{فرلا}}{۲\,\text{ف}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\text{لا}_1} \text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}} = \frac{\frac{۴}{۵}\,\text{ف}^{\frac{1}{2}}\,\text{لا}_1^{\frac{5}{2}}}{\frac{۴}{۳}\,\text{ف}^{\frac{1}{2}}\,\text{لا}_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{۳}{۵}\,\text{لا}_1$$

$$\text{اور}\ \overline{\text{ما}} = \frac{۲\,\text{ف} \int_0^{\text{لا}_1} \text{لا فرلا}}{۲\,\text{ف}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\text{لا}_1} \text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}} = \frac{\text{ف لا}_1^2}{\frac{۴}{۳}\,\text{ف}^{\frac{1}{2}}\,\text{لا}_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{۳}{۴}\,\text{ف}^{\frac{1}{2}}\,\text{لا}_1^{\frac{1}{2}} = \frac{۳}{۸}\,\text{ما}_1$$

توضیحی مثال (۲) خطِ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے پہلے ربع کے رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔

$$\text{حل۔ چونکہ}\ \text{ما}^2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)\quad \text{لہذا}\ \text{ما} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$$

$$\text{اور}\ \overline{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}_{\text{ما}}}{\text{ر}} = \frac{\int_0^{\text{ا}} \text{لا ما فرلا}}{\int_0^{\text{ا}} \text{ما فرلا}} = \frac{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\int_0^{\text{ا}} \text{لا}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}}{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\int_0^{\text{ا}} (\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}} = \frac{-\frac{\text{ب}}{۲\text{ا}}\int_0^{\text{ا}} (-۲\,\text{لا})(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}}{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\int_0^{\text{ا}} (\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}}$$

$$= \frac{\frac{ب}{٢ا}\left[\frac{(ا^٢-لا^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]^{ا}}{\frac{ب}{ا}\left\{\frac{لا}{٢}(ا^٢-لا^٢)^{\frac{١}{٢}}+\frac{ا^٢}{٢}\text{جب}^{-١}\frac{لا}{ا}\right\}^{ا}} = \frac{\frac{ا^٢ب}{٣}}{\frac{\pi}{٤}اب} = \frac{٤ا}{٣\pi}$$

اس طرح $\bar{ما} = \frac{ھ_{لا}}{س} = \frac{\frac{١}{٢}\int^{ا} ما^٢ \, فرلا}{\int^{ا} ما \, فرلا} = \frac{\frac{ب^٢}{٢ا^٢}\left(ا^٢لا-\frac{لا^٣}{٣}\right)^{ا}}{\frac{\pi}{٤}اب} = \frac{\frac{اب^٢}{٣}}{\frac{\pi}{٤}اب} = \frac{٤ب}{٣\pi}$

**توضیحی مثال (٣)** ناقص $\frac{لا^٢}{ا^٢}+\frac{ما^٢}{ب^٢}=١$ دائرہ $لا^٢+ما^٢=ا^٢$ اور مثبت سمت میں محور لا سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو $ما_٢$ دائرہ س کے کسی نقطہ کا معین ہے اور $ما_١$ اس کے متناظر ناقص پر کے نقطہ کا معین تو عنصری رقبہ = فرس = $(ما_٢-ما_١)$ فرلا۔
اس عنصر کا ہندسی مرکز نقطہ $\left(لا، \frac{ما_١+ما_٢}{٢}\right)$ مانا جاسکتا ہے۔

پس $\bar{لا} = \frac{\int^{ا} لا(ما_٢-ما_١)\,فرلا}{\int^{ا}(ما_٢-ما_١)\,فرلا}$ اور چونکہ $ما_٢=\sqrt{ا^٢-لا^٢}$ اور $ما_١=\frac{ب}{ا}\sqrt{ا^٢-لا^٢}$

$$\bar{لا} = \frac{\left(١-\frac{ب}{ا}\right)\int^{ا} لا(ا^٢-لا^٢)^{\frac{١}{٢}}\,فرلا}{\left(١-\frac{ب}{ا}\right)\int^{ا}(ا^٢-لا^٢)^{\frac{١}{٢}}\,فرلا} = \frac{\frac{ا}{٣}}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤ا}{٣\pi}$$

اور $\bar{ما} = \frac{\int^{ا}\frac{١}{٢}(ما_٢+ما_١)(ما_٢-ما_١)\,فرلا}{\int^{ا}(ما_٢-ما_١)\,فرلا} = \frac{\frac{١}{٢}\int^{ا}(ما_٢^٢-ما_١^٢)\,فرلا}{\frac{\pi ا(ا-ب)}{٤}} = \frac{\frac{١}{٢}\left[\left(ا^٢لا-\frac{لا^٣}{٣}\right)\frac{ا^٢-ب^٢}{ا^٢}\right]^{ا}}{\frac{ا\pi}{٤}(ا-ب)}$

$$= \frac{٢(ا+ب)}{\pi ا^٣}\left(\frac{٢ا^٣}{٣}\right) = \frac{٤}{٣\pi}(ا+ب)$$

# مثالیں

(۱) منحنی $\text{ما}^۲ = ۴ (۱ - \text{لا}) \text{لا}^۲$ کے حلقہ سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز کہاں ہے؟ [جواب $\bar{\text{لا}} = \frac{۱۶}{۲۱}$، $\bar{\text{ما}} = ۰$]

ثابت کرو کہ :-

(۲) خطوط مکانی $\text{ما}^۲ = ۱ \text{لا}$ اور $\text{لا}^۲ = \text{ب ما}$ سے محدود رقبہ کے ہندسی مرکز کے محدد ہیں۔

$$\bar{\text{لا}} = \frac{۹}{۲۰} \text{ا}^{\frac{۱}{۳}} \text{ب}^{\frac{۲}{۳}} \quad \text{اور} \quad \bar{\text{ما}} = \frac{۹}{۲۰} \text{ا}^{\frac{۲}{۳}} \text{ب}^{\frac{۱}{۳}}$$

(۳) ڈائن $\text{لا}^۲ \text{ما} = ۴ \text{ا}^۲ (۲ \text{ا} - \text{ما})$ اور محور لا سے محدود رقبہ کے ہندسی مرکز کے لیے

$$\bar{\text{لا}} = ۰ \text{،} \quad \bar{\text{ما}} = \frac{۱}{۲}$$

(۴) ایک دائری قطعہ ( Segment ) جس کا وتر مرکز دائرہ پر زاویہ ۲ طہ بناتا ہے) کے رقبہ کے ہندسی مرکز کا فاصلہ مرکز دائرہ سے

$$\frac{۲ \text{ ص جب}^۳ \text{ طہ}}{۳ (\text{طہ} - \text{جب طہ جم طہ})} \text{ ہے۔}$$

(۵) منحنی جس کی قطبی مساوات $\text{ر} = \text{ا جم طہ}$ ہے اس کے ایک حلقہ میں محدود رقبہ کا ہندسی مرکز مبداء سے فاصلہ $\frac{۸۱ \text{ ا} \sqrt{۳}}{۸۰ \pi}$ پر واقع ہے۔

(۶) خطِ تدویر $\text{لا} = \text{ا} (\text{طہ} - \text{جب طہ})$، $\text{ما} = \text{ا} (۱ - \text{جم طہ})$ کی ایک کمان کے رقبہ کا ہندسی مرکز بمقام $\bar{\text{لا}} = \pi \text{ا}$، $\bar{\text{ما}} = \frac{۵ \text{ا}}{۶}$ واقع ہے۔

(۷) ایک مکافی شکل کے پترے کا قاعدہ ۱۲ سنتی میتر اور ارتفاع ۸ سنتی میتر ہے تو اس کا ہندسی مرکز اس کے راس کے ۸ء۴ سنتی میتر نیچے

واقع ہے۔

(۸) بلابی خط $ما^۲ (۲ ا - لا) = لا^۳$ اور اس کے متقارب $لا = ۲ ا$ سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز نقطہ $\bar{لا} = \frac{۵ ا}{۳}$، $\bar{ما} = ۰$ ہے۔

(۹) ایک قطاع دائرہ ( Sector ) کا ہندسی مرکز قطاع کے ناصف پر راس سے فاصلہ $\frac{۲}{۳}$ ص $\frac{جب \frac{ط}{۲}}{\frac{ط}{۲}}$ پر واقع ہے، جس میں ص دائرہ کا نصف قطر اور ط قطاع کا زاویہ ہے۔

(۱۰) ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ سے جو قطعہ، منحنی کے محوروں کے مثبت سروں کو ملانے والا وتر منقطع کرتا ہے، اس کا ہندسی مرکز نقطہ

$$\bar{لا} = \frac{۲ ا}{۳ (\pi - ۲)} \text{ اور } \bar{ما} = \frac{۲ ب}{۳ (\pi - ۲)} \text{ ہے}$$

[اشارہ، توضیحی مثال (۳) کو بغور دیکھا جائے]

## ۲۔ گردشی مجسم کے ہندسی مرکز کی تعیین۔

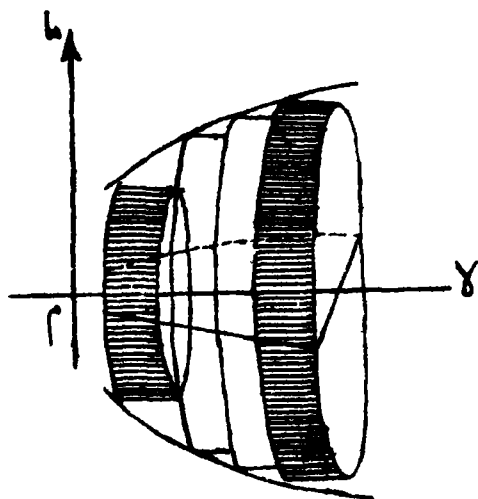
کسی متجانس ٹھوس جسم کا مرکزِ ثقل اس کے ہندسی مرکز کے مماثل ہوتا ہے اور ہندسی مرکز ٹھوس جسم کا جو بھی تشاکل کا مستوی ہو اس میں واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو م لا اس مجسم کا ہندسی محور ہے۔ اس کا ہندسی مرکز م لا پر واقع ہوگا۔ اگر اس کے ایک "عنصری" حجم کو یعنے معـ لا ارتفاع اور ما نصف قطر والے اسطوانہ کو فرح سے تعبیر کیا جائے (دیکھو شکل ۸۴) تو $فرح = \pi ما^۲ معـ لا$ اس اسطوانہ کے حجم کا معیارِ اثر بلحاظ محور م ما کے

$$فرم_{ما} = لا \; فرح = \pi \; لا \; ما^۲ \; معـ لا$$

تب پورے مجسم کے حجم کا معیارِ اثر تکملی احصاء کے اساسی مسئلہ سے دریافت ہو جاتا ہے اور مندرجۂ ذیل ضابطہ سے $\bar{لا}$ کی قیمت

$\text{ح}\,\bar{\text{لا}} = \text{حما} = \int \pi\, \text{لا}\, \text{ما}^2\, \text{فرلا}$ برآمد ہوتی ہے۔

شکل ۸۴

توضیحی مثال (۱) نصف کرہ مجسم کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔

حل۔ مرکز کرہ کو مبداء م مان کر مجسم کی مستوی سطح کو م ما اور م ے محوروں کے مستوی میں تصور کرو۔ تب مجسم محور م لا کے لحاظ سے متشاکل ہوگا۔

پس $\bar{\text{لا}} = \dfrac{\int_0^{\text{ص}} \pi\, \text{لا}\, \text{ما}^2\, \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ص}} \pi\, \text{ما}^2\, \text{فرلا}} = \dfrac{\pi \int_0^{\text{ص}} \text{لا}\,(\text{ص}^2 - \text{لا}^2)\, \text{فرلا}}{\pi \int_0^{\text{ص}} (\text{ص}^2 - \text{لا}^2)\, \text{فرلا}}$ [اس لیے کہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$]

$$= \frac{\pi \left[\text{ص}^2 \dfrac{\text{لا}^2}{2} - \dfrac{\text{لا}^4}{4}\right]_0^{\text{ص}}}{\pi \left[\text{ص}^2\, \text{لا} - \dfrac{\text{لا}^3}{3}\right]_0^{\text{ص}}} = \frac{\frac{1}{4}\text{ص}^4}{\frac{2}{3}\text{ص}^3} = \frac{3}{8}\,\text{ص}$$

توضیحی مثال (۲) قطع ناقص $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ اور خطوط

ا = ۰، ما = ب سے محدود سطح کی محور م ما کے گرد گھومنے سے جو گردشی مجسم بنتا ہے اس کا ہندسی مرکز کہاں ہے؟

حل۔ مجسم کے تشاکل سے واضح ہے کہ $\bar{\text{لا}} = ۰$ یعنے ہندسی مرکز محور ما پر ہوگا۔

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\int_{۰}^{\text{ب}} \pi\, \text{ما}\, \text{لا}^2\, \text{فرما}}{\int_{۰}^{\text{ب}} \pi\, \text{لا}^2\, \text{فرما}} = \frac{\pi \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} \int_{۰}^{\text{ب}} \text{ما}(\text{ب}^2 + \text{ما}^2)\, \text{فرما}}{\pi \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} \int_{۰}^{\text{ب}} (\text{ب}^2 + \text{ما}^2)\, \text{فرما}} = \frac{\frac{3}{4}\, \text{ب}^4}{\frac{4}{3}\, \text{ب}^3}$$

$$= \frac{9}{16}\, \text{ب}$$

# مثالیں

(۱) رقبہ اور گردشی مجسم کے ہندسی مرکز کی تعیین کے لیے جس استدلال کے ساتھ عمل کیا گیا اسی طرح قوس کے ہندسی مرکز کے لیے بھی عمل کر کے ثابت کرو کہ

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{لا}\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}\, \text{فرلا}}{\text{ل}} = \frac{\int_{\text{ہ}}^{\text{بہ}} \text{لا}\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^2}\, \text{فرما}}{\text{ل}}$$

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ما}\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}\, \text{فرلا}}{\text{ل}} = \frac{\int_{\text{ہ}}^{\text{بہ}} \text{ما}\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^2}\, \text{فرما}}{\text{ل}}$$

جہاں (ا، ہ) اور (ب، بہ) قوس کے سروں کے محدد ہیں اور ل = قوس کا طول

ثابت کرو کہ

(۲) قائم دائری مجسم مخروط کا ہندسی مرکز اس کے محور پر راس سے بلندی کے تین چوتھائی فاصلہ پر واقع ہے۔

(۳) محور ما، خط مکانی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ اور خط مستقیم ما = ب سے محدود رقبہ محور ما کے گرد گھومتا ہے۔ اس سے جو گردشی مجسم بنتا ہے

ں کا ہندسی مرکز لاَ = ۰، ماَ = ۵/۴ ب ہے۔

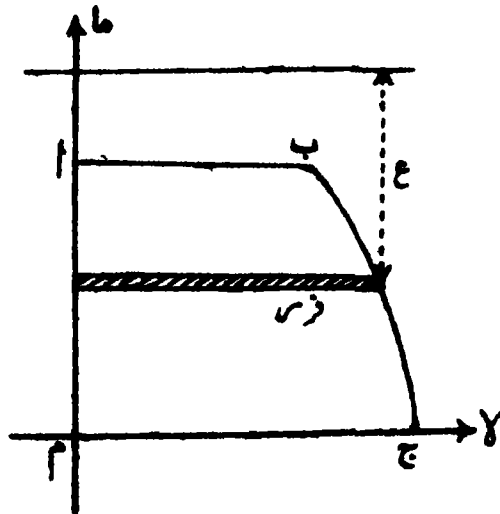
(۴) محور لا کے گرد، ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے پہلے ربع میں واقع رقبہ کے گھومنے سے جو جسم پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز اَ = ۳ا/۸ ہے۔

(۵) خط لا = ا کے گرد، اس خط، محور لا اور خطِ مکافی ما۲ = ۴ف لا سے محدود سطح کے گھومنے سے جو گردشی جسم پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز نقطہ ماَ = ۵/۱۶ ب ہے جس میں ب۲ = ۴ ف لا

(۶) محور ما اور منحنیاں لا۲ - ما۲ = ۱، ما = ۰، ما = ۱ سے محدود رقبہ محور ما کے گرد گھومتا ہے جو جسم اس طرح پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز ماَ = ۹/۱۶ ہے

## ۳۔ سیال کا دباؤ

فرض کرو شکل ۸۵ میں سیال کے اندر ایک انتصابی رقبہ ا ب ج م ہے۔ سیال کی کثافت

شکل ۸۵

ب جگہ مستقل اور گہرائی کے غیر تابع تصور کی جاتی ہے۔ اگر اکائی و = سیال کے
ائی حجم کا وزن تو چونکہ سیال کی ہر سمت میں دباؤ ایک ہی ہوتا ہے اس لیے
ں کی کھلی سطح کے نیچے گہرائی ع پر دباؤ (یعنے اکائی رقبہ کی سطح پر عمل
بنے والی قوت) = وع۔

اگر رقبہ ا ب ج م پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرنا ہو تو اس پورے
رقبہ کو اُفقی پٹیوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اگر گہرائی ع کے پاس کی پٹی کا رقبہ
ر س ہے تو اس پر دباؤ

فر د = وع فر س

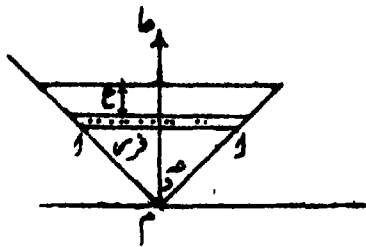
پس سارے رقبہ ا ب ج م پر کا حاصل مجموعی دباؤ د = ∫ وع فر س .... (۲)

ر س کو لا' ما کی رقموں میں اور ع کو ما کی رقموں میں لکھ کر منحنی ب ج کی
ساوات کی مدد سے لا کو ما کی رقموں میں تعویض کرنے سے حاصل مجموعی
باؤ د کی تعیین ہو جاتی ہے۔

**توضیحی مثال۔** ایک کھلے منشور نما برتن کی عمودی تراش مساوی الساقین
مثلث کی سی ہے جس کے مساوی ضلعوں کا طول فرداً فرداً ا ہے اور ان کا
رمیانی زاویہ ۲ ھ ہے۔ برتن اس طرح کھڑا ہے کہ اس کی عمودی تراش کا راس
یچے اور قاعدہ متوازی الافق ہے۔ اگر اس کو و وزن فی اکائی حجم مایع سے بھر دیا جائے تو
ں کے مثلثی پہلو پر کا مجموعی دباؤ
ریافت کرو۔

شکل ۸۶

حل۔ فر د = وع فر س

ع = ا جم ھ ـ ما

(دیکھو شکل ۸۶)۔

اور فر س = ۲ لا فر لا

پس د = ∫ و ع فرس − و ∫ (ا جم ع − ما) ۲ مس ع فرما

= ۱/۳ اُ^۳ و جب ع جم^۲ ع اکائیاں

# مثالیں

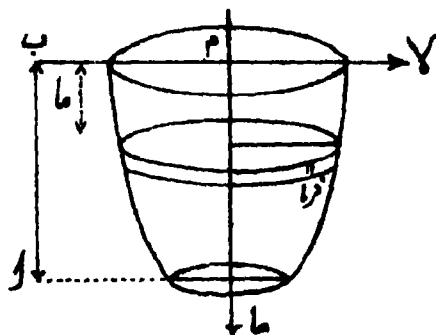
(۱) ایک دائری تراش کا افقی نل (قطر ۲ ص) پانی سے آدھا بھرا ہوا ہے۔ اس نل کو بند کرنے والے دروازہ پر پانی کا حاصل دباؤ دریافت کرو۔
[جواب = و/۳ ص^۳]

(۲) ایک ناقص کے نصف محور اعظم و اصغر کے طول علی الترتیب ۳ اور ۲ اکائیاں ہیں اس کے نیچے والے نصف حصہ پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرو جبکہ مائع کی سطح میں (ا) اعظم محور واقع ہے (ب) اقل محور واقع ہے۔
[جواب (ا) ۸ و، (ب) ۱۲ و]

(۳) ثابت کرو کہ مایع میں ڈوبی ہوئی کسی بھی انتصابی سطح کا حاصل مجموعی دباؤ = و س آ جس میں و = مایع کے اکائی حجم کا وزن ۔ س = سطح کا رقبہ اور آ = اس رقبہ کے ہندسی مرکز کا سطح مایع سے عمق ۔

**۴۔ کام** ۔ میکانیات میں بتایا گیا ہے کہ قوت اگر مستقل ہے تو اس سے جو کام وقوع میں آتا ہے ق ل کے مساوی ہے جس میں ق = قوت اور ل = فاصلہ جو قوت کے نقطۂ عمل کو قوت کی سمت میں طے کرنا پڑا۔ قوت جب متغیر ہوتی ہے تو کام کی تعیین کے لیے تکملی احصار استعمال کرنا ہوتا ہے ۔ یہاں اس کی دو مثالیں پیش کی جائینگی ۔

(ا) فرض کرو کہ ایک متغیر چوڑائی کے کھو کھلے برتن کو مایع سے خالی کرنا یا مایع سے بھرنا مقصود ہے شکل ۸۷ ایک گردشی پہلوؤں کا برتن ہے جس کی مختلف گہرائیوں پر عمودی تراش مختلف ہے ۔ اس لیے اس کو مایع سے

بھرنے یا خالی کرنے میں جو کام کیا جاتا ہے اس کی تعیین تکملی احصاء کے اساسی

شکل ۸۷

مسئلہ سے ہوجاتی ہے۔ چنانچہ اگر عمق ما پر عمودی تراش کا نصف قطر لا مانا جائے تو فرما موٹائی کا "مایع کا ایک اسطوانہ" برتن کی کھلی سطح تک اوپر کو اٹھانے کا عنصری کام فرک = و ما ۳ لا$^2$ فرما

اور برتن کو بالکلیہ خالی کرنے کا کام = و ۳ $\int_{ا}^{ب}$ ما لا$^2$ فرما

برتن کے پہلو جس منحنی کی شکل کے ہونگے اس کی مساوات کی مدد سے لا کو ما کی رقموں میں تعویض کرنے سے تکملہ کی قیمت دریافت ہوجاتی ہے۔

اس استدلال میں جو اصولی کلیہ پیش نظر رکھا گیا ہے۔

فرک = و ع فرح ............ (۱) ہے

جس میں فرح = عنصری حجم جو بلندی ع تک اوپر اٹھایا گیا ہے۔

اس رابطہ کے لحاظ سے جو بھی محدود سوال کے حل کرنے میں موزوں پائے جائیں استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

**توضیحی مثال**۔ ایک نصف کروی شکل کا برتن مایع سے بھرا ہے۔ اگر مایع کا وزن فی مکعب فٹ و پونڈ ہے اور نصف کرہ کا

قطر ۲ ص تو برتن کا سارا مایع اس کے اوپر کی سطح تک پمپ سے اوپر لے جانے کے لیے کتنا کام کرنا ہوگا ؟

حل ۔ یہاں حاصل مجموعی کام $= و \int^{ص} ما \, \pi \, لا^{2} \, فرما$ اور چونکہ برتن کی شکل نصف کروی ہے اس لیے $لا^{2} + ما^{2} = ص^{2}$

$$\text{پس کام} = و\,\pi \int^{ص} (ص^{2} - ما^{2})\, ما \, فرما = \frac{و\,\pi\, ص^{4}}{4} \text{ فٹ پونڈ}$$

(ب) اگر ایک اسطوانہ میں فشارہ کے ذریعہ ایک مقدار گیس بند کردی گئی ہے اور گیس کا حجم ح مکعب فٹ سے بدل کر ح مکعب فٹ ہوجاتا ہے تو گیس کے پھیلاؤ سے فشارہ پر جو کام کیا گیا اس کو معلوم کرنے کے لیے حسبِ ذیل ضابطہ استعمال کیا جاتا ہے :-

$$\text{کام ک} = \int_{ح}^{ح} د \, فرح \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(ب)}$$

جس میں د = دباؤ پونڈوں میں فی مربع فٹ اس لیے کہ اگر حجم ح سے بڑھ کر ح + فرح ہوجائے اور س = اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ ۔ تو گیس کے پھیلنے سے فشارہ فاصلہ $\frac{فرح}{س}$ فٹ آگے بڑھتا ہے اور اس پھیلاؤ کا باعث قوت د س ہے ۔

$$\text{پس عنصری کام} = د\,س \frac{فرح}{س} = د \, فرح$$

$$\text{اور اساسی مسئلہ کی رو سے حاصل مجموعی کام} = \int_{ح_{1}}^{ح_{2}} د \, فرح$$

د اور ح میں عام رابطہ $د\,ح^{ن} =$ مستقل ہے جس میں ن خود ایک مستقل ہے۔ اگر گیس کا پھیلاؤ ہم تپشی (isothermal) ہے تو مندرجۂ بالا ضابطہ میں ن = ۱ اور اگر حر ناگزار (adiabatic) ہے تو ن = ۱٫۴۱

اگر $د\,ح^{ن} =$ مستقل کی ترسیم کھینچی جائے یعنی دباؤ کو معین اور حجم کو فصلہ

تو اور دیگر حجم اور دباؤ کی تبدیلی مرتسم کی جائے تو اس طرح جو رقبہ حاصل ہوگا کئے ہوئے کام کو تعبیر کریگا۔

واضح ہے کہ ہم تپشی استحالوں میں د ح کی ترسیم قائم قطع زائد کی شکل کی ہوتی ہے۔

## ۵ ۔ قوتِ تجاذب

قوتِ تجاذب — اس فصل میں کلیۂ تجاذب (یعنے دو مادی ذرات کی کمیتیں اگر ک، ک۲ ہیں اور ان کے مابین فاصلہ ل تو ان کی باہمی کشش = ھ $\frac{ک_1 ک_2}{ل^2}$ جس میں م مستقل تجاذب ہے) کے اطلاق سے بعض خاص خاص ہندسی شکل کے اجسام کی تجاذبی قوتیں دریافت کی جائینگی۔ تجاذب کے عام مسائل مشکل ہوتے ہیں۔ یہاں ہم صرف ان ہی سے بحث کرینگے جو الجبرے تکمل کی مدد سے آسانی حل ہو جاتے ہیں۔

### (۱) یکساں طولی کثافت کی پتلی سلاخ کی کشش ایک بیرونی نقطہ پر۔

فرض کرو کہ سلاخ محور صا سے منطبق ہے اور محور کا کے نقطہ ا پر اکائی کمیت کا ایک ذرہ ہے (دیکھو شکل ۳۳)۔ ہم چاہتے ہیں کہ سلاخ کی ذرہ پر کیا کشش ہوگی معلوم کریں۔

اگر سلاخ کا طول م ب = ل مانا جائے اور اس کو کثیر التعداد چھوٹے چھوٹے مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو اس کی مجموعی کمیت ک = ثہ ل جس میں ثہ = سلاخ کی خطی کثافت یعنے اکائی طول کی کمیت۔

فرض کرو عمودی فاصلہ ا م = ا

سلاخ کے کسی عنصری ٹکڑے کی کشش ا پر $\frac{ھ\,د\,فر\,ا\,ثہ}{(ا^2 + فر^2)}$

اور اس کی سمت نقطۂ ا کو سلاخ کے اس خاص ٹکڑے سے ملانے والے خط

شکل ۵۸

ا ف کی سمت ہوگی۔

پس اس کشش کا جزوِ تحلیلی م لا کی سمت میں

$$= \frac{\text{مرثہ فرما}}{(\text{و}^2 + \text{ما}^2)} \text{ جم م ا ف } = \frac{\text{مرثہ و فرما}}{(\text{و}^2 + \text{ما}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اسی طرح اس کشش کا جزوِ تحلیلی م ما کی سمت میں

$$= \frac{\text{مرثہ فرما}}{(\text{و}^2 + \text{ما}^2)} \text{ جب م ا ف } = \frac{\text{مرثہ ما فرما}}{(\text{و}^2 + \text{ما}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

∴ اگر $\text{ق}_{\text{لا}}$ = حاصل مجموعی جزوِ تحلیلی تمام ٹکڑوں کی کششوں کا سمت م لا میں اور $\text{ق}_{\text{ما}}$ = حاصل مجموعی جزوِ تحلیلی سمت م ما میں تو

$$\text{ق}_1 = \text{مرشو}\int^{\text{ل}} \frac{\text{فرا}}{(\text{و}^2+\text{ا}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{اور} \quad \text{ق}_2 = \text{مرش}\int^{\text{ل}} \frac{\text{ا فرا}}{(\text{و}^2+\text{ا}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ان تکملوں کی تعیین کے لیے $\text{ا} = \text{و مس ط}$ لکھو تب اگر $\text{ع} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ل}}{\text{و}}$ تو

$$\text{ق}_1 = \frac{\text{مرش}}{\text{و}}\int^{\text{ع}} \text{جم ط فر ط} = \frac{\text{مرش}}{\text{و}}\,\text{جب ع} = \frac{\text{مرک}}{\text{ول}}\,\text{جب ع}$$

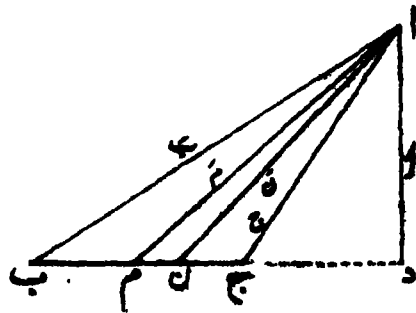
$$\text{اور} \quad \text{ق}_2 = \frac{\text{مرش}}{\text{و}}\int^{\text{ع}} \text{جب ط فر ط} = \frac{\text{مرش}}{\text{و}}(1-\text{جم ع}) = \frac{\text{مرک}}{\text{ول}}(1-\text{جم ع})$$

$$\text{اور حاصل مجموعی قوت ق} = \sqrt{(\text{ق}_1)^2+(\text{ق}_2)^2} = \frac{2\,\text{مرک}}{\text{ول}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{2}$$

$$\text{اور زاویہ ف} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1} = \text{مس}^{-1}\frac{1-\text{جم ع}}{\text{جب ع}} = \frac{\text{ع}}{2}.$$

اسی سوال کو کسی قدر زیادہ تعمیم کے ساتھ ایک اور طریقہ سے بھی حل کر سکتے ہیں جس میں احصاء کے ساتھ ہندسہ کا بھی تھوڑا سا جزو شامل ہے۔

شکل ۸۹ میں پتلی سلاخ ب ج ہے اور نقطہ جس پر اکائی کمیت رکھی گئی ہے ا ہے۔ ب ج پر ا سے جو عمود ا د گرایا گیا ہے سلاخ سے باہر واقع ہے۔

شکل ۸۹

ا کو مرکز اور ا د کو نصف قطر مان کر دائری قوس د ب کھینچو جو ا ب کو
بَ اور ا ج کو جَ پر قطع کرتی ہے اور ا م کو مَ اور ا ن کو نَ پر۔

تب جزو م ن کی کشش ا پر = $\frac{\text{ھ ثہ (م ن)}}{\text{(م ا)}^2}$

اور رقبہ ا م ن : ا مَ نَ = ل(م ن) : ل(مَ نَ)

لیکن رقبہ ا م ن : ا مَ نَ = $\text{(ا م)}^2 : \text{(ا مَ)}^2$ اس لیے کہ
زاویہ م ا ن بہت چھوٹا ہے۔

$\therefore$ م ن : مَ نَ = $\text{(ا م)}^2 : \text{(ا مَ)}^2$ یا $\frac{\text{م ن}}{\text{(م ا)}^2} = \frac{\text{مَ نَ}}{\text{(ا مَ)}^2} = \frac{\text{مَ نَ}}{\text{ل}^2}$

پس م ن کی کشش ا پر = $\frac{\text{ھ ثہ (مَ نَ)}}{\text{ل}^2}$

اگر قوس بَ جَ کو مادے سے یکساں لدا ہوا فرض کیا جائے اس طرح پر کہ اس کی خطی کثافت سلاخ کی خطی کثافت کے برابر ہو تو اس کی حاصل مجموعی کشش سلاخ کی حاصل مجموعی کشش کے مساوی ہوگی

قوس کی حاصل مجموعی کشش کی سمت زاویہ بَ ا جَ کی تنصیف کرتی ہے

فرض کرو زاویہ بَ ا جَ = عہ۔

تب قوس کے عنصر یا جزو ل فرطہ کی کشش، حاصل مجموعی کشش کی سمت سے زاویہ طہ میں $\frac{\text{ھ ثہ فرطہ}}{\text{ل}}$ ہے اس کشش کا جزو تحلیلی حاصل مجموعی کشش کی سمت میں $\frac{\text{ھ ثہ فرطہ}}{\text{ل}}$ جم طہ ہے

پس قوس کی حاصل مجموعی کشش یعنے سلاخ کی حاصل مجموعی کشش

$$\frac{\text{ھ ثہ}}{\text{ل}} \int_{-\frac{\text{عہ}}{2}}^{+\frac{\text{عہ}}{2}} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{2\,\text{ھ ثہ جب}\frac{\text{عہ}}{2}}{\text{ل}}\ \text{ہے} = \frac{2\,\text{ھ ک}}{\text{ل ل}}\ \text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{2}$$

(ب) یکساں سطحی کثافت کے دائری قرص کی کشش اس کے

محور ا م کے کسی نقطہ پر ــ

فرض کرو کہ قرص کی کثافت سطحی (یعنے کمیت فی اکائی رقبہ سطح) ثہ ہے، م اس کا مرکز ہے اور ل اس کا نصف قطر (شکل ۹۰) م کو مرکز ان کر دو متصل دائرے ص اور ص + فرص نصف قطر کے کھینچو۔ اس سے جو حلقہ بنتا ہے اس کی کمیت = ۲ ۲۲ ص فرص۔ م ا محور کے نقطہ ا پر قرص کی کشش مطلوب ہے۔ متذکرۂ بالا حلقہ کا ہر ذرہ ا سے فاصلہ $\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}$ پر واقع ہے۔ تشاکل سے واضح ہے کہ حلقہ کی حاصل مجموعی کشش محور ا م کی سمت میں ہے۔ پس حلقہ کی حاصل مجموعی کشش ا پر

شکل ۹۰

$$= \frac{\text{۲ ۲۲ ھ ثہ ص فرص}}{(\text{ط}^2 + \text{ص}^2)} \cdot \frac{\text{ط}}{(\text{ط}^2+\text{ص}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{۲ ۲۲ ھ ثہ ط ص فرص}}{(\text{ط}^2 + \text{ص}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

جس میں ط = ا م یعنے ا کا فاصلہ م سے

$$\therefore \text{پورے قرص کی کشش نقطہ ا پر} = \text{۲ ۲۲ ھ ثہ ط} \int_0^{\text{ل}} \frac{\text{ص فرص}}{(\text{ط}^2 + \text{ص}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \text{۲ ۲۲ ھ ثہ ط} \left[ \frac{1}{\text{ط}} - \frac{1}{(\text{ط}^2 + \text{ل}^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

اگر قرص کا نصف قطر ل نامتناہی بڑا ہوجائے تو ایک نامتناہی وسیع پرت بن جاتی ہے اور اس کی کشش ۲ ۲۲ ھ ثہ ہوجاتی ہے جو پرت کے فاصلہ کے غیر تابع ہے۔

(ج) یکساں کثافت کے کروی خول کی کشش ــ

کروی خول سے مراد ایسا مجسم ہے جو تقریباً مساوی قطر کے کروں سے محدود ہے۔
شکل ۹۱ میں کروی خول کا مرکز م ہے اور نقطۂ ا خول کے باہر واقع بتایا گیا ہے
مرکز سے اس کا فاصلہ = ط اور خول کا نصف قطر = ل'
ا م ب اور ا م ج زاویوں کے ا م کے گرد گھومنے سے جو حلقہ بنتا ہے
اس پر غور کرو۔ اگر ان زاویوں کو علی الترتیب طہ اور طہ + فرطہ سے تعبیر کیا جائے
تو ب د = ل جب طہ اور ب ج = ل فرطہ پس اس حلقہ کی کمیت
= ۲ π ل^۲ ث جب طہ فرطہ
تشاکل کے لحاظ سے حلقہ کی حاصل مجموعی کشش ا م کی سمت میں ہونی چاہیے۔ لیکن اس کے ہر ذرہ کی کشش اس ذرہ کو ا سے ملانے والے خط کی سمت میں ہوگی۔ چونکہ یہ سب ذرے ا سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں۔

شکل ۹۱

(یعنے سب ا ب کے مساوی ہیں)، ان کی کششوں کا جزو تحلیلی ا م کی سمت میں = ان کی کشش × جم ب ا م اور حلقہ کی حاصل مجموعی کشش

$$= \frac{۲ \pi ل^۲ ث جب طہ فرطہ}{(ا ب)^۲} \cdot \frac{ا د}{ا ب} \quad \left[ کیونکہ جم ب ا م = \frac{ا د}{ا ب} \right]$$

تبوع متغیر کو اب ما (= ا ب) قرار دو، تب

ما^۲ = (ا ب)^۲ = ط^۲ + ل^۲ − ۲ ل ط جم طہ ∴ ما فرما = ل ط جب طہ فرطہ

معہذا ا د = ط - ا جم طہ = $\frac{1}{2ط}$ (۲ ط$^2$ - ۲ ا ط جم طہ) = $\frac{1}{2ط}$ (ا$^2$ + ط$^2$ - ا$^2$)

طہ کی قیمت تعویض کرنے سے حلقہ کی حاصل مجموعی کشش $\frac{\pi ا ھ ث}{ط^2}$ (ا + $\frac{ط^2 - ا^2}{ا^2}$) فرا برآمد ہوتی ہے۔

پورے کروی خول کی کشش معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو حدود ا = ط - ا اور ا = ط + ا کے مابین تکمل کرنا چاہیے۔ اس کا نتیجہ ہے

$$\frac{\pi ا ھ ث}{ط^2} \int_{ط-ا}^{ط+ا} \left(ا + \frac{ط^2 - ا^2}{ا^2}\right) فرا = \frac{\pi ا ھ ث}{ط^2} \left(ا - \frac{ط^2 - ا^2}{ا}\right)_{ط-ا}^{ط+ا} = \frac{4\pi ا^2 ھ ث}{ط^2}$$

= $\frac{\text{خول کی کمیت}}{ط^2}$ ۔ یعنے کروی خول کی کسی بیرونی نقطے پر کشش بعینہٖ وہی ہے جو اس کی کمیت کو مرکز پر متمرکز تصور کرنے سے ہوتی ہے۔

اگر نقطۂ ا خول کے اندر واقع ہو تو تکمل کے حدود ا = ا - ط اور ا = ا + ط ہوتے ہیں اور ایسی صورت میں تکملہ کی قیمت صفر برآمد ہوتی ہے۔

# مثالیں

(۱) ل طول کی ایک پتلی سلاخ کے وسطی نقطہ سے سلاخ کی لمبائی کی سمت میں فاصلہ ط پر ایک ذرہ کہ کمیت کا واقع ہے اگر سلاخ کی کمیت ک ہے تو اس کی کشش ذرہ پر معلوم کرو۔

[جواب = $\frac{ک کہ}{ط (ط + ل)}$]

(۲) سابقہ سوال میں اگر ذرہ سلاخ کے عمودی منصف پر واقع ہو تو بتاؤ کہ سلاخ کی کشش $\frac{۲ کہ ک}{ط \sqrt{۴ ط^2 + ل^2}}$ ہوگی۔

(۳) ثابت کرو کہ بلندی ب، نصف قطر ص اور ث کثافت کے

قائم دائری اسطوانہ کی کشش ایک ایسے ذرہ پر جو اس کے محور پر سرے سے

ط فاصلہ پر $٢\pi$ مرثہ $\left\{ ب - \sqrt{(ط+ب)^2 + ص^2} + \sqrt{ط^2 + ص^2} \right\}$ ہے۔

(۴) اگر کسی قائم دائری مخروط کی بلندی ب، راسی زاویہ عہ اور کثافت ثہ ہو تو بتاؤ کہ اس کی حاصل مجموعی کشش اس کے راس پر رکھے ہوئے ذرہ پر $٢\pi$ مرثہ $\left(1 - جم \frac{عہ}{٢}\right)$ ب ہے۔

(۵) ایک گردشی مکافی نما کا قطعہ اس کے محور کے علی القوائم مستوی سے محدود ہے۔ اگر مستوی کا فاصلہ مکافی نما کے راس سے ط ہے تو اس کے ماسکہ پر رکھے ہوئے ذرہ پر اس کی کشش $٢\pi$ مرثہ ا لوک $\frac{ط + ا}{ا}$ ہے

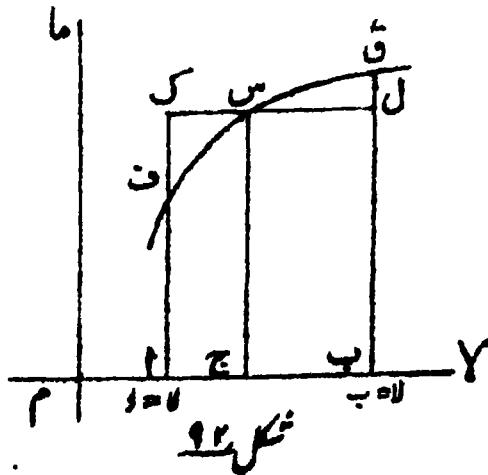
## ۸۱۔ کسی تفاعل کی اوسط قیمت

ن اعداد $ما_1، ما_2، \ldots\ldots ما_ن$ کا حسابی اوسط (یا ان کی اوسط قیمت) $\bar{ما} = \frac{1}{ن}(ما_1 + ما_2 + \ldots\ldots ما_ن)$

ہم اب تفاعل فہ (لا) کی اوسط قیمت لا = ا سے لے کر لا = ب تک کی تعیین کرنا چاہتے ہیں۔

شکل ۹۲ میں ف س ق کو اس تفاعل کی ترسیم فرض کرو۔

م ا = ا اور م ب = ب

شکل ۹۲

اب کو ن مساوی حصوں میں منقسم کرو جن میں سے ہر ایک مف لا کے مساوی ہے۔ اور ان نقاطِ تقسیم پر کے معینوں کو ما، ما ... ما ن سے تعبیر کرو۔ تب

آ = $\frac{1}{ن}$ (ما + ما + ..... ما ن ) مطلوبہ اوسط کی تقریبی قیمت ہوگی۔

علامت مساوات کے بائیں جانب کے شمار کنندہ اور نسب نما کو مف لا سے ضرب دو تو چونکہ ن مف لا = ب ـ و اس لیے

آ = $\frac{\text{ما مف لا + ما مف لا + ..... + ما ن مف لا}}{\text{ب ـ و}}$ (تقریباً) ......... (۱)

لیکن اس آخری مساوات میں شمار کنندہ رقبہ ا ف س ق ب کے تقریباً مساوی ہے۔

تفاعل ما = فہ (لا) کی اوسط قیمت کی تعریف یہ ہے کہ وہ مساوات (۱) کے بائیں جانب کے جملہ کی انتہا ہے جبکہ ن ← ∞ پس

آ = تفاعل فہ (لا) کی اوسط قیمت لا = و سے لا = ب تک

= $\frac{\int_{و}^{ب} \text{فہ (لا) فرلا}}{\text{ب ـ و}}$ ..... (۲)

شکل بالا میں فہ (لا) کی اوسط قیمت معین ج س کے مساوی ہے اگر مستطیل ا ب ل ک کا رقبہ شکل ا ب ق س ف کے رقبہ کے مساوی ہے۔

ما کو تفاعل یعنے تابع متغیر لکھنے سے مساوات (۲) ذیل کی صورت اختیار کر لیتی ہے۔

آ = $\frac{\int_{و}^{ب} \text{ما فرلا}}{\text{ب ـ و}}$ ........... (ب)

## توضیحی مثال ـ متبادل برقی رووں کے نظریہ میں

اکثر جب ۲ طہ کی اوسط قیمت ( ا بین حدود طہ = ۰ اور طہ = π ) معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ بتاؤ کہ یہ قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔

حل۔ اوسط قیمت = $\frac{\int_0^{\pi} جب^2 ط\, فر ط}{\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1 - جم 2 ط)\, فر ط$

$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}(1 - جم 2 ط)\, فر 2 ط = \frac{1}{4\pi}\Big[2 ط - جب 2 ط\Big]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi \frac{1}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$

# مثالیں

(۱) دائرہ $لا^2 + ما^2 = ص^2$ کے پہلے ربع کے معینوں کی اوسط قیمت دریافت کرو۔

(ا) جبکہ ما کو بطور تفاعل لا ظاہر کیا جاتا ہے [جواب = $\frac{1}{4}\pi$ ص]

اور (ب) جبکہ ما کو بطور تفاعل زاویہ ط ظاہر کیا جاتا ہے یعنے ما = ص جب ط

[جواب = $\frac{2 ص}{\pi}$]

(نوٹ۔ اس سے واضح ہے کہ ما کی دو بالکل مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جو متبوع متغیر پر موقوف ہیں جس کے لحاظ سے اوسط قیمت دریافت کی جاتی ہے۔)

ثابت کرو کہ

(۲) جب ط کی اوسط قیمت لا = ۰ اور لا = $\pi$ کے درمیان $\frac{2}{\pi}$ ہے۔

(۳) سادہ موسیقی حرکت میں (س = ا جم ن و جس میں س = طے شدہ فاصلہ ا اور ن = مستقل اعداد، و = وقت) اوسط توانائی بالفعل بلحاظ وقت ربع مدت دوران کے کسی ضعف کے لیے اعظم توانائی بالفعل کی نصف ہے۔

(۴) ل طول کی ایک پتلی سلاخ کی کثافت اگر لا کے لحاظ سے حسب ضابطہ $ث = ا + \frac{لا^2}{ل^2}$ تغیر پذیر ہے جس میں لا = سلاخ کا فاصلہ اس کے ایک سرے سے، تو اس کی اوسط کثافت = $ا + \frac{ل}{3}$

(۵) اوسط افقی پٹہ ایسے مرمی کا جو ایک اختیاری ارتفاع سے دی ہوئی رفتار کے ساتھ پھینکا جاتا ہے اعظم افقی پٹہ کا ۰۶۳۶۶ء ہے [اشارہ۔ پٹہ = $\frac{2 ر^2 جب ط\, جم ط}{ج}$ جس میں ر = رفتار، ج = جاذبہ ارض]

# سترھواں باب

## نامتناہی سلسلے

۱۔ جب کئی رقمیں ایک خاص قاعدے یا کلیہ کے تحت یکے بعد دیگرے ترتیب دی جاتی ہیں تو اس ترتیب کو تواتر کہتے ہیں۔

مثلاً $۱ ، \frac{۱}{۲} ، \frac{۱}{۴} ، \frac{۱}{۸} ، \frac{۱}{۱۶} ، \dots\dots$

یا $۱ ، - لا ، \frac{لا^{۲}}{۲} ، - \frac{لا^{۳}}{۳} ، \frac{لا^{۴}}{۴} ، - \frac{لا^{۵}}{۵} \dots\dots$

کسی تواتر کی رقموں کے مظہرہ مجموعہ کو سلسلہ کہتے ہیں۔

مثلاً $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots\dots$

$$۱ - لا + \frac{لا^{۲}}{۲} - \frac{لا^{۳}}{۳} + \frac{لا^{۴}}{۴} - \frac{لا^{۵}}{۵} + \dots\dots$$

اگر کسی سلسلہ کی رقموں کی تعداد محدود ہے تو سلسلہ محدود یا متناھی کہلاتا ہے اور اگر رقموں میں تعداد محدود نہیں ہے تو نامتناھی کہلاتا ہے۔

سلسلہ کی عام یا ن۔ ویں رقم ایک ایسا جملہ ہے جس میں اس سلسلہ کی مختلف رقموں کی تیاری کا قاعدہ مضمر ہے۔

پہلے سلسلہ کی ن۔ویں رقم $\frac{۱}{۲^{ن}}$ ہے اور دوسرے سلسلہ کی (باستثناء ن=۱

$\frac{(-لا)^{ن-۱}}{ن-۱}$ ہے۔

پہلا سلسلہ ہندسی سلسلہ کی ایک خاص مثال ہے جس کی ن رقموں کا حاصل مجموعہ ہے:

$س_ن = ا + ار + ار^۲ + ار^۳ + \dots + ار^{ن-۱} \qquad \dots\dots (۱)$

جس کی قیمت (جیسا کہ جبر و مقابلہ کی ابتدائی کتابوں میں بتایا گیا ہے)

$$س_ن = \frac{ا(۱-ر^ن)}{۱-ر} \quad \text{یا} \quad \frac{ا(ر^ن-۱)}{ر-۱} \quad \text{ہے}$$

پہلا جملہ اس صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $|ر| < ۱$ اور دوسرا جبکہ $|ر| > ۱$

پہلی صورت میں واضح ہے کہ $\lim_{ن\to\infty} (ر^ن) = ۰$ اور $\therefore \lim_{ن\to\infty} س_ن = \frac{ا}{۱-ر}$

پس اگر $|ر| < ۱$ تو ایک ہندسی سلسلہ کا حاصل مجموعہ $س_ن$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے جیسے جیسے کہ سلسلہ کی رقموں کی تعداد نا متناہی بڑھتی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں سلسلہ مستدق کہلاتا ہے۔

اگر $|ر| > ۱$ تو ن کے لاانتہا بڑھنے سے $ر^ن$ نا متناہی ہو جاتا ہے۔ اور حاصل مجموعہ $س_ن$ لاانتہا بن جاتا ہے۔ ایسی صورت میں سلسلہ متسع کہلاتا ہے۔

اگر $ر = -۱$ تو سلسلہ $ا - ا + ا - ا + ا - ا \dots\dots$ ہو جاتا ہے۔ جس میں اگر ن جفت عدد ہے تو حاصل مجموعہ صفر ہے اور اگر ن طاق عدد ہے تو حاصل مجموعہ ا ہے۔ ن جیسے جیسے بلا انتہا بڑھتا ہے تو حاصل مجموعہ نہ تو نا متناہی ہوتا اور نہ کسی حد یا انتہا کو پہنچتا ہے۔ ایسے سلسلہ کو اہتزازی کہتے ہیں۔

**۲۔ مستدق و متسع سلسلے** ۔ سلسلہ

$$س_ن = ک_۱ + ک_۲ + ک_۳ + \dots\dots + ک_ن .$$

میں متغیر $س_ن$ ایک تفاعل ہے ن کا - اب اگر سلسلہ کے رقوم کی تعداد (= ن) بلا انتہا بڑھ جائے تو ذیل کی دو صورتوں میں سے ایک صورت پیدا ہوتی ہے:

**صورت (۱)** $س_ن$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے (بالفرض د) جس کو ہم لکھتے ہیں

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} س_ن = د \qquad (۱)$$

اس صورت میں یہ نا متناہی سلسلہ مستدق کہلاتا ہے اور قیمت د کو پہنچتا ہے -

**صورت (۲)** $س_ن$ کسی انتہا کو نہیں پہنچتا - ایسے نا متناہی سلسلہ کو متسع کہتے ہیں - مثلاً

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \cdots$$

یہ پہچاننے کے لیے کہ آیا کوئی سلسلہ مستدق ہے یا متسع ذیل میں چند علم مسئلے بلا ثبوت درج کیے جاتے ہیں :—

**مسئلہ (۱)** اگر $س_ن$ ایک ایسا متغیر ہے جو ن کے بڑھنے سے ہمیشہ بڑھتا ہے لیکن کبھی کسی معین محدود عدد ا سے زیادہ نہیں ہوتا تو ن جیسے جیسے بلا انتہا بڑھتا ہے $س_ن$ ایک ایسی انتہاء کو پہنچیگا جو ا سے زیادہ نہیں ہے -

**توضیحی مثال** - ثابت کرو کہ نا متناہی سلسلہ

$$۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \cdots + \frac{۱}{\lfloor ن} + \cdots \qquad (۲)$$ مستدق ہے -

**حل۔** اس سلسلہ کی پہلی رقم کو نظر انداز کرکے اس کو $س_ن$ سے تعبیر کرو اس کا مقابلہ سلسلہ

$$\bar{س}_ن = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$$ سے کرو۔

فوراً معلوم ہوجائیگا کہ $س_ن < \bar{س}_ن$ کیونکہ $\frac{۱}{\lfloor ۳} = \frac{۱}{۳\times ۲} < \frac{۱}{۲\times ۲}$

اس طرح $\frac{۱}{\lfloor ۴} < \frac{۱}{۲\times ۲\times ۲}$ وغیرہ

معہذا $\bar{س}_ن$ ایک ہندسی سلسلہ ہے جس میں $ر = \frac{۱}{۲}$ پس $\bar{س}_ن < ۲$ بلالحاظ اس کے کہ ن کتنا ہی بڑا ہوجائے۔

پس $س_ن$ ایسا متغیر ہے جو ن کے بڑھنے سے ہمیشہ بڑھتا ہے لیکن ۲ سے کم رہتا ہے۔ اس لیے وہ ن کے بلا انتہا بڑھنے سے ایک انتہا کو پہنچتا ہے جو ۲ سے کمتر ہے بدیں وجہ سلسلہ (۲) مستدق ہے اور اس کی قیمت ۳ سے کم ہے۔

طالب علم نے پہچان لیا ہوگا کہ سلسلہ (۲) مستقل ہو = ۲٫۷۱۸۲۸.... ہے جو طبعی لوکارثموں کا اساس ہے

**مسئلہ (۲)** اگر $س_ن$ ایسا متغیر ہے کہ وہ گھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے ن بڑھتا ہے اور کبھی بھی ایک معین محدود عدد ب سے کمتر نہیں ہوتا ہے تو جیسے جیسے ن بلا انتہا بڑھتا ہے $س_ن$ ایک ایسی انتہا کو پہنچیگا جو ب سے کمتر نہیں ہے۔

**مسئلہ (۳)** سلسلہ $س_ن = ک_۱ + ک_۲ + ک_۳ + \cdots + ک_ن$ میں جیسے جیسے ن نامتناہی ہوتا جاتا ہے $س_ن$ ایک انتہا کو پہنچنے کے لیے لازمی اور کافی شرطیہ ہے کہ

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \left(\text{س}_{\text{ن}+\text{ف}} - \text{س}_{\text{ن}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{ا})$$

صحیح عداد ف کی جملہ قیمتوں کے لیے

اگر مسئلہ (۳) میں ف = ۱ لکھا جائے تو شرط یہ ہوجاتی ہے کہ

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \left(\text{ی}_{\text{ن}+1}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{ب})$$

جو مرادف ہے اس کے کہ

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \left(\text{ی}_{\text{ن}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{ج})$$

لیکن یہ شرط لازمی ہوگی کافی نہیں ۔ یعنی اگر کسی سلسلہ کی عام یا ن۔ ویں رقم ن کے بلا انتہا بڑھ جانے سے صفر کو نہیں پہنچتی ہے تو ہم فوراً پہچان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متسع ہے۔ لیکن اگر ن۔ ویں رقم صفر کو پہنچ جائے تو قطعی طور پر نہیں کہا جا سکتا کہ سلسلہ متدق ہے۔ مثلاً موسیقی سلسلہ

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{\text{ن}}$ پر غور کیا جائے۔

اس میں $\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} (\text{ی}_{\text{ن}}) = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \left(\frac{1}{\text{ن}}\right) = 0$ یعنے شرط (ج) کی تکمیل ہوتی ہے لیکن ہم آئندہ فصل میں بتائینگے کہ یہ سلسلہ متسع ہے۔

یہ معلوم کرنے کے لیے کہ آیا سلسلہ متدق ہے یا متسع ہم اب چند خاص خاص آزمائش کے طریقے بیان کرینگے جو متذکرہ بالا مسئلوں سے آسان تر ہیں۔

## ۳۔ مقابلہ کے ذریعہ آزمائش

استدقاق کا امتحان۔ فرض کرو کہ

$$\text{ی}_1 + \text{ی}_2 + \text{ی}_3 + \text{ی}_4 + \ldots\ldots \quad (1)$$

مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے جس کے استدقاق کا امتحان مطلوب ہے۔

اگر مثبت رقموں کا ایک ایسا سلسلہ جس کے مستدق ہونے کا پہلے ہی سے علم ہے۔ یعنے

$$ل_1 + ل_2 + ل_3 + ل_4 + \cdots \qquad (۲)$$

دریافت ہو سکتا ہے جس کی رقمیں سلسلہ (۱) کی متناظر رقموں سے کبھی بھی کمتر نہیں ہیں، تو سلسلہ (۱) مستدق ہے اور اس کی قیمت سلسلہ (۲) کی قیمت سے زائد نہیں ہے۔

**ثبوت۔** فرض کرو $س_ن = ر_1 + ر_2 + ر_3 + \cdots + ر_ن$

اور $سَ_ن = ل_1 + ل_2 + ل_3 + \cdots + ل_ن$

اور $\lim_{ن \to \infty} س_ن = ا$ تو چونکہ $سَ_ن < ا$ اور $س_ن \leqq سَ_ن$

اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ $س_ن < ا$۔ پس عـلـ کے مسئلہ (۱) سے $س_ن$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے اور سلسلہ (۱) مستدق ہے اور اس کی قیمت ا سے زائد نہیں ہے۔

**توضیحی مثال (ا)** دریافت کرو کہ آیا سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots$$ مستدق ہے۔

**حل۔** اس کا مقابلہ ہندسی سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$ سے کرو جس کا مستدق ہونا معلوم ہے۔ سلسلہ زیر امتحان کی رقمیں کبھی بھی اس ہندسی سلسلہ کی متناظر رقموں سے کمتر نہیں ہیں۔ پس وہ بھی مستدق ہے۔

اسی طرح اتساع کا بھی امتحان کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ

فرض کرو $ک_1 + ک_2 + ک_3 + ک_4 + \cdots \qquad (۳)$

مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے جس کے اتساع کا امتحان مطلوب ہے - اگر

$$ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + ب_۴ + \cdots \qquad (۴)$$

مثبت رقموں کا ایک ایسا سلسلہ ہے جس کے اتساع کا پہلے ہی سے علم ہے اور سلسلہ (۳) کی رقمیں کبھی بھی سلسلۂ (۴) کی متناظر رقموں سے کمتر نہیں ہیں تو سلسلہ (۳) متسع ہے -

**توضیحی مثال (ب)** مقابلہ کے ذریعے بتاؤ کہ موسیقی سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \cdots \cdots$$ متسع ہے -

**حل** - یہ سلسلہ مقابلہ کی سہولت کی خاطر ذیل کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے:

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \left[\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}\right] + \left[\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸}\right] + \left[\frac{۱}{۹} + \cdots + \frac{۱}{۱۶}\right] + \cdots\cdots$$

اس کا مقابلہ سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \left[\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}\right] + \left[\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}\right] + \left[\frac{۱}{۱۶} + \cdots\cdots + \frac{۱}{۱۶}\right] + \cdots\cdots$$

سے کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ پہلے سلسلہ کی رقمیں دوسرے سلسلہ کی متناظر رقموں سے کبھی بھی کمتر نہیں ہیں - جس کی قوسین کے اندر کی رقموں کا حاصل جمع ہمیشہ $\frac{۱}{۲}$ ہے - واضح ہے کہ آخرالذکر سلسلہ کی قیمت رقموں کی تعداد کے بڑھنے سے بلا انتہا بڑھتا چلا جاتا ہے - اس لیے پہلا یعنی موسیقی سلسلہ بھی متسع ہے -

**ک - سلسلہ یعنی**

$$۱ + \frac{۱}{۲^ک} + \frac{۱}{۳^ک} + \frac{۱}{۴^ک} + \cdots \qquad (۵)$$ کے استدقاق و اتساع کے شرائط

جب ک > ۱ تو اس سلسلہ کی رقموں کو (پہلی رقم چھوڑ کر) حسب ذیل ترتیب میں جمع کرنے سے

$$\frac{۱}{۲^ک} + \frac{۱}{۳^ک} < \frac{۱}{۲^ک} + \frac{۱}{۲^ک} = \frac{۲}{۲^ک} = \frac{۱}{۲^{ک-۱}}$$

$$\frac{1}{4^{\text{ک}}}+\frac{1}{5^{\text{ک}}}+\frac{1}{6^{\text{ک}}}+\frac{1}{7^{\text{ک}}}<\frac{1}{4^{\text{ک}}}+\frac{1}{4^{\text{ک}}}+\frac{1}{4^{\text{ک}}}+\frac{1}{4^{\text{ک}}}=\frac{4}{4^{\text{ک}}}=\left(\frac{1}{2^{\text{ک}-1}}\right)^{2}$$

$$\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{9^{\text{ک}}}+\frac{1}{10^{\text{ک}}}+\cdots+\frac{1}{15^{\text{ک}}}<\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{8^{\text{ک}}}+\frac{1}{8^{\text{ک}}}=\frac{8}{8^{\text{ک}}}=\left(\frac{1}{2^{\text{ک}-1}}\right)^{3}$$

اسی طرح دوسری رقموں کے لیے بھی ایسا لکھا جاسکتا ہے ۔ اب ذیل کے سلسلہ پر غور کیا جائے :

$$1+\frac{1}{2^{\text{ک}-1}}+\left(\frac{1}{2^{\text{ک}-1}}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2^{\text{ک}-1}}\right)^{3}+\cdots\cdots \quad (6)$$

جب ک > ۱ تو سلسلہ (٦) ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی مشترک نسبت اکائی سے کمتر ہے اس لیے یہ سلسلہ متدق ہے ۔ پس سلسلہ (۵) بھی متدق ہے ۔
جب ک = ۱ تو سلسلہ (۵) موسیقی ہو جاتا ہے جو ہم نے دیکھا متسع ہے ۔
جب ک < ۱ تو پہلی رقم کو چھوڑ کر دیکھیں تو اس کی رقمیں موسیقی سلسلے کی متناظر رقموں سے زیادہ قیمت کی ہونگی ۔ پس ایسی صورت میں سلسلہ (۵) متسع ہوگا ۔

# مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\cdots$ متدق ہے ۔

(۲) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ متسع ہے ۔

(۳) $\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5}+\frac{6}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$ متدق ہے

نوٹ : { ۲۰۳۰۴ سے مراد ۲ مضروب ۳ مضروب ۴ }

(۴) $\frac{1}{۲} + \frac{1}{۲\sqrt{۲}} + \frac{1}{۲\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{1}{۲\sqrt{ن}} + \cdots$ متبع ہے۔

(۵) $\frac{1}{۲-۳} + \frac{1}{۲-۹} + \frac{1}{۲-۲۷} + \cdots + \frac{1}{۲-۳^{ن}} + \cdots$ متدق ہے۔

(۶) $\frac{۳}{۲\cdot۳} + \frac{۶}{۳\cdot۴} + \frac{۹}{۴\cdot۵} + \cdots + \frac{۳ن}{(ن+۱)(ن+۲)} + \cdots$ متبع ہے۔

## ۴۔ کاوشی (cauchy) کا امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمائش کا طریقہ — لامتناہی ہندسی سلسلہ

$ا + ار + ار^{۲} + \cdots\cdots + ار^{ن} + ار^{ن+۱} + \cdots$

میں دو متصل عام رقموں $ار^{ن}$ اور $ار^{ن+۱}$ کی نسبت مشترک نسبت ر ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ یہ سلسلہ متدق ہے جبکہ $|ر| < ۱$ اور دوسری قیمتوں کے لیے متبع ہے۔ اب ہم ایک ایسے امتحان کی تفہیم کرینگے جس کا اطلاق ہر سلسلہ پر ہو سکتا ہے۔

**مسئلہ ۱۸** - فرض کرو $ک_۱ + ک_۲ + ک_۳ + \cdots + ک_ن + ک_{ن+۱} + \cdots$ (۱)

مثبت رقموں کا ایک لامتناہی سلسلہ ہے۔ اس کی دو عام متصل رقموں کی نسبت $\frac{ک_{ن+۱}}{ک_ن}$ امتحانی نسبت کہلاتی ہے۔ اس کی انتہا جبکہ ن لاتناہی کو پہنچ جاتا ہے

$$ر = \lim_{ن\to\infty} \frac{ک_{ن+۱}}{ک_ن} \text{ ہے}$$

ہم بتائینگے کہ (۱) جب $ر < ۱$ تو سلسلہ متدق ہے

(۲) جب $ر > ۱$ تو سلسلہ متبع ہے

اور (۳) جب $ر = ۱$ تو امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمائش ناکامیاب

ثابت ہوتی ہے۔

**ثبوت۔ صورت (۱)** جب $ر_۱ < ۱$۔ انتہا کی تعریف کی مدد سے ہم ن کو اتنا بڑا عدد منتخب کر سکتے ہیں (بالفرض ن = م) کہ جب $ن \geq م$ تو نسبت $\frac{د_{ن+۱}}{د_ن}$ ہمارے حسب مرضی $ر_۱$ سے جس قدر کم مختلف ہونا چاہیں مختلف ہوگی۔ اور اس لیے ایک کسر واجب ر سے کمتر ہوگی۔ پس

$$د_{م+۱} < د_م ر، \quad د_{م+۲} < د_{م+۱} ر < د_م ر^۲، \quad د_{م+۳} < د_م ر^۳ \quad \text{وغیرہ}$$

اس لیے رقم $د_م$ کے بعد سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم ذیل کے ہندسی سلسلہ کی متناظر رقم سے کمتر ہے:

$$د_م ر + د_م ر^۲ + د_م ر^۳ + \cdots \qquad (۲)$$

لیکن چونکہ $ر < ۱$ سلسلہ (۲) اور اس لیے سلسلہ (۱) بھی مستدق ہے' از روئے ۳ (یعنے از روئے آزمایش بذریعہ مقابلہ)

**صورت (۲)** جب $ر_۱ > ۱$ تو استدلال مندرجہ صورت (۱) ہی سے بتایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ (۱) متسع ہے۔

**صورت (۳)** جب $ر_۱ = ۱$ تو سلسلہ یا مستدق ہوگا یا متسع بالفاظ دیگر آزمایش ناکامیاب ثابت ہوتی ہے۔

مثلاً ک۔ سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲^ک} + \frac{۱}{۳^ک} + \frac{۱}{۴^ک} + \cdots + \frac{۱}{ن^ک} + \frac{۱}{(ن+۱)^ک}$ پر غور کرو۔

اس میں امتحانی نسبت $\frac{د_{ن+۱}}{د_ن} = \left(\frac{ن}{ن+۱}\right)^ک = \left(۱ - \frac{۱}{ن+۱}\right)^ک$

اور $نہا_{ن \to \infty} \left(\frac{د_{ن+۱}}{د_ن}\right) = نہا_{ن \to \infty} \left(۱ - \frac{۱}{ن+۱}\right)^ک = (۱)^ک = ۱ \; (= ر_۱)$

پس $ر_۱ = ۱$ بلا لحاظ قیمت ک۔ لیکن مسئلہ میں ہم نے بتا دیا ہے کہ

جب $ک < ۱$ تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے

اور جب $ک \geqslant ۱$ تو سلسلہ متسع ہوتا ہے

جس سے ظاہر ہے کہ اس کی قیمت اکائی کے مساوی ہو سکتی ہے۔ مستدق سلسلوں کے لیے بھی اور متسع سلسلوں کے لیے۔ یعنے ایسی صورت میں امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمایش ناکامیاب ہو جاتی ہے۔ ایسی صورتوں میں دوسرے آزمائشی طریقے استعمال ہوتے ہیں۔ جو اس کتاب کے نصاب سے باہر ہیں۔

یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ کسی سلسلہ کے استدقاق کے لیے نسبت $\frac{ک_{ن+۱}}{ک_ن}$ کا ن کی ہر قیمت کے لیے اکائی سے کمتر ہونا اور کمتر رہنا کافی نہیں ہے۔ شرط یہ ہے

کہ $\underset{ن \to \infty}{نہا} \frac{ک_{ن+۱}}{ک_ن}$ اکائی سے کمتر ہو۔

کسی سلسلہ کے استدقاق کا جب امتحان کیا جاتا ہے تو (جیسا کہ چند ایک مرتبہ کیا گیا ہے) ہم مجاز ہیں کہ سلسلہ کی رقموں کی ایک محدود تعداد کو نظر انداز کر دیں۔ اس سے سلسلہ کی قیمت متاثر ہوگی لیکن سلسلہ کی انتہا کے وجود پر اس کا کوئی اثر نہ ہوگا۔

**۵۔ متبادل سلسلے**۔ جس سلسلہ کی رقمیں متبادلاً (یعنی یکے بعد دیگرے) مثبت اور منفی ہوتی ہیں متبادل کہلاتا ہے۔ ایسے سلسلوں سے بکثرت سابقہ پڑتا ہے۔

**مسئلہ** اگر $ک_۱ - ک_۲ + ک_۳ - ک_۴ + \ldots$ ایک متبادل سلسلہ ہے جس کی ہر رقم اس سے پیشتر کی رقم سے عدداً کمتر ہوتی ہے اور اگر

$\underset{ن \to \infty}{نہا} ک_ن = ۰$ تو وہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

**ثبوت**۔ جب ن ایک جفت عدد ہے تو سلسلہ کا حاصل جمع $س_ن$

ذیل کی دو شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے :۔

$$(۱) \quad س_ن = (ک_۱ - ک_۲) + (ک_۳ - ک_۴) + \cdots\cdots + (ک_{ن-۱} - ک_ن)$$

$$(۲) \quad س_ن = ک_۱ - (ک_۲ - ک_۳) - \cdots - (ک_{ن-۲} - ک_{ن-۱}) - ک_ن$$

قوسین میں جو جملے لکھے گئے ہیں ان میں سے ہر ایک مثبت ہے پس جبکہ ن جفت قیمتوں میں سے بڑھتا جاتا ہے تو (۱) سے ظاہر ہے کہ $س_ن$ بڑھتا ہے اور (۲) بتاتا ہے کہ $س_ن$ ہمیشہ $ک_۱$ سے کمتر ہے۔ پس ؏ کے مسئلہ (۱) سے $س_ن$ ایک انتہا ل کو پہنچتا ہے۔ لیکن $س_{ن+۱}$ بھی اس انتہا کو پہنچتا ہے اس لیے کہ $س_{ن+۱} = س_ن + ک_{ن+۱}$ اور $نہا\ ک_{ن+۱} = ۰$ پس جب کہ ن تمام صحیح عددی قیمتوں میں سے بڑھتا ہے تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

**توضیحی مثال**۔ متبادل سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots\cdots$ کے استدقاق کا امتحان کرو۔

**حل**۔ چونکہ سلسلہ کی ہر رقم عددی قیمت کے لحاظ سے اس سے پیشتر آنے والی رقم سے کمتر ہے اور

$$\underset{ن \to \infty}{نہا} (ک_ن) = \underset{ن \to \infty}{نہا} \left(\frac{۱}{ن}\right) = ۰$$ اس لیے یہ سلسلہ مستدق ہے۔

اس ثبوت سے ذیل کا اہم نتیجہ قابلِ یادداشت ہے:

ایک مستدق متبادل سلسلہ کو کسی رقم کے بعد ختم کر دینے سے جو خطا واقع ہوتی ہے سلسلہ کی متروکہ رقموں میں سے سب سے پہلی رقم کی قیمت سے عدداً زائد نہیں ہوتی۔

**؏۶۔ مطلق استدقاق** — جب کسی سلسلہ کی تمام رقمیں مثبت بنا دینے پر بھی وہ مستدق ہوتا ہے تو مطلق یا غیر مشروط مستدق کہلاتا ہے۔ اس کے خلاف دوسرے سلسلے مشروط مستدق

کہلاتے ہیں۔

مثلاً $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots$ مطلق مستدق ہے اس لیے کہ

۳ کی توضیحی مثال (و)

یعنے $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$ مستدق ہے۔

متبادل سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ مشروط مستدق ہے

اس لیے کہ

موسیقی سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ متسع ہے۔

پس واضح ہے کہ ایسا سلسلہ جو بعض مثبت اور بعض منفی رقموں پر مشتمل ہے مستدق ہے اگر اس کی تمام علامتوں کو مثبت میں تبدیل کرنے سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے مستدق ہے۔

# مثالیں

مندرجۂ ذیل سلسلوں کے مستدق یا متسع ہونے کا امتحان کرو:-

(۱) $1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \dots$ [جواب ر = ۰ اس لیے سلسلہ مستدق ہے]

(۲) $\frac{\lfloor 1}{10} + \frac{\lfloor 2}{10^2} + \frac{\lfloor 3}{10^3} + \dots\dots$ [جواب ر = ∞ اس لیے سلسلہ متسع ہے]

(۳) $\frac{1}{2\cdot1} + \frac{1}{4\cdot3} + \frac{1}{6\cdot5} + \dots$ جس میں ۲۰۱ = ۱ مضروب ۲ وغیرہ

[اشارۃً ر = ۱ اس لیے امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمایش ناکامیاب ہے

لیکن چونکہ ک۔ سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۴^۲} + ......$ مستدق ہے اور سلسلہ زیر امتحان کی ہر رقم اس ک۔ سلسلہ کی متناظر رقم سے کمتر ہے اس لیے وہ بھی مستدق ہے]

(۴) $\frac{۲}{۱} + \frac{۲^۲}{۲} + \frac{۲^۳}{۳} + ...... + \frac{۲^ن}{ن} + ......$ [جواب = متسع

(۵) $\frac{\underline{|۱}}{۳} + \frac{\underline{|۲}}{۳ \cdot ۵} + \frac{\underline{|۳}}{۳ \cdot ۵ \cdot ۷} + ...... + \frac{\underline{|ن}}{۳ \cdot ۵ \cdot ۷ ...... (۲ن + ۱)} + ....$ [جواب = مستدق]

(۶) $\frac{۱}{لوک ۲} - \frac{۱}{لوک ۳} + \frac{۱}{لوک ۴} - \frac{۱}{لوک ۵} + ......$ [جواب = مستدق]

## ت۔ قوتی سلسلہ (Power Series)

ایسا سلسلہ جس کی رقمیں یک رقمی اور کسی متغیر مثلاً لا کی صعودی صحیح عددی قوتوں پر مشتمل ہوں جیسے

$$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳ + ...... \quad (۱)$$

جس میں سر $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ ...... متغیر لا کے غیر تابع ہوں لا کا قوتی سلسلہ کہلاتا ہے۔ احصاریں ایسے سلسلوں کی بڑی اہمیت ہے۔ لا کا قوتی سلسلہ لا کی جملہ قیمتوں کے لیے مستدق ہو سکتا ہے یا کسی قیمت کے لیے نہیں بجز لا = ۰ یا وہ لا کی چند قیمتوں کے لیے جو صفر سے مختلف ہیں مستدق ہو سکتا ہے اور دوسری قیمتوں کے لیے متسع ہم سلسلہ (۱) کا صرف اس صورت میں امتحان کرینگے جبکہ اس کے سر ایسے ہیں کہ

$$\underset{ن \to \infty}{نہا} \left( \frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن} \right) = ل$$

جس میں ل ایک معین عدد ہے۔ اس کی وجہ معلوم کرنے کے لیے سلسلہ مندرجۂ بالا یعنے (۱) کی پہلی رقم کو چھوڑ کر کاوشی کی امتحانی نسبت

(مصرحہ مسئلہ) پر تیار کرو۔

تب $\frac{ک_{ن+1}}{ک_ن} = \frac{ا_{ن+1}\,لا^{ن+1}}{ا_ن\,لا^ن} = \frac{ا_{ن+1}}{ا_ن}\,لا$

پس لا کی کس معین قیمت کے لیے

$$ر = \lim_{ن \to \infty}\left(\frac{ا_{ن+1}}{ا_ن}\,لا\right) = لا \lim_{ن\to\infty}\left(\frac{ا_{ن+1}}{ا_ن}\right) = لا\,ل$$

اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

**صورت** (۱) اگر ل = ۰ تو سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوگا اس لیے کہ ر = ۰۔

**صورت** (۲) اگر ل صفر نہیں ہے تو سلسلہ مستدق ہوگا جبکہ لا ل (= ر) اکائی سے عدداً کمتر ہے۔ یعنے

لا وقفہ ( interval: $-\frac{1}{ل} < لا < \frac{1}{ل}$ ) میں واقع ہے

اور لا کی اس وقفہ سے باہر والی قیمتوں کے لیے متسع ہوگا۔

اس وقفۂ استدقاق کے سروں کے نقطوں کا علاوہ طور پر امتحان کیا جانا چاہیے۔ کسی دیے ہوئے سلسلہ کے لیے امتحانی نسبت تیار کرلی جانی چاہیے اور ع۳ کے ذریعہ وقفۂ استدقاق کی تعیین

**توضیحی مثال**۔ سلسلہ $لا + \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{3} + \frac{لا^4}{4} + \cdots\cdots$ کے وقفۂ استدقاق کی تعیین کرو۔

**حل**۔ امتحانی نسبت $= \frac{لا^{ن+1}}{ن+1} \cdot \frac{ن}{لا^ن} = \frac{ن}{ن+1}\,لا$

اور $\lim_{ن\to\infty}\left|\frac{ن}{ن+1}\,لا\right| = \lim_{ن\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{ن}}\,لا\right| = |لا|$

پس سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ $|لا| < 1$ اور متسع جبکہ $|لا| > 1$۔ سلسلہ کا

رجحان نہیں معلوم ہوسکتا جبکہ $|\text{لا}| = 1$، اس لیے کہ ایسی صورت میں استحانی نسبت سے کوئی مدد نہیں ملتی۔ پس سلسلہ میں لا = ۱ تعویض کرکے جب اس کا معائنہ کرتے ہیں تو

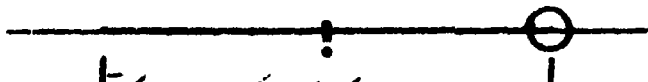
موسیقی سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ دستیاب ہوتا ہے جو ۳ کی توضیحی مثال (ب) میں متسع دریافت ہوا۔

اب لا = -۱ لکھنے سے - $\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right]$ حاصل ہوتا ہے۔

یہ سلسلہ متبادل ہے، اس کی ہر رقم اس کی سابقہ رقم سے عدداً کمتر ہے اور ن ۔ویں رقم کی انتہا جبکہ $\text{ن} \to \infty$ صفر ہے۔ پس از روئے ۵ وہ مستدق ہے۔ سلسلہ کا وقفۂ استدقاق اب مکمل معلوم ہوگیا۔ اس کو یا تو بذریعہ

$$-1 \leqslant \text{لا} < 1$$

ظاہر کیا جاسکتا ہے، یا ذیل کی ترسیم کے موٹے خط سے۔

-۱　　　۰　　　۱

واضح ہو کہ اس ترسیم میں نقطہ لا = ۱ کے گرد ایک دائرہ کھینچا گیا ہے تاکہ یہ بتلائے کہ قیمت ۱ وقفۂ استدقاق سے خارج ہے۔

# مثالیں

مندرجۂ ذیل سلسلے متغیر کی کن قیمتوں کے لیے مستدق ہیں دریافت کرو۔

(۱) $\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2^2} + \frac{\text{لا}^3}{3^2} - \frac{\text{لا}^4}{4^2} + \dots$ [جواب - $-1 \leqslant \text{لا} \leqslant 1$ ترسیماً -۱ ۰ +۱]

(۲) $\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \dots$ [جواب - $-1 < \text{لا} \leqslant 1$ -۱ ۰ +۱]

(۳) $لا + لا^۲ + لا^۹ + لا^{۱۶} + \ldots\ldots$ [جواب ۔$۱ < لا < ۱$ ]

(۴) $۱ - \frac{لا^۲}{\lfloor ۲} + \frac{لا^۴}{\lfloor ۴} - \frac{لا^۶}{\lfloor ۶} + \ldots\ldots$ [جواب لا کی تمام قیمتوں کے لیے]

(۵) $لا - \frac{لا^۳}{\lfloor ۳} + \frac{لا^۵}{\lfloor ۵} - \frac{لا^۷}{\lfloor ۷} + \ldots\ldots$ [جواب لا کی تمام قیمتوں کے لیے]

(۶) $لا + \frac{۱}{۲} \cdot \frac{لا^۳}{۳} + \frac{۱\cdot۳}{۲\cdot۴} \cdot \frac{لا^۵}{۵} + \frac{۱\cdot۳\cdot۵}{۲\cdot۴\cdot۶} \cdot \frac{لا^۷}{۷} + \ldots\ldots$ [جواب ۔$۱ \le لا \le ۱$ ]

## ۸۔ سلسلہ ثنائی

یہ اہم سلسلہ $۱ + م\,لا + \frac{م(م-۱)}{۱\cdot۲}لا^۲ + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۱\cdot۲\cdot۳}لا^۳ + \ldots\ldots$

$$+ \frac{م(م-۱)(م-۲)\ldots(م-ن+۱)}{\lfloor ن} لا^ن + \ldots\ldots \quad (۱)$$

ہے جس میں م ایک مستقل ہے۔
اگر م ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (۱) ایک محدود سلسلہ م + ۱ رقموں کا ہے اس لیے کہ لا^م جس رقم میں شامل ہے اس کے بعد کو آنے والی تمام رقموں میں جزو ضربی (م - م) شمار کنندہ میں موجود ہوگا اور اس لیے وہ سب منعدم ہو جائیں گی۔ اس صورت میں سلسلہ (۱) نتیجہ ہے (۱ + لا) کو م۔ویں قوت تک بلند کرنے کا۔
اگر م ایک مثبت صحیح عدد نہ ہو تو سلسلہ نامتناہی ہے۔
سلسلہ (۱) کا جب استدقاق کے لیے امتحان کیا جاتا ہے۔ تو

$$\frac{ک_{ن+۱}}{ک_ن} = \frac{(م-ن+۱)}{ن}لا = \left(\frac{م+۱}{ن} - ۱\right)لا$$

اور چونکہ $\underset{ن \to \infty}{\text{نہیا}} \left(\frac{م+۱}{ن} - ۱\right) = -۱$ پس $ر = -لا$

اس لیے یہ سلسلہ متدق ہے اگر لا عدداً اکائی سے کمتر ہے اور مُتسع ہے اگر لا عدداً اکائی سے زائد ہے۔ میکلارن کا سلسلہ (جو آئندہ باب کی پہلی فصل میں بیان ہوگا) اپنے اندر حسب ذیل امر مضمر رکھتا ہے۔
یہ فرض کرکے کہ م ایک مثبت صحیح عدد نہیں ہے اور |لا| < ۱، ثنائی سلسلہ کی قیمت بعینہٖ وہی ہے جو $(۱+لا)^م$ کی ہے۔ یعنے

$$(۱+لا)^م = ۱ + م\,لا + \frac{م(م-۱)}{۲\cdot۱}لا^۲ + \cdots \quad |لا|<۱ \cdots (۲)$$

اگر م ایک مثبت صحیح عدد ہے تو سلسلہ محدود اور لا کی تمام قیمتوں کے لیے داہنے جانب کے رکن کی قیمت کے مساوی ہے۔ مساوات (۲) خصوصی ثنائی مسئلہ کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(ا+ب)^م = ا^م(۱+لا)^م \quad اگر\ لا = \frac{ب}{ا} \quad \cdots \cdots (۳)$$

اسی طرح (۳) کا سیدھے جانب کا رکن بھی ایک قوتی سلسلہ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

## ۹ - ایک اور نوع کا قوّتی سلسلہ

ہم بارہا شکل ذیل کا سلسلہ استعمال کرینگے:

$$ب_. + ب_۱(لا-ا) + ب_۲(لا-ا)^۲ + \cdots + ب_ن(لا-ا)^ن + \cdots \quad (۱)$$

جس میں ا اور سر ب، ب۱، ب۲ ..... بن مستقل ہیں۔ ایسے سلسلہ کو (لا - ا) میں ایک قوّتی سلسلہ کہتے ہیں۔
۸ کی طرح ہم اس سلسلہ (۱) کو امتحانی نسبت کے ذریعہ آزماتے ہیں۔ تب اگر

$$\lim_{ن\to\infty} \frac{ب_{ن+۱}}{ب_ن} = م$$

تو لا کی کسی معین قیمت کے لیے $\text{ر} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \frac{\text{ک}_{\text{ن}+1}}{\text{ک}_{\text{ن}}} = (\text{لا} - \text{ا})\,\text{م}$

اس کی دو صورتیں پیش آتی ہیں

صورت (۱) اگر م = ۰ تو سلسلہ (۱) لا کی تمام قیمتوں کے لیے متدق ہے۔

صورت (۲) اگر م صفر نہیں ہے تو سلسلہ (۱) متدق ہوگا

وقفہ $\text{ا} - \frac{1}{|\text{م}|} < \text{لا} < \text{ا} + \frac{1}{|\text{م}|}$ کے لیے۔

لا میں ایک متدق قوتی سلسلہ حسابی عمل کے لیے موزوں ہوتا ہے جبکہ لا صفر نہیں ہے۔ سلسلہ (۱) اگر متدق ہے تو مفید ہوتا ہے جبکہ لا پہلے ہی سے دی ہوئی معین قیمت ا کے قریب ہوتا ہے۔

**توضیحی مثال** ۔ نامتناہی سلسلہ $1 - (\text{لا} - 1) + \frac{(\text{لا}-1)^2}{2} - \frac{(\text{لا}-1)^3}{3} + \dots$ کے استدقاق کا امتحان کرو۔

**حل** ۔ پہلی رقم کو چھوڑ کر نسبت $\frac{\text{ک}_{\text{ن}+1}}{\text{ک}_{\text{ن}}} = -\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}(\text{لا}-1)$ تیار کرو۔

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}\right) = 1$$

پس $|\text{ر}| = |\text{لا} - 1|$ اور سلسلہ متدق ہوگا جبکہ لا مابین صفر اور ۲ کے واقع ہوگا۔ سرے کا نشان لا = ۲ بھی شامل ہو سکتا ہے۔

## مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) $\sqrt{630}$ کی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چھٹے مقام تک صحیح ۲۵٫۰۹۹۸۰۱ ہے

(۲) $\frac{1}{\sqrt{1010}}$ ایضاً ۱۰۰۶۷۲ ہے

متغیر کی کن قیمتوں کے لیے مندرجۂ ذیل سلسلے متدق ہیں؟

(۳) $1 - 2(\text{لا} - 1) + 3(\text{لا} - 1)^2 - 4(\text{لا} - 1)^3 + \dots$ [جواب $= 0 < \text{لا} < 2$ ]

(۴) $1 + (\text{لا} - 2) + \frac{(\text{لا} - 2)^2}{2^2} + \frac{(\text{لا} - 2)^3}{3^2} + \frac{(\text{لا} - 2)^4}{4^2} + \dots$ [جواب $= 1 \leq \text{لا} \leq 3$ ]

(۵) $1 + \frac{(\text{لا} - 5)^2}{2!} + \frac{(\text{لا} + 5)^4}{4!} - \frac{(\text{لا} + 5)^6}{6!} + \dots$ [جواب = تمام قیمتوں کے لیے]

# اٹھارہواں باب

## تفاعلوں کا پھیلاو۔ میکلارن اور ٹیلر کے سلسلے

**۱۔۔** اس باب میں بتایا جائیگا کہ کسی تفاعل کو قوتی سلسلہ میں کس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے یا اگر تفاعل کسی اور طرح سے ظاہر کیا گیا ہے تو اس کو قوتی سلسلہ میں کس طرح پھیلایا جا سکتا ہے۔

واضح ہے کہ ایک مستدق قوتی سلسلہ لا میں، وقفہ استدقاق کے اندر کی تمام قیمتوں کے لیے، لا کا تفاعل ہے۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots \quad (1)$$

اس لیے اگر کوئی تفاعل قوتی سلسلہ کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے تو اس کے سروں $\text{ا}_{0}$، $\text{ا}_{1}$، $\text{ا}_{2}$ …… $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی کیا شکل ہونی چاہیے معلوم کرنے کے لیے یہ عمل کیا جاتا ہے:

(۱) میں لا = ۰ لکھو، تب $\text{ف}(0) = \text{ا}_{0}$ …………… (۲)

اس طرح (۱) کا پہلا سر دریافت ہو جاتا ہے۔ اب فرض کرو کہ سلسلہ مندرجہ (۱) رقم بہ رقم تفرق کیا جا سکتا ہے۔ عملِ تفرق اس طرح بار بار کیے چلے جانے سے

$$\left.\begin{aligned}
\text{ف}'(\text{لا}) &= \text{ا}_{1} + 2\,\text{ا}_{2}\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_{3}\,\text{لا}^{2} + \cdots\cdots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots\cdots \\
\text{ف}''(\text{لا}) &= 2\,\text{ا}_{2} + 6\,\text{ا}_{3}\,\text{لا} + \cdots\cdots + \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots\cdots \\
\text{ف}'''(\text{لا}) &= 6\,\text{ا}_{3} + \cdots\cdots + \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

وغیرہ وغیرہ

اس کے بعد لا = ۰ لکھنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ف}'(0) = \text{ا}_1،\ \text{ف}''(0) = \lfloor 2\ \text{ا}_2،\ \text{ف}'''(0) = \lfloor 3\ \text{ا}_3 \ldots،\ \text{ف}^{(\text{ن})}(0) = \lfloor \text{ن}\ \text{ا}_\text{ن} \ldots \quad (۴)$$

(۴) کو $\text{ا}_1، \text{ا}_2 \ldots \text{ا}_\text{ن}$ وغیرہ کے لیے حل کرنے اور ان کی قیمتوں کو (۱) میں تعویض کرنے سے، ضابطہ

$$(۲)\quad \text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(0) + \text{ف}'(0)\frac{\text{لا}}{\lfloor 1} + \text{ف}''(0)\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \ldots + \text{ف}^{(\text{ن})}(0)\frac{\text{لا}^\text{ن}}{\lfloor \text{ن}} + \ldots\ldots$$

برآمد ہوتا ہے جو ف (لا) کو قوتی سلسلہ میں ظاہر کرتا ہے۔ اس عمل کو ہم کہتے ہیں کہ "ف (لا) کو (لا) کے ایک قوتی سلسلے میں پھیلا یا گیا"۔ یہ ضابطہ یا سلسلہ عام طور پر میکلارن کے نام سے منسوب ہے۔

[نوٹ: کولن میکلارن (۱۶۹۸ء تا ۱۷۴۶ء) نے اس سلسلہ کو اپنی کتاب ٹریٹز آف فلکشنز (ایڈنبرا ۱۷۴۲ء) میں شائع کیا۔ اصل میں اس کا منکشف اسٹرلنگ (۱۶۹۲ء تا ۱۷۷۰ء) ہے]

اب ہم (۲) پر تنقیدی نظر ڈالینگے۔ دسویں باب کی فصل (        ) متعلق وسیع تر مسئلۂ اوسط قیمت کے نتیجہ (ز) میں ا = ۰ اور ب = لا لکھنے سے

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(0) + \text{ف}'(0)\frac{\text{لا}}{\lfloor 1} + \text{ف}''(0)\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \ldots + \text{ف}^{(\text{ن}-1)}(0)\frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1} + \text{ب} \ldots \quad (۵)$$

جس میں $\text{ب} = \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}_1)\dfrac{\text{لا}^\text{ن}}{\lfloor \text{ن}} \qquad [0 < \text{لا}_1 < \text{لا}]$

رقم ب کو ن رقموں کے بعد کا باقی کہتے ہیں۔ (۵) کا بائیں جانب کا رکن میکلارن کے سلسلہ (۲) سے ن رقموں تک موافق ہے۔ اگر ہم اس (ن رقموں کے) مجموعہ کو $\text{س}_\text{ن}$ سے تعبیر کریں تو (۵)

$\text{ف}(\text{لا}) = \text{س}_\text{ن} + \text{ب}$ یا $\text{ف}(\text{لا}) - \text{س}_\text{ن} = \text{ب}$ ہو جاتا ہے۔

اب فرض کرو کہ ایک معین قیمت لا = لا. کے لیے ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے جبکہ ن لا متناہی ہو جاتا ہے۔ تب $\text{س}_\text{ن}$ بطور انتہا ف (لا.) کو پہنچیگا۔ یعنے میکلارن کا سلسلہ (۲) لا = لا. کے لیے مستدق ہوگا اور اس کی قیمت ہے ف (لا.)۔ پس نتیجہ ذیل حاصل ہوتا ہے:

مسئلہ ۱ - سلسلہ (۱) کے مستدق ہونے اور

تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرنے کے لیے یہ ضروری اور کافی ہے کہ

نہایب = ۰ ................ (۶)
ن ← ∞

عموماً (جیسا کہ سابقہ باب میں کیا گیا) وقفۂ استدقاق کی تعیین آسان تر ہے بہ نسبت وقفۂ شرط مندرجہ (۶) کی تعیین کے لیکن سادہ صورتوں میں دونوں متماثل ہیں۔

واضح ہے کہ کسی تفاعل ف (لا) کو قوتی سلسلہ (۴) کے ذریعہ تعبیر کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تفاعل اور اس کے تمام رتبوں کے مشتقات محدود ہوں۔ لیکن یہ کافی نہیں ہے۔

میکلارن کے سلسلے کے ذریعے جن تفاعلوں کی تعبیر نہیں ہو سکتی ان میں لوک لا اور حم لا بطور مثال پیش کیے جا سکتے ہیں اس لیے کہ یہ دونوں نامتناہی ہو جاتے ہیں جبکہ لا صفر ہوتا ہے۔

سلسلہ (۴) کا استعمال عملی حسابوں میں جن میں اعشاریہ کے ایک معین مقام تک حساب کی صحت مطلوب ہے بڑی اہمیت رکھتا ہے۔ واضح ہے کہ اس سے ایسے سلسلہ کی رقموں کی کافی تعداد لی جانی چاہیے۔

**توضیحی مثال (۱)** جم لا کو ایک نامتناہی قوتی سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ اور دریافت کرو کہ لا کی کن قیمتوں کے لیے یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

**حل** ۔ پہلے تفرق کرو اور پھر لا = ۰ لکھو۔

ف (لا) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱
ف″ (لا) = -جم لا ∴ ف″ (۰) = -۱
ف^(۴) (لا) = جم لا ∴ ف^(۴) (۰) = ۱
ف^(۶) (لا) = -جم لا ∴ ف^(۶) (۰) = -۱
وغیرہ

ف′ (لا) = -جب لا ∴ ف′ (۰) = ۰
ف‴ (لا) = جب لا ∴ ف‴ (۰) = ۰
ف^(۵) (لا) = -جب لا ∴ ف^(۵) (۰) = ۰
ف^(۷) (لا) = جب لا ∴ ف^(۷) (۰) = ۰
وغیرہ

ان کو (۱) میں تعویض کرنے سے $\text{جم لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4} - \frac{\text{لا}^6}{\lfloor 6} + \ldots\ldots$

سابقہ باب کی فصل (۷) کی مثال (۵) سے واضح ہے کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

اس طرح $\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^5}{\lfloor 5} - \frac{\text{لا}^7}{\lfloor 7} + \ldots\ldots$

جو [ ازروئے مثال (۶) باب و فصل مذکورۂ بالا ] لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

جم لا اور جب لا کے سلسلوں میں بآسانی بتایا جاسکتا ہے کہ جیسے جیسے ن نامتناہی ہوتا ہے باقی ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے، لا کی خواہ کوئی معین قیمت ہو۔ چنانچہ

جم لا کے سلسلہ میں ہم ن۔ واں مشتق بشکل $\text{ف}^{(ن)}(\text{لا}) = \text{جم}\left(\text{لا} + \frac{ن\pi}{2}\right)$ لکھ سکتے ہیں۔

پس
$$\text{ب} = \text{جم}\left(\text{لا}_1 + \frac{ن\pi}{2}\right)\frac{\text{لا}^ن}{\lfloor ن} \quad \text{ہے}$$

$\text{جم}\left(\text{لا}_1 + \frac{ن\pi}{2}\right)$ کبھی عددی قیمت میں اکائی سے بڑا نہیں ہوتا ہے۔ معہذا ب کا دوسرا جزو ضربی سلسلہ

$\text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{\text{لا}^ن}{\lfloor ن} + \ldots\ldots$ میں ن۔ویں رقم ہے

جو لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔ پس وہ صفر کو پہنچتا ہے جیسے جیسے ن نامتناہی ہوتا ہے۔ پس شرط مندرجہ (۶) پوری ہوتی ہے۔

**توضیحی مثال (۲)۔** $\text{ لو}\,\text{لا}$ کو میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ اور بتاؤ کہ وہ کب مستدق ہوتا ہے۔

حل ۔ فرض کرو

$$ف(لا) = ف(٠) + فَ(٠)\frac{لا}{\underline{|1}} + فً(٠)\frac{لا^2}{\underline{|2}} + \cdots + ف^{(ن)}(٠)\frac{لا^ن}{\underline{|ن}} + \cdots$$

$ف(لا) = و^{لا}$ ∴ $ف(٠) = ١$　　$فَ(لا) = و^{لا} لوک و$ ∴ $فَ(٠) = لوک و$

$فً(لا) = و^{لا}(لوک و)^2$ ∴ $فً(٠) = (لوک و)^2$　$فٌ(لا) = و^{لا}(لوک و)^3$ ∴ $فٌ(٠) = (لوک و)^3$

اور $ف^{(ن)}(لا) = و^{لا}(لوک و)^ن$ ∴ $ف^{(ن)}(٠) = (لوک و)^ن$

$$پس\ و^{لا} = ١ + \frac{(لا لوک و)}{\underline{|1}} + \frac{(لا لوک و)^2}{\underline{|2}} + \cdots + \frac{(لا لوک و)^ن}{\underline{|ن}} + \cdots$$

ن رقموں کے بعد اس سلسلہ کا باقی ب = $\frac{لا^ن}{\underline{|ن}}(لوک و)^ن\ و^{لا'}$

$و^{لا'}$ چونکہ $و^{لا}$ سے کمتر ہے محدود ہے اور ن کی قیمت جب انتہائی بڑی ہوتی ہے تو $\frac{(لا لوک و)^ن}{\underline{|ن}}$ نامتناہی چھوٹا ہوتا ہے ۔ پس ن کو کافی بڑا لینے سے باقی ب ناقابلِ لحاظ رہ جاتا ہے اس لیے کہ یہ سلسلہ مستدق ہے

[ واضح ہو کہ و کے بجائے اگر ہ اساس بنایا جائے

$$ہ^{لا} = ١ + \frac{لا}{\underline{|1}} + \frac{لا^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots + \frac{لا^ن}{\underline{|ن}} + \cdots$$

اور اگر لا = ١ تو ہ = $١ + \frac{١}{\underline{|1}} + \frac{١}{\underline{|2}} + \cdots + \frac{١}{\underline{|ن}} + \cdots = ٢٫٧١٨٢٨\cdots$

جیسا کہ جبرو مقابلہ کی کتاب میں بتایا گیا ہے ]

**توضیحی مثال (۳)** $لوک_ہ(١ + لا)$ کو پھیلاؤ جبکہ $-١ < لا \leq ١$

حل ۔ $ف(لا) = لوک_ہ(١ + لا)$ ∴ $ف(٠) = لوک_ہ(١) = ٠$

$$ف'(لا) = \frac{۱}{۱+لا} \quad \therefore \quad ف'(۰) = ۱$$

$$ف''(لا) = -\frac{۱}{(۱+لا)^{۲}} \quad \therefore \quad ف''(۰) = -۱$$

$$ف'''(لا) = +\frac{۲.۱}{(۱+لا)^{۳}} \quad \therefore \quad ف'''(۰) = \underline{|۲}$$

$$ف^{(ن)}(لا) = (-۱)^{ن-۱}\frac{\underline{|ن-۱}}{(۱+لا)^{ن}} \quad \therefore \quad ف^{(ن)}(۰) = (-۱)^{ن-۱}\,\underline{|ن-۱}$$

$$پس\ لوگ(۱+لا) = ۰ + \frac{لا}{\underline{|۱}} - \frac{\underline{|۱}\, لا^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\underline{|۲}\, لا^{۳}}{\underline{|۳}} \cdots + (-۱)^{ن-۱}\frac{\underline{|ن-۱}\, لا^{ن}}{\underline{|ن}}$$

$$= لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} - \frac{لا^{۴}}{۴} + \frac{لا^{۵}}{۵} \cdots + (-۱)^{ن-۱}\frac{لا^{ن}}{ن} \cdots$$

واضح ہے کہ یہ سلسلہ متدق ہونے کے لیے شرط $-۱ < لا \leq ۱$ لازمی ہے۔

**توضیحی مثال (۳)** میکلارن کے سلسلے ذریعہ لوگ (۱ + جب لا) کو $لا^{۴}$ والی رقم تک پھیلاؤ۔

حل۔ ف (لا) = لوگ (۱+جب لا) لکھو۔ تب ف (۰) = ۰

اور $ف'(لا) = \frac{جم\ لا}{۱+جب\ لا} = \frac{۱-جب\ لا}{جم\ لا} = قط\ لا - مس\ لا$ پس $ف'(۰) = ۱$

$$ف''(لا) = قط\ لا\ مس - قط^{۲}\ لا = ف'(لا)\ قط\ لا \quad \therefore \quad ف''(۰) = -۱$$

$$ف'''(لا) = -ف''(لا)\ قط\ لا - ف'(لا)\ قط\ لا\ مس\ لا = -ف'(لا)\ ف''(لا)$$

$$\therefore \quad ف'''(۰) = ۱$$

$$ف^{(۴)}(لا) = -\{ف''(لا)\}^{۲} - ف'(لا)\ ف'''(لا) \quad \therefore \quad ف^{(۴)}(۰) = -۲$$

$$\therefore \quad لوگ(۱ + جب\ لا) = لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۶} - \frac{لا^{۴}}{۱۲} + \cdots\cdots$$

# مثالیں

میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ مندرجۂ ذیل پھیلاؤ حاصل کرو اور دریافت کرو کہ متغیر کی کن قیمتوں کے لیے یہ پھیلاؤ مستدق ہے:

(۱) $\text{لوک}(۱-\text{لا}) = -\text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۲} - \frac{\text{لا}^۳}{۳} - \frac{\text{لا}^۴}{۴} - \cdots - \frac{\text{لا}^\text{ن}}{\text{ن}} \cdots \quad [-۱ \leq \text{لا} < ۱$

(۲) $\text{جب}^{-۱}\text{ط} = \text{ط} + \frac{۱\,\text{ط}^۳}{۲\cdot۳} + \frac{۱\cdot۳\,\text{ط}^۵}{۲\cdot۴\cdot۵} + \cdots + \frac{۱\cdot۳\cdots(۲\text{ن}-۳)\,\text{ط}^{۲\text{ن}-۱}}{۲\cdot۴\cdots(۲\text{ن}-۲)(۲\text{ن}-۱)} + \cdots \quad [-۱ \leq \text{لا} \leq ۱$

(۳) $\text{مس}^{-۱}\text{فہ} = \text{فہ} - \frac{\text{فہ}^۳}{۳} + \frac{\text{فہ}^۵}{۵} - \cdots + \frac{(-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{فہ}^{۲\text{ن}-۱}}{۲\text{ن}-۱} + \cdots \quad [-۱ \leq \text{لا} \leq ۱$

(۴) $\text{جب}\left(\frac{\pi}{۴} + \text{لا}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(۱ + \text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{|۲} - \frac{\text{لا}^۳}{|۳} + \frac{\text{لا}^۴}{|۴} + \frac{\text{لا}^۵}{|۵} - \frac{\text{لا}^۶}{|۶} - \frac{\text{لا}^۷}{|۷} + \cdots\right)$ [تمام قیمتوں کے لیے

(۵) $\text{لوک}(\text{ل} + \text{لا}) = \text{لوک}\,\text{ل} + \frac{\text{لا}}{\text{ل}} - \frac{\text{لا}^۲}{۲\text{ل}^۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۳\text{ل}^۳} - \cdots + \frac{(-۱)^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}}{(\text{ن}-۱)\,\text{ل}^{\text{ن}-۱}} \quad [-۱ < \text{لا} \leq ۱$

(۶) مس لا کے پھیلاؤ کی پہلی چار رقمیں $\text{لا} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{۲\text{لا}^۵}{۱۵} + \frac{۱۷\text{لا}^۷}{۳۱۵}$ ہیں۔

(۷) قط لا " " " " $۱ + \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{۵\text{لا}^۴}{۲۴} + \frac{۶۱\text{لا}^۶}{۷۲۰}$ ہیں۔

(۸) $\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{\text{لا}} = \frac{\pi}{۲} - \text{لا} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} - \frac{\text{لا}^۵}{۵} + \cdots\cdots$

(۹) $\frac{۱}{۲}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right) = ۱ + \frac{\text{لا}^۲}{|۲} + \frac{\text{لا}^۴}{|۴} + \frac{\text{لا}^۶}{|۶} + \cdots\cdots$

(۱۰) $\text{لوک}\,\text{جم}\,\text{ط} = -\frac{\text{ط}^۲}{۲} - \frac{\text{لا}^۴}{۱۲} - \frac{\text{لا}^۶}{۴۵} \cdots\cdots$

## ۷۲۔ لامتناہی سلسلوں کے ساتھ عمل۔

جبر و مقابلہ اور احصاء کے بہت سے عمل مستدق سلسلوں کے ساتھ کیے جا سکتے ہیں۔ بعینہٖ اس طرح جس طرح کہ کثیر رقمی جملوں کے ساتھ۔ اس ضمن میں مندرجۂ ذیل امور بلا ثبوت قلمبند کیے جاتے ہیں:-

فرض کرو $ا_. + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \dots ا_ن لا^ن$

اور $ب_. + ب_۱ لا + ب_۲ لا^۲ + \dots ب_ن لا^ن$

مستدق قوتی سلسلے ہیں۔ ہم حسبِ ذیل طریقوں سے ایسے نئے مستدق قوتی سلسلے حاصل کر سکتے ہیں:

(۱) رقم بہ رقم جمع (یا تفریق) کرنے سے

$$(ا_. \pm ب_.) + (ا_۱ \pm ب_۱) لا + \dots + (ا_ن \pm ب_ن) لا^ن + \dots$$

(۲) رقموں کو ضرب دینے اور مرتب کرنے سے

$$ا_. ب_. + (ا_. ب_۱ + ا_۱ ب_.) لا + (ا_. ب_۲ + ا_۱ ب_۱ + ا_۲ ب_.) لا^۲ + \dots$$

**توضیحی مثال (۱) لوکارقوں کا حساب۔ سلسلوں**

$$لوک_و (۱ + لا) = لا - \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۳} لا^۳ - \frac{۱}{۴} لا^۴ + \dots$$

$$لوک_و (۱ - لا) = - لا - \frac{۱}{۲} لا^۲ - \frac{۱}{۳} لا^۳ - \frac{۱}{۴} لا^۴ - \dots$$

متناظر رقموں کی باہمی تفریق سے حاصل ہوتا ہے نیا سلسلہ

$$لوک_و \frac{۱ + لا}{۱ - لا} = ۲ \left( لا + \frac{۱}{۳} لا^۳ + \frac{۱}{۵} لا^۵ + \frac{۱}{۷} لا^۷ + \dots \right) \dots\dots \quad (۱)$$

یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ $|لا| < ۱$

(۱) کو حسابی عمل کے لیے موزوں تر شکل میں تبدیل کرنے کی غرض سے فرض کرو م اور ن دو مثبت اعداد ہیں جن میں $م > ن$ تب لکھو

$$\text{لا} = \frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} \quad \text{پس} \quad \frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \quad \cdots\cdots (2)$$

واضح ہے کہ م اور ن کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے $\text{لا} < 1$

اس طرح

$$\text{لوگ}\ \frac{\text{م}}{\text{ن}} = 2\left[\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^5 + \cdots\cdots\right] \cdots (3)$$

یہ سلسلہ م اور ن کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے اور حسابی عمل کے لیے بہت موزوں ہے۔

**توضیحی مثال (۲)** و^لا جب لا کا قوتی سلسلہ معلوم کرو۔

حل۔ چونکہ

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^5}{120} - \quad [\text{توضیحی مثال (1)}]$$

اور

$$\text{و}^{\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^4}{24} + \frac{\text{لا}^5}{120} + \cdots \quad [\text{توضیحی مثال (2)}]$$

ان سلسلوں کو باہمدیگر ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{لا}}\ \text{جب لا} = \text{لا} + \text{لا}^2 + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^5}{30} + \text{رقوم جن میں } \text{لا}^6 \text{ وغیرہ ہیں۔}$$

(۳) تقسیم کرنے سے۔ یہاں اس کی ایک خاص صورت بطور مثال پیش کی جاتی ہے۔

**توضیحی مثال (۳)** جم لا کے سلسلہ کی مدد سے قط لا کا سلسلہ تیار کرو۔

حل۔

$$\text{جم لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{2!} + \frac{\text{لا}^4}{4!} - \frac{\text{لا}^6}{6!} + \cdots\cdots\cdots$$

چونکہ $\text{قط لا} = \frac{1}{\text{جم لا}}$ اکائی کو مندرجہ بالا سلسلہ پر تقسیم کرنے سے قط لا کا سلسلہ حاصل ہو جاتا ہے۔ اس کے لیے اچھا طریقہ یہ ہے کہ $\text{جم لا} = 1 - \text{ی}$

لکھا جائے تو

$$ی = \frac{لا^2}{2} - \frac{لا^4}{24} + \frac{لا^6}{720} - \ldots\ldots \quad (4)$$

اور $قط\, لا = \frac{1}{1-ی} = 1 + ی + ی^2 + ی^3 + \ldots$ اگر $|لا| < 1$ ..... (۵)

پس سلسلہ (۴) سے

$ی^2 = \frac{لا^4}{4} - \frac{لا^6}{24} +$ لا کی بلند تر قوتوں کی رقمیں

$ی^3 = \frac{لا^6}{8} + \ldots\ldots$

سلسلہ (۵) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ جواب

$$قط\, لا = 1 + \frac{1}{2} لا^2 + \frac{5}{24} لا^4 + \frac{61}{720} لا^6 + \ldots$$

## مثالیں

(۱) لوک ۲ = ۰٫۶۹۳۱۵، لوک ۳ = ۱٫۰۹۸۶۱ دیے جاتے ہیں ان کی مدد سے لوک ۷ اور لوک ۱۱ کو محسوب کرو۔ [جواب لوک ۷ = ۱٫۹۴۵۹۱، لوک ۱۱ = ۲٫۳۹۷۹۰]

مندرجۂ ذیل سلسلوں کی تصدیق کرو:—

(۲) $\frac{جم\, ط}{1+ط} = 1 - ط + \frac{ط^2}{2} - \frac{ط^3}{2} + \frac{13\, ط^4}{24} + \ldots\ldots$

(۳) $لوگ\, جب\, ع = ع - ع^2 + \frac{ع^3}{3} - \frac{ع^5}{30} + \ldots\ldots$

(۴) $جب^2 ط = ط^2 - \frac{2\, ط^4}{\lfloor 3} + \frac{32\, ط^6}{\lfloor 6} + \ldots\ldots$

(۵) $\frac{ولا}{1+لا} = 1 + \frac{لا^2}{2} - \frac{لا^3}{3} + \frac{3\, لا^4}{8} + \ldots\ldots$

(۶) $\frac{\text{لوک}\ (۱+لا)}{\text{جم لا}} = لا - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{۵ لا^۳}{۶} - \frac{لا^۴}{۲} + \ldots\ldots$

(۷) $(۱-لا)\ \text{جب}^{-۱} لا = لا - لا^۲ + \frac{لا^۳}{۶} - \frac{لا^۴}{۶} + \frac{۳ لا^۵}{۴۰} - \frac{۳ لا^۶}{۴۰} + \ldots\ldots$

(۸) $(۱+لا)\ \text{مس}^{-۱} لا = لا + لا^۲ - \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} + \frac{لا^۶}{۵} + \ldots\ldots$

(۹) $\text{لو}_ع\ \text{جب}\ ۲ ط = ۲ ط + ط^۲ - \frac{۱۳ ط^۳}{۱۲} - \frac{۵ ط^۴}{۸} + \ldots\ldots$

(۱۰) $\sqrt{۱+\text{جب}\ ط} = ۱ + \frac{ط}{۲} - \frac{ط^۲}{۲} - \frac{ط^۳}{۸} - \frac{ط^۴}{۴۸} + \ldots\ldots$

## ۱۴۳- قوتی سلسلوں کا تفرق اور تکمل-

ایک متدق قوتی سلسلہ

$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳ + \ldots\ldots + ا_ن لا^ن + \ldots\ldots$ (۱)

رقم برقم اندرون وقفہ استدقاق لا کی کسی قیمت کے لیے تفرق کیا جاسکتا ہے اور اس سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے وہ بھی متدق ہوتا ہے۔

مثلاً سلسلہ $\text{جب}\ لا = لا - \frac{لا^۳}{\lfloor ۳} + \frac{لا^۵}{\lfloor ۵} - \frac{لا^۷}{\lfloor ۷} + \ldots\ldots$

کے تفرق سے نیا سلسلہ $\text{جم}\ لا = ۱ - \frac{لا^۲}{\lfloor ۲} + \frac{لا^۴}{\lfloor ۴} - \frac{لا^۶}{\lfloor ۶} + \ldots$ حاصل ہوتا ہے۔
دونوں سلسلے لا کی تمام قیمتوں کے لیے متدق ہیں۔ جیسا کہ قبل ازیں بیان ہوچکا ہے۔

معہذا سلسلہ (۱) تکمل کیا جاسکتا ہے اگر تکمل کے حدود وقفہ استدقاق کے اندر ہوں، اور حاصل شدہ سلسلہ متدق ہوگا۔

**توضیحی مثال (۱)** - تکمل کے ذریعہ $\text{لوک}_ع (۱+ط)$ کا سلسلہ

دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ $\frac{\text{فر}}{\text{فرط}}\,\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{ط}) = \frac{1}{1+\text{ط}}$، $\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{ط}) = \int_{0}^{\text{ط}} \frac{\text{فرط}}{1+\text{ط}}$

لیکن $\frac{1}{1+\text{ط}} = 1 - \text{ط} + \text{ط}^2 - \text{ط}^3 + \text{ط}^4 - \ldots\ldots$

جبکہ $|\text{ط}| < 1$ اس کو اوپر کی مساوات میں تعویض کرنے اور رقم بر رقم بائیں جانب کے رکن کو تکمل کرنے سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

$$\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{ط}) = \text{ط} - \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1}{3}\text{ط}^3 - \frac{1}{4}\text{ط}^4 + \ldots\ldots$$

یہ سلسلہ متدق ہوتا ہے جبکہ $|\text{ط}| < 1$ جیسا کہ سابقہ باب کی فصل ۸ء مثال (۲) سے ظاہر ہے۔

توضیحی مثال (۲)۔ تکمل کے ذریعہ $\text{جب}^{-1}\text{ط}$ کا قوتی سلسلہ دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ $\frac{\text{فر}}{\text{فرط}}\,\text{جب}^{-1}\text{ط} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ط}^2}}$ اس لیے $\text{جب}^{-1}\text{ط} = \int_{0}^{\text{ط}} \frac{\text{فرط}}{\sqrt{1-\text{ط}^2}}$

$\text{م} = -\frac{1}{2}$ اور ی بجائے $-\text{ط}^2$ لکھا جاتا ہے تو سلسلہ ثنائی کی رُو سے

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{ط}^2}} = 1 + \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\text{ط}^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\text{ط}^6 + \ldots\ldots$$

یہ سلسلہ متدق ہوتا ہے جبکہ $|\text{ط}| < 1$ اس کو اوپر کی مساوات میں تعویض کرکے رقم بر رقم تکمل کرنے سے

$$\text{جب}^{-1}\text{ط} = \text{ط} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{ط}^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\text{ط}^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\text{ط}^7}{7} + \ldots$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ بھی متدق ہوتا ہے جبکہ $|\text{ط}| < 1$

توضیحی مثال (۳)۔ سلسلہ کے ذریعہ $\int_{0}^{1} \text{جب لا}^2\,\text{فرلا}$ کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو $\text{ی} = \text{لا}^2$ تب $\text{جب ی} = \text{ی} - \frac{\text{ی}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{ی}^5}{\lfloor 5} - \ldots\ldots$

پس $\text{جب لا}^2 = \text{لا}^2 - \frac{\text{لا}^6}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^{10}}{\lfloor 5} \ldots\ldots\ldots$

$$\text{اور } \int_0^1 \text{جب } لا^۲ \, \text{فرلا} = \int_0^1 \left\{ لا^۲ - \frac{لا^۶}{|۳} + \frac{لا^{۱۰}}{|۵} \cdots \right\} \text{ تقریباً}$$

$$= \left[ \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۷}{۲۴} + \frac{لا^{۱۱}}{۱۳۲۰} \right]_0^1 = ۰٫۳۳۳۳ - ۰٫۰۲۳۸ + ۰٫۰۰۰۸$$

$$= ۰٫۳۱۰۳ \quad \text{جواب}$$

**۴۔ ٹیلر کا سلسلہ**۔ جس تفاعل کو ایک متدق قوتی سلسلہ لا میں تعبیر کرتا ہے اس کی قیمت محسوب کرنے کے لیے بہت موزوں ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمت چھوٹی (قریب صفر) ہوتی ہے۔ اب ہم (لا − ا) کی قوتوں کو پھیلانے کے لیے ایک جملہ اخذ کرینگے جس میں ا ایک معین عدد ہے۔ اس طرح جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے اس تفاعل کو جس کی وہ تعبیر کرتا ہے محسوب کرنے کے لیے بہت موزوں ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں ا کے قریب ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ

$$ف(لا) = ب + ب_۱(لا-ا) + ب_۲(لا-ا)^۲ + \cdots + ب_ن(لا-ا)^ن \cdots \quad (۱)$$

اور یہ سلسلہ اس تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔ سروں $ب، ب_۱، \ldots \ldots ب_ن$ کی ضروری شکل جیسا کہ فصل (۱) میں بتایا گیا اس طرح معلوم کرلی جاتی ہے یعنے سلسلہ (۱) کو یہ مان کر کہ وہ تفرق کیا جاسکتا ہے کہ بلحاظ لا کے تفرق کیا جاتا ہے۔ چنانچہ

$$ف'(لا) = ب_۱ + ۲ب_۲(لا-ا) + \cdots + ن\, ب_ن(لا-ا)^{ن-۱} + \cdots$$

$$ف''(لا) = ۲ب_۲ + \cdots\cdots + ن(ن-۱)(لا-ا)^{ن-۲} + \cdots$$

وغیرہ وغیرہ

اب لا = ا ان مساواتوں اور سلسلہ (۱) میں تعویض کرکے $ب، ب_۱، ب_۲ \ldots$ کے لیے حل کرنے سے، حاصل ہوتا ہے:

$$ب = ف(ا)،\ ب_۱ = ف'(ا)،\ ب_۲ = \frac{ف''(ا)}{|۲}، \ldots ب_ن = \frac{ف^{(ن)}(ا)}{|ن} \ldots$$

ان قیمتوں کو سلسلہ (۱) میں درج کرنے سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{فَ}(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})}{\underline{\text{۱}}} + \text{فً}(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{۲}}{\underline{\text{۲}}} + \dots + \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{\text{ن}}} + \dots \quad (\text{ب})$$

یہ سلسلہ ٹیلر کا سلسلہ یا مسئلہ کہلاتا ہے۔

[نوٹ - یہ مسئلہ پہلے ڈاکٹر بروک ٹیلر (۱۶۸۵ء - ۱۷۳۱ء) نے اپنی کتاب میتھاڈس آنکریمنٹورم مطبوعہ لندن ۱۷۱۵ء میں شائع کیا تھا۔]

اب ہم (ب) پر تنقیدی نظر ڈالینگے - دسویں باب کی فصل (۱۰) متعلق وسیع تر مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ (ز) میں ب = لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{فَ}(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})}{\underline{\text{۱}}} + \dots + \text{ف}^{(\text{ن}-۱)}(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}-۱}}{\underline{\text{ن}-۱}} + \text{ب} \quad \dots\dots (۲)$$

$$\text{جس میں } \text{ب} = \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}_۱)\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{\text{ن}}} \qquad [\text{ا} < \text{لا}_۱ < \text{لا}]$$

رقم ب کو ن رقموں کے بعد کا باقی کہتے ہیں۔
(۲) کے بائیں جانب کا سلسلہ ٹیلر کے سلسلہ (ب) کے ساتھ ن رقموں تک مطابق ہوتا ہے۔ ان رقموں کے حاصل مجموعہ کو $\text{س}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرو تو (۲) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{س}_{\text{ن}} + \text{ب} \quad \text{یا} \quad \text{ف}(\text{لا}) - \text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}$$

اب مانو کہ ایک معین قیمت لا = $\text{لا}_۱$ کے لیے باقی ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے جبکہ ن نامتناہی ہوتا ہے - تب

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \text{س}_{\text{ن}} = \text{ف}(\text{لا}_۱) \quad \dots\dots\dots (۳)$$

اور سلسلہ (ب) مستدق ہوتا ہے لا = $\text{لا}_۱$ کے لیے اور اس کی قیمت ہے ف($\text{لا}_۱$)

**مسئلہ** — نامتناہی سلسلہ (ب) تفاعل کو لا کی ان قیمتوں کے لیے اور صرف ان ہی قیمتوں کے لیے تعبیر کرتا ہے جن کے لیے باقی صفر کو پہنچتا ہے جیسے جیسے رقموں کی تعداد بلا انتہا بڑھتی جاتی ہے۔

اگر سلسلہ، لا کی ایسی قیمتوں کے لیے متدق ہوتا ہے جن کے لیے باقی صفر کو نہیں پہنچتا جیسے جیسے کہ ن بلا انتہا بڑھتا جاتا ہے تو لا کی ایسی قیمتوں کے لیے سلسلہ تفاعل ف (لا) کو تعبیر نہیں کرتا۔

عام طور پر سلسلہ کا وقفۂ استدقاق دریافت کرلینا زیادہ آسان ہے بہ نسبت باقی کے صفر کو پہنچنے کے وقفہ کے۔ لیکن سادہ صورتوں میں دونوں وقفے متماثل ہیں۔

جب کسی تفاعل اور اس کے متواتر مشتقات کی قیمتیں متغیر کی کسی معین قیمت مثلاً لا = ا کے لیے معلوم اور محدود ہیں تو لا کی ا کے قرب وجوار کی قیمتوں کے لیے سلسلہ (ب) اس تفاعل کی قیمت دریافت کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ اور (ب) کو ف (لا) کا پھیلاؤ لا = ۱ کے قرب وجوار میں بھی کہتے ہیں۔

**توضیحی مثال (۱)** لوک لا کو (لا - ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

حل۔ ف(لا) = لوک لا، ∴ ف(۱) = ۰

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \frac{1}{\text{لا}} \quad \therefore \text{ف}'(1) = 1$$

$$\text{ف}''(\text{لا}) = -\frac{1}{\text{لا}^2} \quad \therefore \text{ف}''(1) = -1$$

$$\text{ف}'''(\text{لا}) = \frac{2}{\text{لا}^3} \quad \therefore \text{ف}'''(1) = 2 \text{، وغیرہ، وغیرہ}$$

ان کو سلسلہ (ب) میں تعویض کرنے سے

$$\text{لوک}(\text{لا}) = 0 + \frac{(\text{لا}-1)}{1!} - \frac{(\text{لا}-1)^2}{2!} + \frac{2(\text{لا}-1)^3}{3!} - \dots$$

$$= (\text{لا}-1) - \frac{1}{2}(\text{لا}-1)^2 + \frac{1}{3}(\text{لا}-1)^3 - \dots$$

یہ سلسلہ لا کی صفر اور ۲ کے مابین قیمتوں میں متدق ہوتا ہے اور لوک لا کا لا = ۱ کے قرب وجوار میں پھیلاؤ ہے۔

**توضیحی مثال (۲)** جم طہ کو $(\text{طہ} - \frac{\pi}{4})$ کی قوتوں میں چار رقموں تک پھیلاؤ۔

**حل۔**

$$\text{ف}(\text{طہ}) = \text{جم طہ}،\quad \text{ف}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{فَ}(\text{طہ}) = -\text{جب طہ}،\quad \text{فَ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{فً}(\text{طہ}) = -\text{جم طہ}،\quad \text{فً}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{فٌ}(\text{طہ}) = \text{جب طہ}،\quad \text{فٌ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{وغیرہ وغیرہ}$$

پس سلسلہ

$$\text{جم طہ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{طہ} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\text{طہ} - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\lfloor 2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\text{طہ} - \frac{\pi}{4}\right)^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \left(\text{طہ} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\text{طہ} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\text{لا} - \frac{\pi}{4}\right)^3 \cdots\right]$$

## ۵۔ ٹیلر کے سلسلہ کی ایک دوسری شکل۔

اگر سابقہ فصل کے سلسلہ (ب) میں بجائے ا کے لا لکھیں اور لا − ا = ھ مانیں یعنے ا = ا + ھ = لا + ھ تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ف}(\text{لا} + \text{ھ}) = \text{ف}(\text{لا}) + \text{فَ}(\text{لا})\frac{\text{ھ}}{\lfloor 1} + \text{فً}(\text{لا})\frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2} + \cdots\cdots$$

$$\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{ج})$$

اس نئی شکل میں ف (لا) کی نئی قیمت، جبکہ لا بدلتا ہے لا سے لا + ھ میں، ھ کے ایک قوتی سلسلہ میں پھیلائی جاتی ہے، جو لا کا اضافہ ہے۔

**توضیحی مثال۔** لوک (لا + ھ) کو ٹیلر کے سلسلے کے ذریعہ پھیلاؤ۔

حل۔ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لوک}(\text{لا})$، $\text{ف}'(\text{لا}) = \frac{1}{\text{لا}}$، $\text{ف}''(\text{لا}) = -\frac{1}{\text{لا}^2}$

$\text{ف}'''(\text{لا}) = \frac{2}{\text{لا}^3}$، ...... $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = (-1)^{\text{ن}-1} \frac{\lfloor \text{ن}-1}{\text{لا}^{\text{ن}}}$

پس $\text{لوک}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{لوک لا} + \frac{\text{ھ}}{\text{لا}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{ھ}^2}{\text{لا}^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\text{ھ}^3}{\text{لا}^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\text{ھ}^4}{\text{لا}^4} + \cdots$

# مثالیں

مندرجہ ذیل سلسلوں کی ٹیلر کے مسئلہ کے ذریعہ تصدیق کرو :

(۱) $\text{جب لا} = \text{جب ا} + (\text{لا}-\text{ا})\,\text{جم ا} - \frac{(\text{لا}-\text{ا})^2}{\lfloor 2}\,\text{جب ا} - \frac{(\text{لا}-\text{ا})^3}{\lfloor 3}\,\text{جم ا} + \cdots$

(۲) $\text{جم لا} = \text{جم ا} - (\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب ا} - \frac{(\text{لا}-\text{ا})^2}{\lfloor 2}\,\text{جم ا} + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^3}{\lfloor 3}\,\text{جب ا} + \cdots$

(۳) $\text{مس}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{مس لا} + \text{ھ}\,\text{قط}^2\text{لا} + \text{ھ}^2\,\text{قط}^2\text{لا}\,\text{مس لا} + \cdots$

(۴) جب لا کو $(\text{لا} - \frac{\pi}{4})$ کی قوتوں میں چار رقموں تک پھیلاؤ۔

[جواب۔ $\text{جب لا} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + (\text{لا}-\frac{\pi}{4}) - \frac{(\text{لا}-\frac{\pi}{4})^2}{\lfloor 2} - \frac{(\text{لا}-\frac{\pi}{4})^3}{\lfloor 3} + \cdots\right\}$]

(۵) ثابت کرو کہ $\text{مس}^{-1}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{مس}^{-1}\text{لا} + \text{ھ جب ی}\,\frac{\text{جب ی}}{1} - (\text{ھ جب ی})^2\,\frac{\text{جب ۲ی}}{2}$

$+ (\text{ھ جب ی})^3\,\frac{\text{جب ۳ی}}{3}$ ۔ وغیرہ جس میں $\text{ی} = \text{مم}^{-1}\text{لا}$

[اشارہ۔ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{مس}^{-1}\text{لا} = \frac{\pi}{2} - \text{ی}$ اور $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ی}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$

$= (-1)^{\text{ن}}\,\lfloor \text{ن}-1\,\text{جب}^{\text{ن}}\text{ی}\,\text{جب ن ی}$۔]

## ۶۔ تقریبی ضابطوں کا حصول میکلارن اور ٹیلر کے سلسلوں سے۔

توضیحی مثال (۱) میکلارن کے سلسلہ سے $\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^5}{\lfloor 5} - \cdots$

اگر صرف پہلی رقم تک تقریبی قیمت محسوب کی جائے تو جب لا = لا ......
" " دوسری جب لا = لا - $\frac{لا^3}{3!}$
وغیرہ وغیرہ

پہلی صورت میں باقی ماندہ سلسلہ کی قیمت عدداً اس کی پہلی رقم $\frac{1}{6}$ لا$^3$ سے کمتر ہے۔ [سابقہ باب ۵]

یعنے جب لا = لا ساتھ |خطا| < | $\frac{1}{6}$ لا$^3$ |

ہم یہ دریافت کرسکتے ہیں کہ اس صورت میں لا کی کن قیمتوں کے وقفہ یا سعت کے لیے تقریبی قیمت اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح ہوسکتی ہے۔

تب | $\frac{1}{6}$ لا$^3$ | < ۰٫۰۰۰۵ یعنے |لا| < $\sqrt[3]{۰٫۰۰۳}$ ‏، ۰٫۱۴۴۲ نیم قطری۔

پس جب لا = لا اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح ہے جبکہ لا کی قیمت ۰٫۱۴۴۲- اور ۰٫۱۴۴۲+ نیم قطریں کے درمیان ہے یا بالفاظِ دیگر ۸ء۲°- اور ۸ء۲°+ کے درمیان ہے۔

**توضیحی مثال (۲)** ٹیلر کے سلسلہ سے مس لا کا تقریبی اضافہ دریافت کرو جبکہ لا کی قیمت ۴۵° سے بدل کر ۴۶° ہوتی ہے۔

حل۔ ۵ مثال (۴) کی رو سے

مس (لا + ھ) = مس لا + قط$^2$ لا ھ + قط$^2$ لا مس لا ھ$^2$ + ......

اس مثال میں لا = ۴۵° اور مس ۴۵° = ۱، قط$^2$ لا = ۲

معہذا ھ = ۱° یا ۰٫۰۱۷۴۵ نیم قطری

چونکہ ف (لا + ھ) - ف (لا) = فَ (لا) ھ + فً (لا) $\frac{ھ^2}{2}$ + .....

تو بائیں جانب کے رکن کی صرف پہلی رقم لینے سے مس ۴۶° - مس ۴۵° = ۲ (۰٫۰۱۷۴۵) = ۰٫۰۳۴۹

اور ......... پہلی دو رقمیں ......... = ۰٫۰۳۴۹ + ۲ (۰٫۰۱۷۴۵)$^2$

= ۰٫۰۳۵۵

پس اس دوسرے تقریبی حساب سے مس ۴۶° کی قیمت ۱٫۰۳۵۵ برآمد ہوتی ہے

جو اعشاریہ کے چوتھے مقام تک صحیح ہے۔

## مثالیں

(۱) تقریبی ضابطہ جم طہ = ۱ - $\frac{\text{طہ}^2}{2}$ میں کس قدر صحت ہے جبکہ (ا) طہ = °۳۰ (ب) طہ = °۶۰ (ج) طہ = °۹ ؟ [جواب (ا) خطا > ۰۰۰۳۲ء۰
(ب) خطا > ۰۵ء۰ (ج) خطا > ۲۵ء۰

(۲) تقریبی ضابطہ قو$^{-1}$ = ۱ - لا میں کس قدر خطا شامل ہے جبکہ (ا) لا = ۱ء۰
(ب) لا = ۵ء۰ ؟

(۳) ثابت کرو کہ سلسلہ ∫ لوک (۱-لا) فرلا کی تقریبی قیمت
= ج - $\frac{\text{لا}^2}{2}$ - $\frac{\text{لا}^3}{6}$

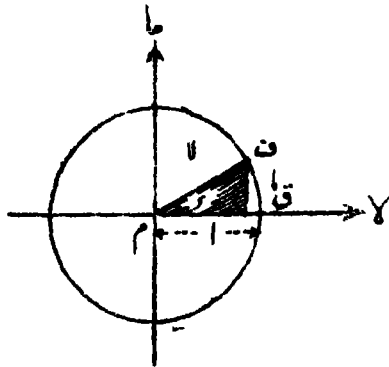
(۴) تقریبی ضابطہ مس ($\frac{\pi}{4}$ + طہ) = ۱ + ۲ طہ + ۲ طہ$^2$ کی تصدیق کرو۔ اور اس کی مدد سے مس °۴۶ اور مس °۵۰ محسوب کرکے صحت کا مقابلہ مثلثی جدولوں سے کرو۔

(۵) محدود تکملہ $\int_0^{\frac{1}{2}}$ لا$^{\frac{1}{2}}$ لوک (۱ + لا) فرلا دیا جاتا ہے۔
(ا) اس کی قیمت سلسلہ کے ذریعہ اعشاریہ کے چار مقاموں تک محسوب کرو۔
[جواب = ۰۰۹ء۰
(ب) اس کی قیمت راست تکمل کے ذریعہ اخذ کرکے (ا) کی تقریبی قیمت سے اس کا مقابلہ کرو۔

# اُنیسواں باب

## زائدی تفاعلوں کا تفرق اور تکمّل

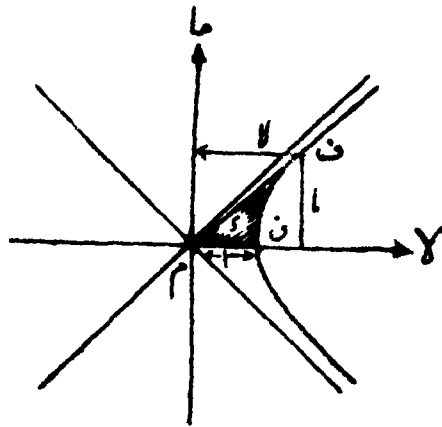
**۱** ۔ زائد تفاعلوں کی تعریف اور ان کے چند باہمی رشتے نصاب کی پہلی جلد کے آخری باب میں مختصراً بیان ہو چکے ہیں۔ یہ تفاعل بعض طبیعی اور میکانی مسائل کے حل میں بہت کار آمد ثابت ہوئے ہیں۔ یہاں ان کی ہندسی تعبیر کے بعد ان کے تفرق او تکمل کے نتائج قلمبند کیے جائینگے۔

**دائری اور زائدی تفاعلوں (یا نسبتوں) میں توافق** ۔ شکل ۹۳ میں اکائی نصف قطر م ق کا ایک دائرہ جس کی

شکل ۹۳

مساوات $لا^۲ + ما^۲ = ۱$ ہے کھینچا گیا ہے۔ منحنی کے نقطہ ف (محدّد لا، ما) میں سے ایک سمتی نیم قطر م ف بنایا گیا ہے۔

قطاع دائرہ ق م ف کے رقبہ کا دو چند عدداً زاویہ ی = زاویہ ق م ف کے نیم قطروں کی تعداد کے مساوی ہے۔ پس اس رقبہ کے دو چند کو، زاویہ ی کی ناپ یا پیمائش تصور کر سکتے ہیں۔ اور

$$جب\ ی = \frac{ما}{م ق} = ما،\ جم\ ی = \frac{لا}{م ق} = لا،\ مس\ ی = \frac{جب\ ی}{جم\ ی} = \frac{ما}{لا}،\ وغیرہ$$

شکل ۹۴ میں نصف قاطع محور م ق = ۱ کا ایک قائم یا متساوی الاضلاع قطع زائد کھینچا گیا ہے جس کی مساوات $لا^۲ - ما^۲ = ۱$ ہے۔

شکل ۹۴

منحنی کے نقطہ ف (محدّد لا، ما) میں سے ایک سمتی نیم قطر م ف بنایا گیا ہے۔ توافق کے لحاظ سے زائدی قطاع ق م ف کے رقبہ کے دو چند کو زاویہ ی = زاویہ ق م ف کی ناپ یا پیمائش زائدی سمتی نیم قطروں میں تصور کر سکتے ہیں۔ اور

$$ی\ کے\ زائدی\ جیب\ کی\ تعریف\quad جبز\ ی = \frac{ما}{م ق} = ما\ ہے$$

ی کے زائدی جیب التمام کی تعریف $\text{جمز ی} = \dfrac{\text{لا}}{\text{م ق}}$ لا سے

اور ” ” زائدی مماس ” ” $\text{مسز ی} = \dfrac{\text{جبز ی}}{\text{جمز ی}} = \dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}$ سے کی جاتی ہے

ان تفاعلوں یا نسبتوں کے متکافی علی الترتیب قمز ی، قطز ی اور ممز ی ہیں۔
ان کے مقلوب تفاعلوں کی بھی (دائری تفاعلوں) کی طرح تعریف کی جاتی ہے۔

$$\text{مثلاً}\ \text{ی} = \text{جبز}^{-1}\,\text{ما} = \text{جمز}^{-1}\,\text{لا} = \text{مسز}^{-1}\,\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}\ \text{وغیرہ}$$

زائدی تفاعلوں یا نسبتوں کو زاویہ کی رقموں میں ظاہر کرنے کے لیے یہ کیا جاتا ہے کہ

$$\text{چونکہ ی} = \text{دوچند رقبہ ق م ف} = \text{لا ما} - 2\int_{1}^{\text{لا}} \text{ما فرلا} = \text{لا ما} - 2\int_{1}^{\text{لا}} \sqrt{\text{لا}^2 - 1}\ \text{فرلا}$$

$$= \text{لا ما} - \left\{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1} - \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2-1}\right)\right\}_{1}^{\text{لا}} = \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2-1}\right)$$

$$\text{پس لا} + \sqrt{\text{لا}^2-1} = \text{لا} + \text{ما} = \text{و}^{\text{ی}}\ \text{اور}\ \dfrac{1}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \text{لا} - \text{ما} = \text{و}^{-\text{ی}}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \dfrac{\text{و}^{\text{ی}} + \text{و}^{-\text{ی}}}{2}\ ,\quad \text{ما} = \dfrac{\text{و}^{\text{ی}} - \text{و}^{-\text{ی}}}{2}$$

$$\text{اس لیے جبز ی} = \dfrac{\text{و}^{\text{ی}} - \text{و}^{-\text{ی}}}{2}\ \text{اور جمز ی} = \dfrac{\text{و}^{\text{ی}} + \text{و}^{-\text{ی}}}{2}$$

آخری دو ضابطوں کے ذریعہ دوسرے زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرلی جاتی ہیں جیسا پہلی جلد کے آخری باب میں بتایا گیا ہے۔ زائدی تفاعلوں کی جدولیں تیار کی گئی ہیں اور بوقت ضرورت مثلثی نسبتوں کی جدولوں کی طرح حساب میں ان سے استفادہ کیا جا سکتا ہے۔

شکل ۹۵ میں جبز ی، جمز ی اور مسز ی کی ترسیمیں دی گئیں ہیں۔

شکل ۹۵

زائدی تفاعلوں کی مصرحۂ بالا مساوانوں کے تفرق سے بآسانی بتایا جاسکتا ہے کہ

فر/فرلا جبز ء = جمز ء فر ء/فرلا

فر/فرلا جمز ء = جبز ء فر ء/فرلا

فر/فرلا مسنز ء = قطز² ء فر ء/فرلا

فر/فرلا ممز ء = - قمز² ء فر ء/فرلا

فر/فرلا قطز ء = - قطز ء مسنز ء فر ء/فرلا

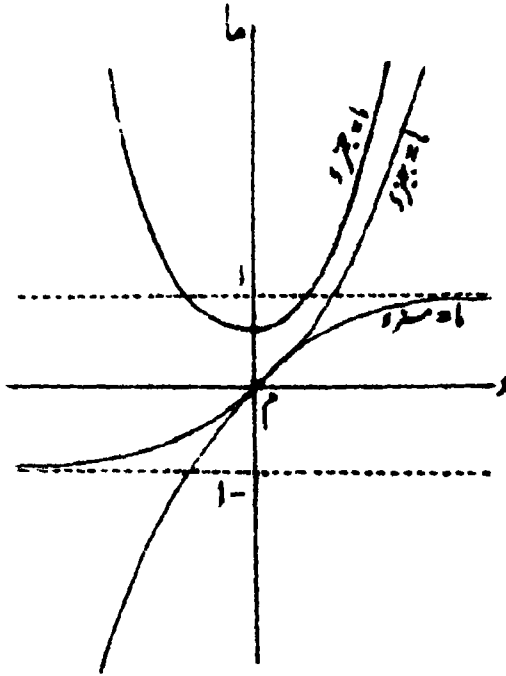
$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\,\text{قمز}\,\text{ی} = -\,\text{قمز}\,\text{ی}\;\text{ممز}\,\text{ی}\,\frac{\text{فی}}{\text{فلا}}$$

اور چونکہ $\text{جبز}^{-1}\text{ی} = \text{لوک}\left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^{۲}+۱}\right)$، $\text{جمز}^{-1}\text{ی} = \text{لوک}\left(\text{ی} \pm \sqrt{\text{ی}^{۲}-۱}\right)$

$$= \pm\,\text{لوک}\left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^{۲}-۱}\right)$$

$$\text{مسز}^{-1}\text{ی} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{ی}}{۱-\text{ی}}\text{،}\quad \text{ممز}^{-1}\text{ی} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ی}+۱}{\text{ی}-۱}$$

$$\text{قطز}^{-1}\text{ی} = \text{لوک}\,\frac{۱ \pm \sqrt{۱-\text{ی}^{۲}}}{\text{ی}}$$

$$= \pm\,\text{لوک}\,\frac{۱+\sqrt{۱-\text{ی}^{۲}}}{\text{ی}} \quad \text{اور}\quad \text{قمز}^{-1} = \text{لوک}\,\frac{۱+\sqrt{۱+\text{ی}^{۲}}}{\text{ی}}$$

ان کے تفرق سے آسانی بتایا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{فی}}\,\text{جبز}^{-1}\text{ی} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ی}^{۲}+۱}}\text{،}\quad \frac{\text{ف}}{\text{فی}}\,\text{جمز}^{-1}\text{ی} = \pm\frac{۱}{\sqrt{\text{ی}^{۲}-۱}}$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فی}}\,\text{مسز}^{-1}\text{ی} = \frac{۱}{۱-\text{ی}^{۲}}\text{،}\quad \frac{\text{ف}}{\text{فی}}\,\text{ممز}^{-1}\text{ی} = \frac{۱}{۱-\text{ی}^{۲}}$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فی}}\,\text{قطز}^{-1}\text{ی} = \mp\frac{۱}{\text{ی}\sqrt{۱-\text{ی}^{۲}}}\text{،}\quad \frac{\text{ف}}{\text{فی}}\,\text{قمز}^{-1}\text{ی} = -\frac{۱}{\text{ی}\sqrt{۱+\text{ی}^{۲}}}$$

پس

$$\int\frac{\text{فی}}{\sqrt{۱+\text{ی}^{۲}}} = \text{جبز}^{-1}\text{ی}\text{،}\quad \int\frac{\text{فی}}{\sqrt{\text{ی}^{۲}-۱}} = \text{جمز}^{-1}\text{ی}$$

$$\int\frac{\text{فی}}{۱-\text{ی}^{۲}} = \text{مسز}^{-1}\text{ی}\text{،}\quad -\int\frac{\text{فی}}{\text{ی}\sqrt{۱-\text{ی}^{۲}}} = \text{قطز}^{-1}\text{ی}$$

$$-\int\frac{\text{فی}}{\text{ی}\sqrt{۱+\text{ی}^{۲}}} = \text{قمز}^{-1}\text{ی}$$

## توضیحی مثالیں

(۱) $\int\frac{\text{فلا}}{\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}}}$ دریافت کرو

حل - $\text{لا} = \text{ا جبز ء}$ لکھو تب $\text{فرلا} = \text{ا جمز ء فرء}$ اور $\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ا}^{2}} = \text{ا جمز ء}$

$$\text{پس } \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ا}^{2}}} = \int \text{فرء} = \text{ء} = \text{جبز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

اس طرح $\text{لا} = \text{ا جمز ء}$ لکھنے سے $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}} = \int \frac{\text{ا جبز ء فرء}}{\text{ا جبز ء}} = \int \text{فرء} = \text{ء} = \text{جمز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

(۲) $\int \sqrt{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}$ معلوم کرو

حل - $\text{لا} = \text{ا جبزی}$ مانو تب $\text{فرلا} = \text{ا جمزی فری}$

اور چونکہ $\text{۱} + \text{جبز}^{2}\text{ی} = \text{جمز}^{2}\text{ی}$

$$\therefore \int \sqrt{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا} = \text{ا}^{2} \int \text{جمز}^{2}\text{ی فری} = \frac{\text{ا}^{2}}{2} \int (\text{جمز ۲ی} + 1)\ \text{فری} = \frac{\text{ا}^{2}}{4} \text{جبز ۲ی} + \frac{\text{ا}^{2}\text{ی}}{2}$$

$$= \frac{\text{ا}^{2}}{2} \text{جبزی . جمزی} + \frac{\text{ا}^{2}\text{ی}}{2} = \frac{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}}{2} + \frac{\text{ا}^{2}}{2} \text{جبز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{لا}^{2}}}{2} + \frac{\text{ا}^{2}}{2} \text{لوک} \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{ا}^{2}}}{\text{ا}}$$

(۳) $\int \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}$ معلوم کرو

حل - $\text{لا} = \text{ا جمزی}$ لکھو۔

تب $\text{فرلا} = \text{ا جبزی فری}$ اور چونکہ $\text{جمز}^{2}\text{ی} - 1 = \text{جبز}^{2}\text{ی}$

$$\int \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}\ \text{فرلا} = \text{ا}^{2} \int \text{جبز}^{2}\text{ی فری} = \frac{\text{ا}^{2}}{2} \int (\text{جمز ۲ی} - 1)\ \text{فری} = \frac{\text{ا}^{2}}{4} \text{جبز ۲ی} - \frac{\text{ا}^{2}\text{ی}}{2}$$

$$= \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}}{2} - \frac{\text{ا}^{2}}{2} \text{جمز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}}{2} - \frac{\text{ا}^{2}}{2} \text{لوک} \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}}}{\text{ا}}$$

## مثالیں

(۱) جبزلا کو میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ [ جواب $= \text{لا} + \frac{\text{لا}^{3}}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}^{5}}{\underline{|5}} + \dots$

(۲) جمزلا کو میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ [جواب = $۱ + \frac{\text{لا}^۲}{|۲} + \frac{\text{لا}^۴}{|۴} + \cdots$

(۳) ثابت کرو کہ $\int$ مسنز لا فرلا = لوک جمز لا + ج

(۴) ،، ،، $\text{جبنز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لا} - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{۱\cdot۳}{۲\cdot۴}\cdot\frac{\text{لا}^۵}{۵} - \frac{۱\cdot۳\cdot۵}{۲\cdot۴\cdot۶}\cdot\frac{\text{لا}^۷}{۷} + \cdots$ [$|\text{لا}| < ۱$]

(۵) ،، ،، $\text{مسنز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۵} + \cdots\cdots$

# بیسواں باب

# جزوی تفرّق

## ۱ - متعدد متغیروں کے تفاعل - تسلسل

ابتدائی ریاضی میں بھی ایسے تفاعلوں کی مثالیں بکثرت ملتی ہیں۔ جیسے
(۱) قایم مخروط کا حجم ح = $\frac{1}{3}$ ۳ لا² ما دو متبوع متغیروں کا تفاعل ہے
لا = دائری قاعدہ کا نصف قطر اور ما = اس کا ارتفاع۔
(۲) ترچھے مثلث کا رقبہ س = $\frac{1}{2}$ لا ما جب عہ تین متبوع متغیروں کا تفاعل ہے
لا اور ما مثلث کے دو ضلعے ہیں اور عہ اُن کا درمیانی زاویہ

رابطہ ی = ف (لا، ما) .......... (۱)

کو ایک سطح کے ذریعہ مرتسم کیا جا سکتا ہے۔ جو مساوات (۱) کا طریق ہے جبکہ لا، ما، ی قائم محدّد تصور کیے جاتے ہیں۔ یہ سطح دو متغیروں لا، ما کے تفاعل ف (لا، ما) کی ترسیم ہے۔

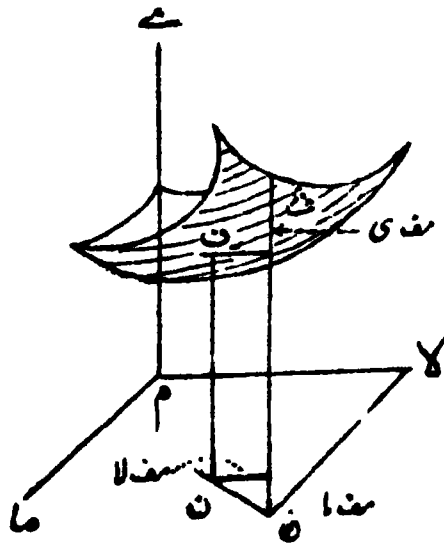
دو متبوع متغیروں لا، ما کے تفاعل ف (لا، ما) کی تعریف کی جاتی ہے کہ وہ لا = ا اور ما = ب کے لیے مسلسل ہے جبکہ

نہا ف (لا، ما) = ف (ا، ب) ....... (۲)
لا ← ا
ما ← ب

لا اور ما اپنی اپنی انتہاؤں ا اور ب کو خواہ کسی بھی طرح پہنچ جائیں۔

تسلسل کی اس تعریف کو مختصراً ان الفاظ میں ادا کر سکتے ہیں کہ ایک یا دونوں متغیروں میں اگر ایک بہت ہی خفیف تبدیلی واقع ہو تو اس سے تفاعل کی قیمت میں بھی بہت ہی خفیف تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

شکل ۹۶ میں رابطہ (۱) یعنی ی = ف (لا، ما) کی ہندسی توضیح کی گئی ہے۔سطح مرتسم کے نقطہ ف پر غور کرو جس کا لا = ا اور ما = ب

شکل ۹۶

ان متغیروں کے اضافوں کو مف لا اور مف ما سے نامزد کرو اور تفاعل ی کے متناظر اضافہ کو مف ی سے۔ نقطہ فَ کے محدد ہیں۔

لا + مف لا، ما + مف ما، ی + مف ی

ف پر تفاعل کی قیمت ہے

ی = ف (ا، ب) = ف ن

اگر تفاعل ف کے پاس مسلسل ہے تو مف لا اور مف ما خواہ کسی طرح بھی صفر کو بطور انتہا پہنچتے ہیں۔ مف ی بھی بطور انتہا صفر کو پہنچیگا۔ یعنے نقطہ فَ نقطہ ف کے پاس سطح کے اوپر خواہ کسی سمت سے بھی پہنچے فَ نَ انطباق کو پہنچیگا ف ن کے۔

دو سے زائد متغیروں کے مسلسل تفاعل کی تعریف بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔ ہم اس باب میں متغیروں کی صرف اُن قیمتوں پر غور اور بحث کرینگے جن کے لیے تفاعل مسلسل ہوتا ہے۔

## ۲۔ جُزوی مشتقات

رابطہ ی = ف (لا، ما) میں ہم ما کو بدلنے نہ دے کر صرف لا کو بدلنے دے سکتے ہیں، ایسی صورت میں ی صرف ایک متغیر لا کا تفاعل بن جاتا ہے اور پھر ہم معروف عام طریقہ سے اس کا مشتق حاصل کر سکتے ہیں۔

ی کے ایسے مشتق کو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ لکھتے ہیں اور کہتے ہیں کہ وہ ی کا جزوی مشتق ہے بلحاظ لا کے جبکہ ما مستقل رکھا جاتا ہے۔

[نوٹ۔ یورپ کی کتاب میں اس جزوی مشتق کو $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}$ لکھتے ہیں۔ اس طریق کتابت کا موجد یہودی مہندس یعقوبی (Karl Gustav Jacobi) ۱۸۰۴ء - ۱۸۵۱ء ہے]۔

اسی طرح $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ = ی کا جزوی مشتق بلحاظ ما جبکہ لا مستقل ہے۔

تین یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے جزوی مشتقات کے لیے ان کے مماثل علامتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ مصرحہ بالا طریق کتابت کے علاوہ اور بھی طریقے عموماً مروج ہیں۔ چنانچہ

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \text{ف} (\text{لا، ما}) = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = \text{ف}_{\text{لا}} (\text{لا، ما}) = \text{ف}_{\text{لا}} = \text{ی}_{\text{لا}}$$

اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\,\text{ف}\,(\text{لا، ما}) = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = \text{ف}_{۱}\,(\text{لا، ما}) = \text{ف}_{۱} = \text{ی}_{۱}$

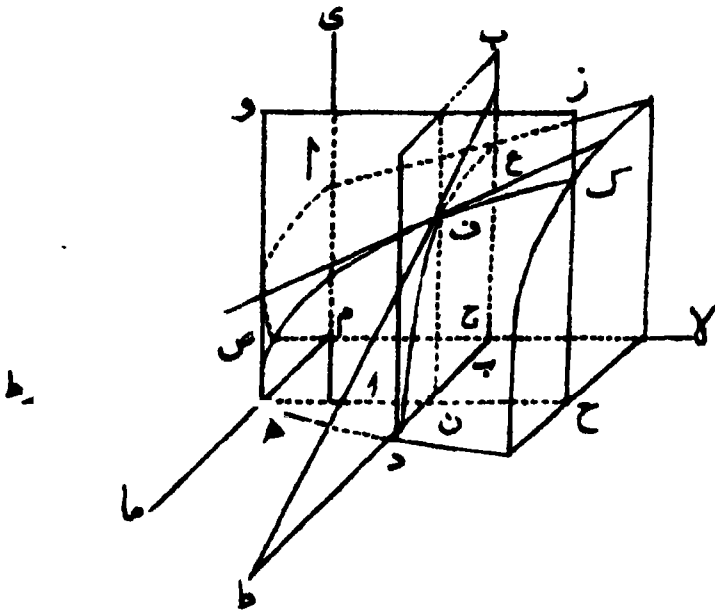
دو سے زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے مشتقات کے لیے ان کے مماثل کتابت کے طریقے مستعمل ہیں۔

## جزوی مشتقات کی ہندسی ترجمانی

فرض کرو کہ شکل ۹۷ کی سطح کی مساوات

ی = ف (لا، ما) ہے

سطح پر کے نقطہ ف میں سے (جہاں لا = ا اور ما = ب) ایک مستوی ھ و ز ح مستوی لا م سے نئے متوازی کھینچو۔ چونکہ اس مستوی کی مساوات

ما = ب ہے

شکل ۹۷

سطح کے ساتھ اس مستوی کے تقاطع سے جو منحنی ص ف ک بنتا ہے اس کی مساوات

ی = ف ( لا، ب ) ہوگی

اگر ھ و کو مے کا محور تصور کیا جائے اور ھ ح کو ی کا محور۔ اس مستوی میں $\frac{جف ی}{جف لا}$ سے وہی مراد ہوگی جو $\frac{فر ی}{فر لا}$ سے ہوتی ہے۔

$\frac{جف ی}{جف لا}$ = مس ن طف = منحنیِ تقاطع ص ک کی ڈھلان نقطہ ف پر ........ (۱)

اس طرح اگر مستوی ب ج د نقطہ ف میں سے مستوی ما م ے کے متوازی کھینچا جائے تو اس کی مساوات ہوگی

لا = ل

اور منحنیِ تقاطع د ف ع کے لیے $\frac{جف ی}{جف ما}$ سے مراد وہی ہوگی جو $\frac{فر ی}{فر ما}$ سے ہوتی ہے۔ پس

$\frac{جف ی}{جف ما}$ = ۔ مس ن طف = منحنیِ تقاطع د ع کی ڈھلان نقطہ ف پر ... (۲)

**توضیحی مثال۔** مجسم ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$ کے منحنیانِ تقاطع کی ڈھلانیں دریافت کرو، (۱) نقطہ لا = د پر جبکہ مستوی ما = ھ مجسم کو قطع کرتا ہے، (۲) نقطہ ما = ز پر جبکہ مستوی لا = و اس کو قطع کرتا ہے۔ دونوں صورتوں میں ی مثبت مانا جائے۔

حل۔ (۱) ما کو مستقل تصور کرنے سے

$\frac{۲لا}{ا^2} + \frac{۲ی}{ج^2} \cdot \frac{جف ی}{جف لا} = ۰ \quad \therefore \frac{جف ی}{جف لا} = - \frac{ج^2}{ا^2} \cdot \frac{لا}{ی}$

جب لا = د اور ما = ھ تو $$\frac{ی^2}{ج^2} = \frac{ا^2ب^2 - ب^2د^2 - ا^2ھ^2}{ا^2ب^2}$$

$$\therefore ی = \pm \frac{ج}{اب}\sqrt{ا^2ب^2 - ب^2د^2 - ا^2ھ^2}$$ اس لیے $$\frac{جف\,ی}{جف\,لا} = -\frac{ب\,ج\,د}{ا\sqrt{ا^2ب^2 - ب^2د^2 - ا^2ھ^2}}$$

(۲) لا کو مستقل تصور کرنے سے

$$\frac{۲\,ما}{ب^2} + \frac{۲\,ی}{ج^2}\cdot\frac{جف\,ی}{جف\,ما} = ۰ \quad \therefore \frac{جف\,ی}{جف\,ما} = -\frac{ج^2}{ب^2}\,\frac{ما}{ی}$$

جب لا = و اور ما = ز تو $$\frac{ی^2}{ج^2} = \frac{ا^2ب^2 - ب^2و^2 - ا^2ز^2}{ا^2ب^2}$$

$$\therefore ی = \pm \frac{ج}{اب}\sqrt{ا^2ب^2 - ب^2و^2 - ا^2ز^2}$$ اس لیے $$\frac{جف\,ی}{جف\,ما} = -\frac{ا\,ج\,ز}{ب\sqrt{ا^2ب^2 - ب^2و^2 - ا^2ز^2}}$$

# مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) اگر $ی = ا\,لا^2 + ب\,لا\,ما + ج\,ما^2 + د\,لا + ھ\,ما + و$

تو $$\frac{جف\,ی}{جف\,لا} = ۲ا\,لا + ب\,ما + د$$ اور $$\frac{جف\,ی}{جف\,ما} = ب\,لا + ۲ج\,ما + ھ$$

(۲) اگر $لا^4 - ۲لا^3ما + لا^2ما^2$ تو $$لا\frac{جف\,ی}{جف\,لا} + ما\frac{جف\,ی}{جف\,ما} = ۴ی$$

(۳) اگر $ذ = \frac{لا\,ما}{لا+ما}$ تو $$لا\frac{جف\,ذ}{جف\,لا} + ما\frac{جف\,ذ}{جف\,ما} = ذ$$

(۴) اگر $ذ = لا^2ما + ما^2ی + ی^2لا$ تو $$\frac{جف\,ذ}{جف\,لا} + \frac{جف\,ذ}{جف\,ما} + \frac{جف\,ذ}{جف\,ی} = (لا+ما+ی)^2$$

(۵) اگر $ذ = \frac{لا^3 - ما^3}{لا\,ما}$ تو $$لا\frac{جف\,ذ}{جف\,لا} + ما\frac{جف\,ذ}{جف\,ما} = ذ$$

(۶) مجسم مکافی نما ای = $\frac{لا^۲}{۲}$ + $ما^۲$ میں منحنی تقاطع کی ڈھلان معلوم کرو
(ا) نقطہ لا = ۲ پر جبکہ متقاطع مستوی ما = ۱ ہے (ب) نقطہ ما = ۱ پر
جبکہ متقاطع مستوی لا = ۲ ہے۔ [جواب (ا) ۲، (ب) ۲]
(۷) بتاؤ کہ سطح لا ما ای = ص۲ کا جب مستوی ما = ۱ سے تقاطع
ہوتا ہے تو نقطہ لا = ۱ پر تقاطع کے منحنی کی ڈھلان -۱ ہے۔

## ۳ - پورا تفرقہ - دو متغیروں لا، ما کے تفاعل

ی = ف (لا، ما) ........ (۱)

میں اگر لا، اور ما کو، علی الترتیب معـ لا اور معـ ما اضافہ حاصل
ہو اور اس سے ی کا متناظـر اضافہ معـ ی ہو تو

معـ ی = ف (لا + معـ لا، ما + معـ ما) - ف (لا، ما) ..... (۲)

اور ی کا پورا اضافہ کہلاتا ہے۔
(۲) کے بائیں جانب کے جملہ میں ف (لا، ما + معـ ما) جمع اور تفریق
کرنے سے

معـ ی = [ف (لا + معـ لا، ما + معـ ما) - ف (لا، ما + معـ ما)]

+ [ف (لا، ما + معـ ما) - ف (لا، ما)] ........... (۳)

(۳) کے بائیں جانب والے ہر دو تفاوتوں پر باب (۱۱) کے اوسط قیمت
کے مسئلہ (د) کے اطلاق سے پہلا تفاوت

ف (لا + معـ لا، ما + معـ ما) - ف (لا، ما + معـ ما)

= ف‌لا (لا + طہ معـ لا، ما + معـ ما) معـ لا ........ (۴)

[ ا = لا، معـ لا = معـ لا اور چونکہ لا بدلتا ہے جبکہ ما + معـ ما مستقل رہتا ہے

اس لیے جزوی مشتق بلحاظ ما حاصل ہوتا ہے]

اور دوسرا تفاوت

ف (لا' ما + مف ما) ۔ ف (لا' ما) = فہ (لا' ما + طہ مف ما) مف ما .. (۵)

[ ر = ما' مف ر = مف ما' اور چونکہ ما بدلتا ہے جبکہ لا مستقل رہتا ہے اس لیے جزوی مشتق بلحاظ ما حاصل ہوتا ہے]

(۳) میں (۴) اور (۵) سے تعویض کرنے سے

مف ی = فلا (لا + طہ مف لا' ما + مف ما) مف لا

+ فہ (لا' ما + طہ مف ما) مف ما ............ (۶)

جس میں طہ اور طہ مثبت کسریں ہیں۔

چونکہ فلا (لا' ما) اور فہ (لا' ما) متغیروں لا اور ما کے مسلسل تفاعل ہیں (۶) میں مف لا اور مف ما کے سرعلی الترتیب فلا (لا' ما) اور فہ (لا' ما) کو بطور انتہا پہنچینگے جبکہ مف لا اور مف ما بطور مشترک انتہاؤں کے صفر کو پہنچینگے۔ پس اگر صہ اور صہ ایسے صغارئے ہیں کہ

نہا صہ = ۰' نہا صہ = ۰
مف لا ← ۰
مف ما ← ۰

ہم لکھ سکتے ہیں فلا (لا + طہ مف لا' ما + مف ما) = فلا (لا' ما) + صہ...... (۷)

فہ (لا' ما + طہ مف ما) = فہ (لا' ما) + صہ ..... (۸)

اور (۶) ہوجاتا ہے

مف ی = فلا (لا' ما) مف لا + فہ (لا' ما) مف ما + صہ مف لا + صہ مف ما... (۹)

تب ہم ی کے پورے تفرق (= فر ی) کی حسب ذیل تعریف کرتے ہیں:

فر ی = فلا (لا' ما) مف لا + فہ (لا' ما) مف ما....... (۱۰)

(۱۰) کے بائیں جانب کا رکن (۹) کے بائیں جانب کے رکن کا اصل حصہ ہے یعنے فر ی ایک بہت ہی قریب کی قیمت ہے مف ی کی مف لا اور مف ما کی

یمتوں کے لیے۔ واضح ہے کہ اگر (۱۰) میں ی = لا تو فرلا = مف لا
ر ی = ما تو فرما = مف ما ۔ پس (۱۰) میں مف لا اور مف ما کے لیے
ے متناظر تفرقے تعویض کرنے سے ذیل کا اہم ضابطہ حاصل ہوتا ہے:

ر ی = ف لا (لا، ما) فرلا + ف ما (لا، ما) فرما = جف ی/جف لا فرلا + جف ی/جف ما فرما

= جف ف/جف لا فرلا + جف ف/جف ما فرما ..... (ب)

ین متغیروں کا تفاعل ہو تو اس کا پورا تفرقہ

فر ی = جف ی/جف لا فرلا + جف ی/جف ما فرما + جف ی/جف ی فری ... (ج)

طرح تین سے زائد خواہ کتنے بھی متغیر ہوں اُن کے تفاعل کا پورا تفرقہ
جا سکتا ہے۔ ضابطہ (ب) کی ہندسی ترجمانی آئندہ باب میں
ائیگی۔

**توضیحی مثال (۱)** تفاعل ی = لا۲ ۔ لا ما + ما۲ کے لیے مف ی اور

محسوب کرو جبکہ لا = ۴، ما = ۲۔، مف لا = ۲ء۰، مف ما = ۔ ۳ء۰

حل۔ ی + مف ی = (لا + مف لا)۲ ۔ (لا + مف لا) (ما + مف ما) + (ما + مف ما)۲

= لا۲ + ۲ لا مف لا + (مف لا)۲ ۔ لا ما ۔ لا مف ما ۔ ما مف لا ۔ مف لا مف ما

+ ما۲ + ۲ ما مف ما + (مف ما)۲

ب اس میں سے ی = لا۲ ۔ لا ما + ما۲ کو تفریق کرنے سے

مف ی = ۲ لا مف لا + ۲ ما مف ما ۔ لا مف ما ۔ ما مف لا ۔ مف لا مف ما

+ (مف لا)۲ + (مف ما)۲

ں جملہ میں دی ہوئی قیمتیں تعویض کرنے سے مف ی کی قیمت ۲۔ ۳ء
آمد ہوتی ہے۔

$$ر = \frac{جف\,ر}{جف\,لا} فرلا + \frac{جف\,ر}{جف\,ما} فرما = (۲لا - ما)\,فرلا + (-لا + ۲ما)\,فرما$$

ہوئی قیمتیں تعویض کرنے سے اور یہ یاد رکھکر کہ مف لا = فرلا اور مف ا = فرما
ی قیمت ۶ ء ۳ برآمد ہوتی ہے۔

## توضیحی مثال (۲)۔

$ر = قط^{-۱} \frac{ما}{لا}$، فرر دریافت کرو۔

$$فرر = \frac{جف\,ر}{جف\,لا} فرلا + \frac{جف\,ر}{جف\,ما} فرما$$

$$= \left\{\frac{۱}{\frac{ما}{لا}\sqrt{\left(\frac{ما}{لا}\right)^۲ - ۱}} \frac{جف\left(\frac{ما}{لا}\right)}{جف\,لا}\right\} فرلا + \left\{\frac{۱}{\frac{ما}{لا}\sqrt{\left(\frac{ما}{لا}\right)^۲ - ۱}} \frac{جف\left(\frac{ما}{لا}\right)}{جف\,ما}\right\} فرما$$

$$= -\left\{\frac{لا^۲}{ما\sqrt{ما^۲ - لا^۲}} \left(\frac{ما}{لا^۲}\right)\right\} فرلا + \left\{\frac{لا^۲}{ما\sqrt{ما^۲ - لا^۲}} \left(\frac{۱}{لا}\right)\right\} فرما$$

$$= \frac{لا\,فرما - ما\,فرلا}{ما\sqrt{ما^۲ - لا^۲}} \quad \text{جواب}$$

# مثالیں

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا پورا تفرق معلوم کرو۔

۱) $ر = \frac{لا + ما}{لا - ما}$ [جواب $فرر = \frac{-۲ما\,فرلا + ۲لا\,فرما}{(لا - ما)^۲}$

۲) $ر = عہ\,بہ\,جہ$ [جواب $فرر = بہ\,جہ\,فرعہ + جہ\,عہ\,فربہ + عہ\,بہ\,فرجہ$

۳) $سر = فہ\,جب\,سہ$ [جواب $فرسر = جب\,سہ\,فرفہ + فہ\,جب\,سہ\,فرسہ$

۴) اگر $لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ر^۲$ تو بتاؤ کہ $فری = \frac{لا\,فرلا + ما\,فرما}{ی}$

(۵) تفاعل ی = مس$^{-1}$ (ما/لا) تو بتاؤ کہ فری = $\frac{\text{لا فرما - ما فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

## ۴ - پورے اضافہ کی تقریبی قیمت خفیف خطائیں

ضابطے (ب) اور (ج) اضافہ مف ی کی تقریبی قیمت محسوب کرنے میں استعمال کیے جاتے ہیں۔ معہذا جبکہ لا اور ما کی قیمتیں بذریعہ پیمایش یا تجربہ معلوم کی جاتی ہیں (اور اس لیے ان میں خفیف خطائیں مف لا اور مف ما نقص آلات یا نقص مشاہدہ کی وجہ سے سرایت کر جاتی ہیں) تو اس طرح سے تفاعل ی کی قیمت میں صورت پذیر ہونے والی خطا کی تقریبی قیمت ضابطہ (ب) یا (ج) کے ذریعہ دریافت کر لی جا سکتی ہے۔

**توضیحی مثال** - ایک ترچھے مستوی مثلث کے ضلعوں کے طول پیمائش سے ۶۰ فٹ اور ۸۰ فٹ دریافت ہوئے اور ان کا درمیانی زاویہ ۶۰°۔ لیکن ضلعوں کی پیمایش میں ۰.۱ فٹ اعظم خطا کی گنجائش تھی اور زاویہ کی پیمایش میں $\frac{1}{2}$ درجہ کی۔ ان پیمایشوں کی مدد سے مثلث کے تیسرے ضلع کا طول محسوب کرنے میں کیا تقریبی اعظم خطا اور فی صدی خطا ہو سکتی ہے معلوم کرو۔

حل - جیب التمام کے کلیہ سے ی$^2$ = لا$^2$ + ما$^2$ - ۲ لا ما جم ھ . . . . (۱)

یہاں لا = ۶۰ فٹ ما = ۸۰ فٹ ھ = ۶۰° = $\frac{\pi}{3}$ ، فرلا = فرما = ۰.۱

فرھ = ۰.۰۰۸۷۳ نیم قطری

(۱) کے جزوی تفرق سے $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{لا - ما جم ھ}}{\text{ی}}$ ، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{ما - لا جم ھ}}{\text{ی}}$ ،

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ھ}} = \frac{\text{لا ما جب ھ}}{\text{ی}}$

پس ضابطہ (ج) کی رو سے فری = $\frac{\text{(لا - ما جم ھ) فرلا + (ما - لا جم ھ) فرما + لا ما جب ھ فرھ}}{\text{ی}}$

دی ہوئی قیمتیں تعویض کرنے سے فری = $\frac{36.29 + 5 + 2}{72.1}$ = ۰.۶ فٹ

∴ فی صدی خطا = $۱۰۰ \frac{\text{فری}}{\text{ی}}$ = ۰٫۸ جواب

# مثالیں

(۱) دو برقی مزاحمتیں ز۱، ز۲ ہم نوازی جوڑی گئی ہیں۔ ان کی معادل مزاحمت ز = $\left(\frac{1}{\frac{1}{\text{ز}_1}+\frac{1}{\text{ز}_2}}\right)$ کی حسابی تعیین میں ممکنہ فی صدی خطا دریافت کرو جبکہ ز۱، ز۲ کی پیمایش میں ± ۱ فی صد کی خطا واقع ہوتی ہے۔ [جواب = ۱ فی صد

(۲) جب کوئی جسم حالت سکون سے جاذبہ زمین کے زیر اثر گرتا ہے تو اس کا و ثانیوں میں طے کیا ہوا فاصلہ س = $\frac{1}{2}$ج و۲ و کی قیمت پیمایش سے ۱۰ ثانیے معلوم ہوتی ہے اور اس میں ایک ثانیہ کی خطا کا امکان ہے۔ ج جاذبہ زمین کی تعیین میں ۰٫۱ فی صد خطا ممکن ہے بتاؤ کہ س کے محسوب کرنے میں ممکنہ فی صد خطا ۱٫۴ ہے۔

(۳) ایک سطح ی = $\frac{\text{لا ما}}{\text{لا + ما}}$ دی گئی ہے۔ اگر نقطہ لا = ما = ۴ پر لا اور ما ہر ایک بقدر $\frac{1}{10}$ بڑھ جائیں تو ثابت کرو کہ ی کی تقریبی تبدیلی + $\frac{1}{20}$ ہے۔

(۴) ایک ٹھوس فلزی مستطیل منشور کے کنارے ۲، ۳ اور ۴ فٹ لمبے ہیں۔ تپش کی زیادتی سے یہ کنارے ۰٫۰۰۱ فٹ فی فٹ فی دقیقہ بڑھتے ہیں۔ بتاؤ کہ ٹھوس مجسم کے حجم میں اضافہ کی شرح ۰٫۰۷۲ کعب فٹ فی دقیقہ ہے۔

(۵) ایک جسم کی کثافت اضافی ضابطہ $\frac{\text{و}_1}{\text{و}_1-\text{و}_2}$ کے ذریعہ دریافت کی جاتی ہے۔ جس میں اس کا وزن خلاء میں و۱ ہے اور پانی میں و۲۔ اگر و۱ = ۹ پونڈ اور و۲ = ۵ مشخص ہوئے ہیں اور اول الذکر قیمت کی تعیین میں ۰٫۰۱ پونڈ اعظم خطا اور ثانی الذکر کی تعیین میں ۰٫۰۲ پونڈ اعظم خطا کا امکان ہے تو بتاؤ کہ کثافتِ اضافی محسوب کرنے میں اعظم خطا تقریباً ۰٫۰۱۴۴ ہے۔

**۵۔ پورے مشتقات۔ شرحیں۔** اب فرض کرو کہ

ی = ف (لا، ما) ........ (۱) میں لا اور ما متبوع متغیر نہیں ہیں اور مثال کے طور پر دونوں ایک تیسرے متغیر و کے تفاعل ہیں۔

یعنی لا = فہ (و) اور ما = سہ (و) ........ (۲)

جب یہ قیمتیں (۱) میں تعویض کی جاتی ہیں تو ی ایک ہی متغیر و کا تفاعل بن جاتا ہے۔ اور اس کے مشتقات طریقۂ معروف سے دریافت ہو سکتے ہیں۔ چنانچہ

فری = (فری / فرو) فرو، فرلا = (فرلا / فرو) فرو، فرما = (فرما / فرو) فرو ........ (۳)

ضابطہ (ب) اس مفروضہ پر حاصل کیا گیا تھا کہ لا اور ما متبوع متغیر تھے۔ اب ہم بتائینگے کہ یہ ضابطہ حالیہ صورت میں بھی درست ہے۔

فصل ۳ کے رابطہ (۹) کے جانبین کے ارکان کو مف لا پر تقسیم کرو۔ طریقہ کتابت تبدیل کرکے اب ہم لکھ سکتے ہیں

(مف ی / مف و) = (جف ی / جف لا)(مف لا / مف و) + (جف ی / جف ما)(مف ما / مف و) + (صہ (مف لا / مف و) + صَہ (مف ما / مف و)) .. (۴)

جبکہ مف و ← ۰، مف لا ← ۰ اور مف ما ← ۰۔ پس

نہا صہ = ۰۔ نہا صَہ = ۰۔
(مف و ← ۰)

پس جبکہ مف و ← ۰۔ (۴) ہو جاتا ہے۔

(فری / فرو) = (جف ی / جف لا)(فرلا / فرو) + (جف ی / جف ما)(فرما / فرو) ........ (۵)

جانبین کے ارکان کو فرو سے ضرب دینے اور (۳) کو استعمال کرنے سے ضابطہ (ب) حاصل ہو جاتا ہے۔ بالفاظ دیگر ضابطہ (ب) اس صورت میں بھی درست ہے جبکہ لا اور ما ایک تیسرے متغیر

کے تفاعل ہیں ۔
اسی طرح اگر ی = ف (لا، ما، ی) اور لا، ما، ی سب کے سب و کے تفاعل ہیں تو

$$\frac{فر ی}{فر و} = \frac{جف ی}{جف لا} \frac{فر لا}{فر و} + \frac{جف ی}{جف ما} \frac{فر ما}{فر و} + \frac{جف ی}{جف ی} \frac{فر ی}{فر و} \quad \ldots \quad (ھ)$$

ایسا ہی تین سے زائد متغیروں کے لیے بھی
(د) میں ہم فرض کرسکتے ہیں کہ و = لا تب ما تفاعل ہے لا کا اور ی ایک ہی متغیر لا کا تفاعل ہے ۔ جس سے حاصل ہوتا ہے ۔

$$\frac{فر ی}{فر لا} = \frac{جف ی}{جف لا} + \frac{جف ی}{جف ما} \frac{فر ما}{فر لا} \quad \ldots\ldots \quad (و)$$

اسی طرح (ھ) سے جبکہ ما اور ی دونوں لا کے تفاعل ہیں، حاصل ہوتا ہے ۔

$$\frac{فر ی}{فر لا} = \frac{جف ی}{جف لا} + \frac{جف ی}{جف ما} \frac{فر ما}{فر لا} + \frac{جف ی}{جف ی} \frac{فر ی}{فر لا} \quad \ldots\ldots \quad (ز)$$

یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ $\frac{جف ی}{جف لا}$ اور $\frac{فر ی}{فر لا}$ ایک دوسرے سے بالکل مختلف مفہوم رکھتے ہیں ۔ جزوی مشتق $\frac{جف ی}{جف لا}$ اس مفروضہ پر بنتا ہے کہ مخصوص متغیر لا ہی اکیلا بدلتا ہے ۔ باقی دوسرے تمام متغیر بدلنے نہیں دیے جاتے لیکن

$$\frac{فر ی}{فر لا} = \underset{مف لا \leftarrow ۰}{نہا} \left( \frac{مف ی}{مف لا} \right)$$

جس میں مف لا پورا مشتق ہے ی کا تمام متغیروں کی تبدیلیوں کی وجہ سے جو متبوع متغیر میں مف لا تبدیلی کے باعث پیدا ہوتی ہیں ۔ جزوی مشتقات سے امتیاز کی خاطر $\frac{فر ی}{فر و}$، $\frac{فر ی}{فر لا}$ پورے مشتق کہلاتے ہیں علی الترتیب بلحاظ و اور لا کے

یہ جاننا چاہیے کہ $\frac{جف ی}{جف لا}$ کسی بھی نقطہ (لا، ما) کے لیے ایک بالکلیہ معین محدود

قیمت رکھتا ہے۔ لیکن $\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}$ نہ صرف نقطہ (لا، ما) کے تابع ہے بلکہ اس خاص سمت کے بھی جو اس نقطہ تک پہنچنے کے لیے منتخب کی جاتی ہے۔

**توضیحی مثال** - ء = و^لا (ما - ی)، ما = ۲ جب لا، ی = جم لا دیے جاتے ہیں، $\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔

**حل** - $\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}$ = ۲ و^لا (ما - ی)، $\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}$ = و^لا، $\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}$ = - و^لا،

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۲ جم لا، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = - جب لا - ان کو ضابطہ (۲۶) میں تعویض کرنے سے

$\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}$ = ۲ و^لا (ما - ی) + ۲ و^لا جم لا + و^لا جب لا = و^لا (۲^۲ + ۱) جب لا = جواب

## ۶۔ تضمینی تفاعلوں کا تفرق۔

مساوات ف (لا، ما) = ۰ ........ (۱) لا کی بحیثیت تفاعل ما یا ما کی بحیثیت تفاعل لا تعریف کرتی ہے۔ لا اور ما کی اس مساوات میں تمام رقمیں ایک ہی جانب منتقل کردی گئی ہوتی ہیں۔
فرض کرو

ء = ف (لا، ما) . . . (۲)

تب ضابطہ (۹) سے $\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

اور ما، لا کا ایک اختیاری تفاعل ہے۔ اب فرض کرو ما، لا کا وہ تفاعل ہے جو (۱) کی شرط کو پوری کرتا ہے

تب ر = ۰ اور فر ر = ۰ اور اس لیے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

پس

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}}{\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}} \quad \ldots \left[\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \neq 0\right] \ldots (\text{ح})$$

اس ضابطہ کے ذریعہ تضمینی تفاعلوں کا سہولت کے ساتھ تفرق عمل میں آسکتا ہے۔

**توضیحی مثال۔** ضابطہ (ح) کے ذریعہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ معلوم کرو جبکہ

$$\text{لا}^3 - \text{لا}^2\,\text{ما} + \text{لا}\,\text{ما}^2 + \text{ما}^3 = 0$$

حل۔

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = 3\,\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2 ،\quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = -\text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ما} + 3\,\text{ما}^2$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{3\,\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ما} - 3\,\text{ما}^2} = \text{جواب}$$

فا (لا، ما، ی) = ۰ ......... (۴) ایک سطح ہے

فرض کرو لا = فہ (و)، ما = کہ (و)، ی = سہ (و) ........... (۵)

ایسے تفاعل ہیں جن سے (۴) کی متماثلاً تصدیق ہوتی ہے۔ تب مساواتیں (۵) سطح (۴) پر کے منحنی کی تضمینی مساواتیں ہیں۔

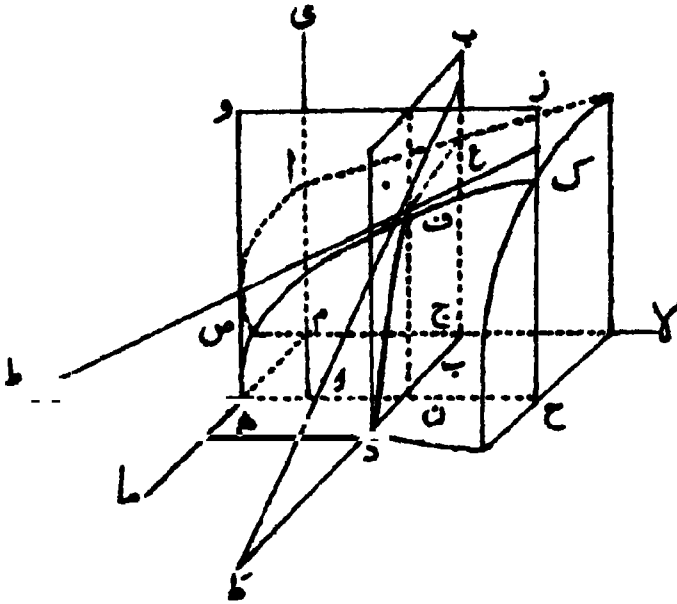
$$\text{اگر ر} = \text{فا}\,(\text{لا، ما، ی}) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

تب (۵) کو استعمال کرنے سے ر = ۰ اور فر ر = ۰ پس ضابطہ (تم) ہوجاتا ہے۔

$$0 = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}$$

$$+ \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر و}} \quad \ldots\ldots (7)$$

سطح (۴) پر کے منحنی کے لیے جس کی تعریف (۵) سے ہوتی ہے۔ یہاں ہم دو خاص مثالوں پر غور کرینگے۔ شکل ۹۷ میں منحنی ص ف ک سطح کی مستوی تراش ہے

شکل ۹۸

جو مستوی ما = مستقل سے بنتی ہے۔ پس (۷) میں

$$\text{فرما} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرو}} = 0.$$

(۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\frac{\text{فری}}{\text{فرو}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}} = -\,\frac{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}} \quad \cdots\cdots \quad (۹)$$

لیکن اس مساوات میں بیدھے جانب کا رکن منحنی ص ف ک کی ڈھلان ہے۔ پس

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = -\,\frac{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{ط})$$

اسی طریقہ پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = - \frac{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ی)}$$

ضابطوں (ط) اور (ی) کی یوں ترجمانی کی جاتی ہے: مساواتوں کے سیدھے جانب کے ارکان میں ی وہ تفاعل ہے لا اور ما کا جو (۴) کی شرط کو پوری کرتا ہے۔ بائیں جانب سے ارکان میں فا تین متغیروں لا، ما، ی کا تفاعل ہے جو (۴) کے سیدھے جانب کے رکن میں موجود ہے۔

**توضیحی مثال۔** مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} - 1 = 0$ سے ی کی بطور لا اور ما کے ایک تضمینی تفاعل کے تعریف کی جاتی ہے۔ اس تفاعل کے جزوی مشتقات معلوم کرو۔

حل۔ $\text{فا} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} - 1 = 0$

پس $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \frac{2\,\text{لا}}{\text{ا}^2}$، $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{2\,\text{ما}}{\text{ب}^2}$، $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} = \frac{2\,\text{ی}}{\text{ج}^2}$

ضابطوں (ط) اور (ی) میں تعویض کرنے سے

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{ج}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{ی}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = - \frac{\text{ج}^2\,\text{ما}}{\text{ب}^2\,\text{ی}} = \text{جواب}$$

(نوٹ ۲ کی توضیحی مثال سے اس کا مقابلہ کیا جائے)

# مثالیں

(۱) $\text{د} = \frac{\text{لا} + 2\,\text{ما}}{\text{ما} - 2\,\text{لا}}$، $\text{لا} = \text{و}^2$، $\text{ما} = \text{و}^3$ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر د}}{\text{فر و}} = \frac{-10}{(2\,\text{و}^2 - \text{و}^3)^2}$

(۲) $\text{لا}^3 - \text{لا}^2\,\text{ما} + \text{لا}\,\text{ما}^2 + \text{ما}^3 = 0$ ضابطہ (ح) استعمال کر کے بتاؤ کہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{3\,\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ما} - 3\,\text{ما}^2}$$

(۳) مساوات $لا^۳ + ما^۳ - ۶ لا ما - ۱۹ = ۰$ صحیح ہے جبکہ لا = ۲، ما = -۱
بتاؤ کہ $\frac{فر ما}{فر لا} = ۲$

(۴) $لا^۳ + ما^۳ + ی^۳ - ۳ لا ما ی = ۰$۔ بتاؤ کہ $\frac{جف ی}{جف لا} = - \frac{ما + ی}{لا + ما}$

اور $\frac{جف ی}{جف ما} = - \frac{لا + ی}{لا + ما}$

(۵) ایک نقطہ سطح $لا^۲ + لا ما + ما^۲ - ی^۲ = ۰$ اور مستوی $لا - ما + ۲ = ۰$ کے تقاطع کے منحنی پر حرکت کرتا ہے۔ لا کی قیمت جب ۳ ہے اور وہ ۲ اکائیاں فی ثانیہ بڑھتا ہے تو ثابت کرو کہ (ا) ما کی تبدیلی کی شرح ۲ اکائیاں فی ثانیہ ہے (ب) کی تبدیلی کی شرح $۳\frac{۳}{۷}$ اکائیاں فی ثانیہ ہے، اور (ج) نقطہ کی رفتار حرکت ۴٫۴۴ اکائیاں فی ثانیہ ہے۔

(۶) کامل گیس کی اختصاصی مساوات د ح = م ت ہے جس میں د، ح اور ت علی الترتیب گیس کے دباؤ، حجم اور تپش ہیں اور م گیسی مستقل ہے۔ ایک خاص آن میں گیس کی ایک معینہ کمیت کا حجم ۲۰ مکعب فٹ ہے اور اس کا دباؤ ۳۰ پونڈ فی مربع انچ۔ م کو ۹۶ مان کر دریافت کرو کہ گیس کی تپش کس شرح سے بدلتی ہے جبکہ اس کا حجم بشرح $\frac{۱}{۲}$ مکعب فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے اور دباؤ بشرح $\frac{۱}{۱۰}$ پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ گھٹتا ہے۔ [جواب = بشرح $\frac{۱}{۱۲}$ درجہ فی ثانیہ

## ے۔ متغیروں کی تبدیلی۔

اگر ر = ف(لا، ما) . (۱)
میں متغیر بدل دیے جاتے ہیں بذریعہ استحالہ ( Transformation )

$$لا = فہ (ر، س)، \quad ما = سہ (ر، س) \quad . \quad . \quad (۲)$$

تو ر کے جزوی مشتقات بلحاظ نئے متغیروں ر اور س کے ضابطہ (د) سے دریافت کر لیے جا سکتے ہیں کیونکہ اگر ہم س کو بدلنے نہ دیں تو

لا اور ا (۲) میں صرف ر ہی کے تفاعل ہوتے ہیں ۔ پس

$$\frac{\text{جف ى}}{\text{جف ر}} = \frac{\text{جف ى}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}} + \frac{\text{جف ى}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ر}} \qquad (۳)$$

اب تمام مشتقات بلحاظ ر جزوی ہیں ۔

اسی طرح
$$\frac{\text{جف ى}}{\text{جف س}} = \frac{\text{جف ى}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف ى}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}} \quad \ldots \qquad (۴)$$

بطور خاص فرض کرو کہ استحالہ ہے $\text{لا} = \text{لاَ} + \text{ھ}$ اور $\text{ما} = \text{ماَ} + \text{ک}$ . (۵)

نئے متغیر لاَ اور ماَ ہیں اور ھ اور ک مستقل ۔ تب

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لاَ}} = ۱ ،\quad \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ماَ}} = ۰ ،\quad \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لاَ}} = ۰ ،\quad \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ماَ}} = ۱$$

اور (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ى}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ى}}{\text{جف لاَ}} ،\quad \frac{\text{جف ى}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ى}}{\text{جف ماَ}} \quad \ldots\ldots \qquad (۶)$$

پس استحالہ (۵) سے جزوی مشتقات میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی ۔

اگر لا اور ما کی (۵) والی قیمتیں (۱) میں تعویض کی جائیں تو نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\text{ى} = \text{ف}(\text{لا، ما}) = \text{فا}(\text{لاَ، ماَ}) \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (۷)$$

اور اب (۶) کے نتائج لکھے جا سکتے ہیں

$$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا، ما}) = \text{فا}_{\text{لاَ}}(\text{لاَ، ماَ}) ،\quad \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا، ما}) = \text{فا}_{\text{ماَ}}(\text{لاَ، ماَ}) \quad \ldots \qquad (۸)$$

## ۸ ۔ اعلیٰ رتبہ کے مشتقات

اگر $\text{ى} = \text{ف}(\text{لا، ما})$ ... (۱)

تب
$$\frac{\text{جف ى}}{\text{جف لا}} = \text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا، ما}) ،\quad \frac{\text{جف ى}}{\text{جف ما}} = \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots\ldots \qquad (۲)$$

یہ خود بھی لا اور ما کے تفاعل ہیں اور اس لیے تفرق کیے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ اس میں کے پہلے تفاعل کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں ۔

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف لا}^2} = \text{ف}_{\text{لالا}}(\text{لا، ما})\text{،}\quad \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ما جف لا}} = \text{ف}_{\text{مالا}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots\ldots (۳)$$

اسی طرح (۲) میں کے دوسرے تفاعل کو تفرق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف لا جف ما}} = \text{ف}_{\text{لاما}}(\text{لا، ما})\text{،}\quad \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ما}^2} = \text{ف}_{\text{ماما}}(\text{لا، ما}) \qquad (۴)$$

(۳) اور (۴) میں دوسرے رتبہ کے بظاہر چار مشتقات ہیں۔ لیکن یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف لا جف ما}} \quad \ldots\ldots (\text{ک})$$

صرف شرط یہ ہے کہ متعلقہ مشتقات مسلسل ہوں۔ بالفاظ دیگر لا اور ما کے لحاظ سے متواتر جزوی تفرق جب عمل میں آتا ہے تو عمل تفرق کی ترتیب کا نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ چنانچہ ف (لا، ما) کے دوسرے رتبہ کے صرف تین جزوی تفرق ہوتے ہیں۔ یعنے

$$\text{ف}_{\text{لالا}}(\text{لا، ما})\text{،}\ \text{ف}_{\text{لاما}}(\text{لا، ما}) = \text{ف}_{\text{مالا}}(\text{لا، ما})\text{،}\ \text{ف}_{\text{ماما}}(\text{لا، ما}) \qquad (۵)$$

اس سے اعلیٰ درجہ کے مشتقات کے متعلق بھی اس قاعدہ کو توسیع دی جا سکتی ہے۔ مثلاً چونکہ ضابطہ ک کی صحت مان لی گئی ہے

$$\frac{\text{جف}^3\,\text{د}}{\text{جف لا}^2\,\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف لا جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}^3\,\text{د}}{\text{جف لا جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا جف ما}}\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\right)$$

$$= \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما جف لا}}\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}^3\,\text{د}}{\text{جف ما جف لا}^2}$$

تین یا اس سے زائد متغیروں کے تفاعلوں کے بھی اُن کے مماثل نتائج صادق آتے ہیں۔ طالب علم چند مثالیں لے کر آزما سکتا ہے۔

# مثالیں

(۱) $\text{ی} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} - \text{ما}}$ کے دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بتاؤ۔

[جواب $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{۴ما}}{(\text{لا} - \text{ما})^3}$ ، $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{-\text{۲}(\text{لا} + \text{ما})}{(\text{لا} - \text{ما})^3}$ ، $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = -\frac{\text{۴لا}}{(\text{لا} - \text{ما})^3}$ ]

(۲) اگر ف (لا، ما) = جب لا لوک (ما + ۱) + جم ما لوک (۱ − لا) تو ثابت کرو کہ

$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{۰،۰}) = -\text{۱}$ ، $\text{ف}_{\text{ما}}(\text{۰،۰}) = \text{۰}$ ، $\text{ف}_{\text{لالا}}(\text{۰،۰}) = -\text{۱}$ ، $\text{ف}_{\text{ماما}}(\text{۰،۰}) = -\text{۱}$ ، $\text{ف}_{\text{لاما}}(\text{۰،۰}) = \text{۰}$

(۳) اگر $\text{د} = (\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 + \text{ج ی}^2)$ تو بتاؤ کہ

$$\frac{\text{جف}^3\text{د}}{\text{جف لا}^2\,\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}^3\text{د}}{\text{جف لا جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^3\text{د}}{\text{جف ما جف لا}^2}$$

(۴) اگر $\text{د} = \text{لوک}\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ما}^2} = \text{۰}$

(۵) اگر $\text{د} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2}}$ تو بتاؤ کہ $\frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ی}^2} = \text{۰}$

(۶) اگر $\text{د} = \text{ی مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ تو بتاؤ کہ $\frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ی}^2} = \text{۰}$

(۷) اگر د = ف (لا، ما) اور لا = ص جم طہ، ما = ص جب طہ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} = \text{جم طہ}\frac{\text{جف د}}{\text{جف ص}} - \frac{\text{جب طہ}}{\text{ص}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$$

اور

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}} = \text{جب طہ}\frac{\text{جف د}}{\text{جف ص}} + \frac{\text{جم طہ}}{\text{ص}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$$

# اکیسواں باب

# ضعفی تکملے

## ۱ ۔ جزوی اور متواتر تکمل

۔ تفرقی احصا میں جس طرح جزوی تفرق عمل میں آتا ہے اسی طرح تکملی احصا میں اس کا معکوس عمل جزوی تکمل ہے ۔ جزوی تکمل سے مراد یہ ہے کہ دو یا اس سے زائد متبوع متغیروں والے تفرقی جملہ کا تکملہ دریافت کیا جائے اس طریقہ پر کہ پہلے ان متغیروں میں سے صرف ایک کو متغیر اور باقی سبھوں کو مستقل مان کر جملہ تکمل کیا جائے اور پھر باقی ماندہ متغیروں میں سے دوسرے ایک کو متغیر اور بقیہ کو مستقل مان کر حاصل شدہ جملہ تکمل کیا جائے یہاں تک کہ باری باری سے سب متغیر ختم ہو جائیں۔ ایسے تکملے ضعفی متغیروں کی تعداد کے لحاظ سے دُہرے تہرے یا ضعفی کہلاتے ہیں ۔

مثال کے طور پر اگر $\frac{جف^{2} د}{جف لا \; جف ما} = لا^{ن} + ما^{ن}$

تو $د = \int\int (لا^{ن} + ما^{ن}) \; فرلا \; فرما$

اور اس کے تعیین کے لیے $(لا^{ن} + ما^{ن})$ کا پہلے (لا کو مستقل مان کر) بلحاظ ما

تکملہ معلوم کیا جاتا ہے، چنانچہ

$$\frac{جف\ د}{جف\ لا} = لا^{ن}\ ما + \frac{ما^{ن+1}}{ن+1} + فہ\ (لا)$$

جس میں فہ (لا) بلحاظ اس کے کہ لا کو مستقل مانا گیا تھا لا کا ایک اختیاری تفاعل ہے اور پھر حاصل شدہ جملہ کا (ما کو مستقل مان کر) بلحاظ لا تکملہ دریافت کیا جاتا ہے۔ چنانچہ

$$د = \frac{لا^{ن+1}}{ن+1}\ ما + \frac{لا\ ما^{ن+1}}{ن+1} + فہ_{1}(لا) + سہ\ (ما)$$

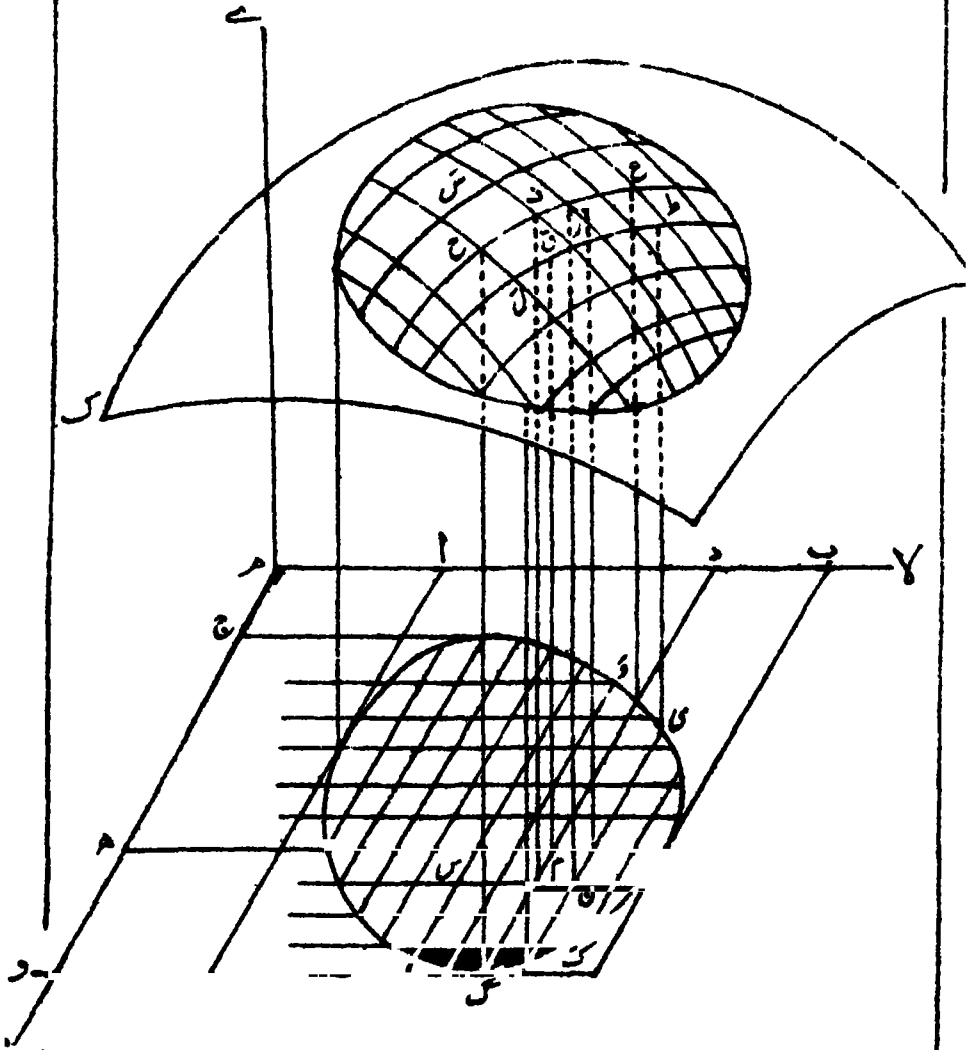
جس میں سہ (ما)، ما کا ایک اختیاری تفاعل ہے اور فہ₁ (لا) = ∫فہ(لا) فرا

**۳ - محدود دُہرا تکملہ** - فرض کرو کہ ف (لا، ما) لا اور ما کا ایک مسلسل اور وحید القیمت تفاعل ہے۔ ہندسی لحاظ سے

$$ی = ف\ (لا،\ ما) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ایک سطح ک ل کی مساوات ہے۔ شکل ۹۹ میں ایک سطح س لو جو مستوی لا ہر ما میں واقع ہے اور اس کو اساس مان کر اس پر ایک قائم استوانہ تیار کرو جس کی دیواریں ہر ی کے متوازی ہیں۔ اب اگر یہ استوانہ سطح ک ل میں سے رقبہ سَ کو گھیر لے تو س، سَ اور استوانی سطح سے محدود حجم کی تعیین کے لیے حسبِ ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے:

ہر ما کے متوازی مساوی فصلوں (= معف لا) پر رقبہ س کے اندر خطوطِ مستقیم کی ایک قطار کھینچو۔ اسی طرح ہر لا کے متوازی مساوی فصلوں (= معف ما) پر خطوط کی ایک دوسری قطار کھینچو۔ ان خطوط میں سے علی الترتیب ما ہر ی اور لا ہر ی کے متوازی مستویاں تیار کرو۔ اس طرح رقبوں س اور سَ کے اندر خطوط کا ایک ایک جال تیار ہوتا ہے جن میں سے س کے اندر کا جال معف لا معف ما رقبہ کے مستطیلوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ شکل کے مطالعہ سے

معلوم ہوجائیگا کہ عمل ہذا سے اسطوانہ م ن ف ق کے مماثل متعدد چھوٹے چھوٹے

شکل ۹۹

اسطوانوں میں منقسم ہوجاتا ہے جس کے اوپر اور نیچے کے سرے س اور ش کے متناظر جال ہیں۔ چونکہ ان چھوٹے اسطوانوں کے اوپر والے سرے منحنی شکل کے

ہیں اس لیے براہِ راست ان اسطوانوں کے حجم محسوب نہیں کیے جاسکتے۔ اب ان کے اوپر کے سروں کے اُن کونوں سے جن کے لیے لا اور ما کی قیمتیں سب سے کمتر ہیں لا م ما کے متوازی ستونیاں کھینچو اس طرح رم ن ف ر کے مماثل متعدد قایم منشور تیار ہوجائینگے۔

اگر ف کے محدد (لا، ما، ی) ہیں تو م ف = ی = ف (لا، ما) اور اس لیے م ن ف ر کا حجم = ف (لا، ما) مف لا مف ما ... ... (۲)

اور پورے اسطوانہ کے حجم ح کے تقریباً مساوی

$$\text{حجم ح} = \Sigma \Sigma \text{ ف (لا، ما) مف لا مف ما} \quad \ldots\ldots (۳)$$

جس میں دوہرے مجموعہ کی علامت Σ Σ اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ دونوں متغیروں لا، ما کے لحاظ سے مجموعہ حاصل کیا جانا چاہیے۔

اب اگر س کے جال کے نقاط تقسیم کی تعداد نامتناہی بڑی کردی جائے یعنے مف لا، مف ما کو نامتناہی گھٹا دیا جائے تو ح پورے اسطوانہ کے حجم ح کو بطور انتہا پہنچ جائیگا اور

$$\text{ح} = \underset{\text{مف لا} \to ۰,\ \text{مف ما} \to ۰}{\text{نہا}} \Sigma \Sigma \text{ ف (لا، ما) مف لا مف ما} \ldots\ldots (۴)$$

اب ہم بتائینگے کہ یہ انتہا متواتر تکمل کے ذریعہ یوں دریافت ہوسکتی ہے:

مجسم اسطوانے کی کسی ایک قاش پر نظر ڈالو جو ما مر ہے کے متوازی ستونیوں سے بنتی ہے۔ مثلاً وَ ع ح گ اور ی طہ لَ کَ پہلوؤں والی قاش پر۔ اس کی موٹائی مف لا ہے۔ منحنی ح ع کے لیے محددی کی قیمتیں مساوات ی = ف (لا، ما) میں لا = مرد لکھنے سے دریافت ہوتی ہیں۔ بالفاظ دیگر

ی = ف (مرد، ما)

$$\text{پس رقبہ وَ ع ح گ} = \int_{\text{دو}}^{\text{دگم}} \text{ف (مرد، ما) فرما}$$

قاش زیر بحث کا حجم تقریباً ایک ایسے منشور کے حجم کے مساوی ہے جس کا
قاعدہ وَ ع ح گ ہے اور ارتفاع مف لا
یعنے مساوی ہے مف لا (رقبہ وَ ع ح گ) = $\text{مف لا} \int_{\text{دوَ}}^{\text{دگ}} \text{ف (مرد، ما) فرما}$
اور واضح ہے کہ پورے مجسم کا حجم اس طرح تیار شدہ منشوروں کے حاصل مجموعہ
کی انتہا ہے، جیسے جیسے لا (= مرد) کی قیمت مرا سے بدل کر مرب
ہو جاتی ہے۔ یعنے

$$\text{ح} = \int_{\text{مرا}}^{\text{مرب}} \text{فرلا} \int_{\text{دوَ}}^{\text{دگ}} \text{ف (لا، ما) فرما} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اسی طرح بتایا جا سکتا ہے کہ $\text{ح} = \int_{\text{مرج}}^{\text{مرد}} \text{فرما} \int_{\text{ہوَ}}^{\text{ہی}} \text{ف (لا، ما) فرلا} \quad \ldots (۶)$

ان تکملوں کو عموماً بنظر سہولت کتابت

$\int_{\text{دوَ}}^{\text{دگ}} \int_{\text{مرا}}^{\text{مرب}} \text{ف (لا، ما) فرما فرلا}$ اور $\int_{\text{ہوَ}}^{\text{ہی}} \int_{\text{مرج}}^{\text{مرد}} \text{ف (لا، ما) فرلا فرما}$ لکھتے ہیں

(۵) میں انتہائیں دوَ اور دگ محدد لا کے تفاعل ہیں۔ اس لیے کہ وہ
مجسم کے قاعدہ کے محیط کی مساوات کو ما کے لیے حل کرنے سے دریافت ہوتی ہیں۔
اسی طرح (۶) میں انتہائیں ہوَ اور ہی محدد ما کے تفاعل ہیں۔
(۴)، (۵) اور (۶) کے باہمدگر مقابلہ سے نتیجۂ ذیل اخذ ہوتا ہے :-

$$\text{ح} = \text{نہا} \sum \sum \text{ف (لا، ما) مف ا مف لا} = \int_{\text{ک}_1}^{\text{ک}_2} \int_{\text{و}_1}^{\text{و}_2} \text{ف (لا، ما) فرما فرلا}$$
$$= \int_{\text{و}_1}^{\text{و}_2} \int_{\text{ک}_1}^{\text{ک}_2} \text{ف (لا، ما) فرلا فرما} \quad (۷)$$

جن میں $\text{و}_1$ اور $\text{و}_2$ عموماً ما کے تفاعل ہیں اور $\text{ک}_1$ اور $\text{ک}_2$ عموماً لا کے تفاعل۔
ہر صورت میں پہلی علامت تکمل پہلے تفرقہ سے متعلق ہوتی ہے اور دوسری

علامتِ تکمل دوسرے تفرقہ سے ۔

مساوات (۱) دُہرے مجموعوں کے لیے تیرھویں باب کے ۱ کے اساسی مسئلہ کی توسیع ہے۔

توضیحی مثال (۱) ثابت کرو کہ $\int_{0}^{و}\int_{-\sqrt{و^2-لا^2}}^{\sqrt{و^2-لا^2}} لا\, فرلا\, فرما = \frac{۲و^۳}{۳}$

حل۔ $\int_{0}^{و}\left[لا\, ما\right]_{-\sqrt{و^2-لا^2}}^{\sqrt{و^2-لا^2}} فرلا = \int_{0}^{و} ۲لا\sqrt{و^2-لا^2}\, فرلا = \left[-\frac{۲}{۳}(و^2-لا^2)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{0}^{و} = \frac{۲}{۳}و^۳$

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ $\int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}\int_{0}^{۲} لا^2 ما\, فرلا\, فرما\, فری = ۲۵\frac{۱}{۳}$

حل۔ تکمل $= \int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}\left(\int_{0}^{۲} لا^2 ما\, فری\right) فرلا\, فرما = \int_{۲}^{۳}\int_{۱}^{۲}\left[لا^2 ما\, ی\right]_{0}^{۲} فرلا\, فرما$

$= \int_{۲}^{۳}\left(\int_{۱}^{۲} ۲لا^2 ما\, فرما\right) فرلا = ۲\int_{۲}^{۳}\left[\frac{لا^2 ما^2}{۲}\right]_{۱}^{۲} فرلا$

$= \int_{۲}^{۳} ۴لا^2\, فرلا = ۴\left[\frac{لا^۳}{۳}\right]_{۲}^{۳} = \frac{۴}{۳}(۲۷-۸) = ۲۵\frac{۱}{۳}$

توضیحی مثال (۳) اسطوانی سطح $لا^2 + ما^2 = ۲و لا$ ، $و > 0$ اور مستویوں $ی = م لا$ اور $ی = 0$ سے محدود فانہ کا حجم دریافت کرو۔

حل۔ شکل ۱۰۰ا میں نصف فانہ ھ ز ا ب ہے ۔ اس کی تراشش د ز و ھ مستوی ما ی کے متوازی ہے اور اس میں لا مستقل ہے ۔ ما کے حدود صفر اور وز $(= \sqrt{۲و لا - لا^2})$ ہیں ۔ پس مطلوبہ حجم ح کا نصف ہے ۔

شکل ۳۸

$$\frac{ح}{۲} = \text{م} \int_{\text{ب}}^{\text{و}} \text{لا} \sqrt{۲\,\text{و}\,\text{لا} - \text{لا}^۲}\ \text{فرلا}$$

$$= \text{م} \int_{\text{ب}}^{\text{و}} \text{لا} \sqrt{۲\,\text{و}\,\text{لا} - \text{لا}^۲}\ \text{فرلا} = \text{م}^۲ \int_{\text{ب}}^{\text{و}} \text{لا} \sqrt{\text{و}^۲ - (\text{و}^۲ - ۲\,\text{و}\,\text{لا} + \text{لا}^۲)}\ \text{فرلا}$$

$$= \text{م}^۲ \int_{\text{ب}}^{\text{و}} \text{لا} \sqrt{\text{و}^۲ - (\text{و} - \text{لا})^۲}\ \text{فرلا}$$ اگر و ـ لا کو و جب طہ لکھا جائے تو

$$\text{و} = -\text{م} \int_{+\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \text{و}^۳ (۱ - \text{جب طہ}) \text{جم}^۲ \text{طہ فرطہ}$$

[ اس لیے کہ لا = و (۱ ـ جب طہ) اور فرلا = ـ و جم طہ فرطہ ]

$$= \text{م}\,\text{و}^۳ \frac{\pi}{۲}$$ اور $$\text{ح} = \text{م}\,\pi\,\text{و}^۳$$ جواب

# مثالیں

ذیل کے تکملوں کی تصدیق کرو:—

(۱) $\int_{\text{ب}}^{\text{٣}} \int_{\text{ب}}^{\text{و جم طہ}} \text{س جب طہ فرطہ فرس} = \frac{\text{و}^{٢}}{\text{٣}}$

(۲) $\int_{\text{ب}}^{\text{٢}} \int_{\text{و}}^{\text{١و}} \sqrt{\text{س و} - \text{و}^{٢}} \ \text{فرو فرس} = \text{٦ب}^{٣}$

(۳) $\int_{\text{ب}}^{\text{٢}} \int_{\text{١}}^{\text{١}} \int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \text{لا}^{٢} \ \text{ما}^{٢} \ \text{ی فرلا فرما فری} = \text{٤} \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

(۴) $\int_{\text{ب}}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} \int_{\text{و جم طہ}}^{\text{و}} \text{س}^{٣} \ \text{فرطہ فرس} = \left(\frac{\text{١٦}}{\text{١٥}} - \text{٣٣}\right) \frac{\text{و}^{٥}}{\text{١٠}}$

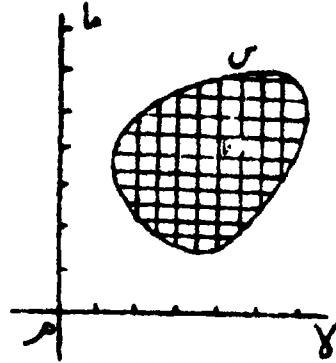
(۵) $\int_{\text{ب}}^{\text{١}} \int_{\text{ب}}^{\text{ب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} (\text{لا}^{٢} + \text{ما}^{٢} + \text{ی}^{٢}) \ \text{فرلا فرما فری} = \frac{\text{ا ب ج}}{\text{٣}} (\text{و}^{٢} + \text{ب}^{٢} + \text{ج}^{٢})$

(۶) $\int_{\text{ب}}^{\text{١}} \int_{\text{ب}}^{\text{ی}} \int_{\text{ب}}^{\text{و}-\text{لا}} \text{لا فرما فرلا فری} = \frac{\text{٤}}{\text{٣٥}}$

(۷) $\int_{\text{ب}}^{\text{١}} \int_{\text{ب}}^{\text{ی}} \int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \frac{\text{لا فری فرلا فرما}}{\text{لا}^{٢} + \text{ما}^{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

## ۳۔ محدود دُہرے تکملہ کی قیمت ایک خطہ س کے

اوپر — یہ کوئی ضروری نہیں کہ ہر دُہرا محدود تکملہ ایک حجم ہی ہو۔ اگر لا، ما، ی فضا میں کے کسی نقطہ کے محدد ہیں تو نتیجہ یقیناً حجم ہے۔ لیکن اگر ہم مستوی لا م ما میں ایک خط س سے بحث کر رہے ہیں اور اس کے ساتھ اس کے ہر نقطہ (لا، ما) سے ایک دیا ہوا تفاعل ف (لا، ما) وابستہ ہے (مثلاً ایک پتلی پرت کی کثافت یعنے کمیت فی اکائی رقبہ یا کوئی اور خاصیت) تو ہم خطہ مذکور کو م لا، م ما کے متوازی خطوط کھینچکر مف لا مف ما رقبہ کے مستطیل عنصروں میں منقسم کرکے مجموعہ $\Sigma\Sigma$ ف (لا، ما) مف لا مف ما حاصل کر سکتے ہیں اور

ا ∑ ∑ ف (لا، ما) مف لا مف ما = ∫∫ ف (لا، ما) فرلا فرما ... (۱)

شکل ۱۰۱

ط س کے اوپر تفاعل ف (لا، ما) کا دُہرا تکمل
نا ہے۔ رابطہ (۱) سے اس دُہرے تکملہ کی قیمت متواتر تکمل
یعہ معلوم کی جا سکتی ہے۔ اب تکمل کے حدود کی تعیین باقی
تی ہے۔

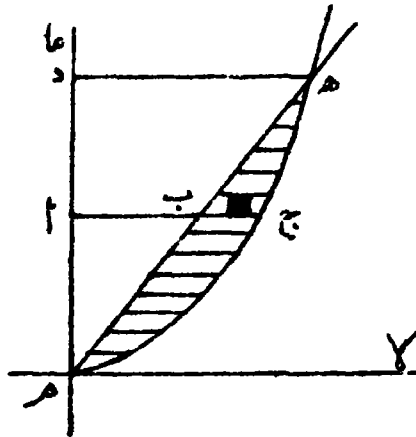
## مستوی رقبہ بحیثیت محدود دُہرا تکملہ۔ علی القوائم

د۔ بارہویں باب کی فصل (   ) میں اکہرے تکمل کے
مستوی رقبوں کی تعیین کا سوال حل کیا گیا تھا۔ دُہرے تکمل کے
اس کا حل زیادہ تر اس لیے مفید ہے کہ اس سے عام سوال میں حدود
یین واضح ہو جاتی ہے۔
شکل ۱۰۱ کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ جالدار خطہ س کا رقبہ

ر = نہا ∑ ∑ مف لا مف ما = ∫∫ فرلا فرما ... (ب)
مف لا ← ۰
مف ما ← ۰

پس رابطہ (۱) کے مدنظر ہم کہہ سکتے ہیں کہ
ی خطہ کا رقبہ اس خطہ کے اوپر تفاعل ف (لا، ما) = ۱ کے دُہرے
کی قیمت ہے۔
۲ کے مدنظر کہا جا سکتا ہے کہ یہ رقبہ عدداً قاعدہ س پر اکائی بلندی
بنائے ہوئے اسطوانہ کے رقبہ کے مساوی ہے۔
مندرجۂ ذیل مثالوں سے معلوم ہو جائیگا کہ تکمل کے حدود کس طرح
فت کیے جاتے ہیں۔

توضیحی مثال ۱۔ م لا کے اوپر نیم کعبی مکافی ما^۲ = لا^۳
ط مستقیم ما = لا سے جو رقبہ محدود ہے اس کو محسوب کرو۔
حل۔ شکل ۱۰۲ کے مطالعہ سے واضح ہو گا کہ پہلے تکمل بلحاظ لا عمل
لایا جاتا ہے۔ یعنے عناصر فزلا فزما ایک افقی (محور م لا کے متوازی)

شکل ۱۰۲

ں میں جوڑے جاتے ہیں۔

پس $\int_{اب}^{اج}$ فزلا فزما = فزما $\int_{اب}^{اج}$ فزلا = ارتفاع فزما کی افقی پٹی کا رقبہ

اس کے بعد اس نتیجہ کو بلحاظ ما تکمل کیا جاتا ہے۔ یعنی شکل کی تمام اُفقی پٹیاں جوڑلی جاتی ہیں۔ پس

$$\text{رقبہ } ا = \int^{مرد} \int_{اب}^{اج} فزما فزلا$$

پہلے تکملے کے حدود اب اور اج کی تعیین کے لیے رقبہ کو محدود کرنے والے منحنیوں کی مساواتیں حل کرکے لا کی قیمت معلوم کرلی جاتی ہے۔ چنانچہ خطِ مستقیم کی مساوات سے لا = اب ما اور نیم کعبی مکافی کی مساوات سے لا = اج = $ما^{\frac{2}{3}}$ دوسرے تکملہ کے حدود صفر اور مرد ہیں۔ مرد کی تعیین کے لیے دی ہوئی دونوں مساواتیں ہمزاد تصور کرکے حل کی جاتی ہیں جس سے منحنیوں کے نقطۂ تقاطع ھ کے محدد (۱، ۱) معلوم ہو جاتے ہیں۔ پس مرد = ۱

$$\text{اور } ا = \int_{0}^{1} \int_{ما}^{ما^{\frac{2}{3}}} فزما فزلا = \int_{0}^{1} \left( ما^{\frac{2}{3}} - ما \right) فزما = \left[ \frac{3}{5} ما^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} ما^{2} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{10}$$

اس سوال کے حل میں ہم یہ بھی کرسکتے تھے کہ عناصر فزلا فزما کو انتصابی پٹی میں جوڑ لیتے اور بعد کو یہ سب انتصابی پٹیاں جمع کرلی جاتیں۔ یعنے

$$ا = \int_{0}^{1} \int_{لا^{\frac{3}{2}}}^{لا} فزلا فزما = \int_{0}^{1} \left( لا - لا^{\frac{3}{2}} \right) فزلا = \frac{1}{10}$$

یاد رہنا چاہیے کہ یہ ایک ایسی مثال ہے جس میں تکمل کے عمل کی کوئی بھی ترتیب (یعنی پہلے کونسا تکمل عمل میں لایا جاتا ہے اور بعد کو کونسا) اختیار کرلی جاسکتی ہے۔ لیکن توضیحی مثال (۲) کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ ہر صورت میں ایسا نہیں کیا جاسکتا۔

**توضیحی مثال (۲)** پہلے ربع کے اندر کا رقبہ دریافت کرو جو محدود ہے محور لا اور منحنیوں

$$لا^{2} + ما^{2} = 10 \quad \text{اور} \quad ما^{2} = 9 لا \quad \text{سے}$$

حل ـ پہلے ہم انتصابی پٹیاں استعمال کر کے بلحاظ ما تکمل کرینگے۔ شکل ۱۰۳ کے مطالعہ سے فوراً معلوم ہوجائیگا کہ اس طرز عمل سے ہمیں دو تکملوں کی ضرورت ہوگی۔ چونکہ دائرہ اور مکافی کے نقطہ تقاطع ن کے محدد (۱، ۳) ہیں اور

شکل ۱۰۳

مکافی پر م اور ن کے مابین $\text{ما} = ۳\sqrt{\text{لا}}$ پس رقبہ م ن ھ $= \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۳\sqrt{\text{لا}}} \text{فرلا فرما}$

$$= \int_{۰}^{۱} ۳\sqrt{\text{لا}}\ \text{فرلا} = ۲$$

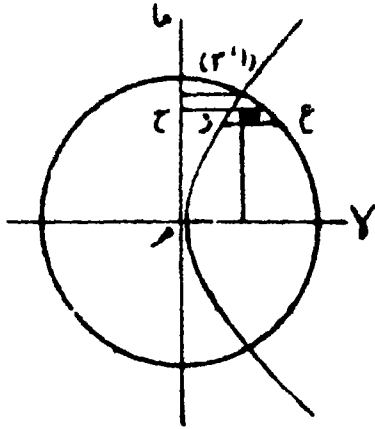
اسی طرح رقبہ و ن ھ $= \int_{۱}^{\sqrt{۱۰}}\int_{۰}^{\sqrt{۱۰-\text{لا}^۲}} \text{فرلا فرما} = \int_{۱}^{\sqrt{۱۰}} \sqrt{۱۰-\text{لا}^۲}\ \text{فرلا}$

$$= \left[\frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{۱۰-\text{لا}^۲} + ۵\,\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱۰}}\right]_{۱}^{\sqrt{۱۰}}$$

$$= ۰ - \frac{۳}{۲} + ۵\left(\text{جب}^{-۱}۱ - \text{جب}^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)$$

$$= -۱٫۵ + ۵(۱٫۵۷۱ - ۰٫۳۲۲) = ۴٫۷۴۵$$

∴ پورا رقبہ م ن و = ۶٫۷۵ جواب

اس کے برعکس اگر ہم پہلے اُفقی پٹیاں استعمال کرکے بلحاظ لا تکمل کریں تو شکل ۱۰۴ کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ پورے رقبہ کی قیمت $= \int_{0}^{3} \int_{\text{حز}}^{\text{حع}} \text{فرما فرلا}$

شکل ۱۰۴

چونکہ $\text{لا} = \text{حز} = \frac{1}{9}\,\text{ما}^2$ اور $\text{حع} = +\sqrt{10 - \text{ما}^2}$

$$\text{رقبہ} = \int_{0}^{3} \int_{\frac{1}{9}\text{ما}^2}^{\sqrt{10-\text{ما}^2}} \text{فرما فرلا} = \left[ \frac{\text{ما}}{2}\sqrt{10-\text{ما}^2} + 5\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{ما}}{\sqrt{10}} - \frac{1}{27}\,\text{ما}^3 \right]_{0}^{3}$$

$$= \frac{3}{2} + 5\,\text{جب}^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}} - 1 = 1.5 + 6.25 - 1 = 6.75 \ \text{جواب}$$

پس واضح ہے کہ دوسرا طریقہ آسان تر ہے اور عام طور پر ایسے سوالوں کے حل میں کوشش کی جانی چاہیے کہ تکمل کی ترتیب ایسی ہو کہ حتی الامکان ایک ہی تکملہ سے رقبہ مطلوبہ معلوم ہو جائے۔

# مثالیں

(۱) دُہرے تکمل کے ذریعے مکافیوں $3\,\text{ما}^2 = 25\,\text{لا}$ اور $5\,\text{لا}^2 = 9\,\text{ما}$ کا درمیانی رقبہ دریافت کرو۔ (ا) پہلے بلحاظ لا تکمل کرکے (ب) پہلے بلحاظ ما تکمل کرکے

[جواب (ا) $\int_{0}^{5} \int_{\frac{2}{25}\text{ا}^{2}}^{\sqrt{\text{ا}/5}}$ فرا فرلا = ۵ (ب) $\int_{0}^{3} \int_{\frac{5}{9}\text{لا}^{2}}^{\frac{125}{3}}$ فرلا فرا = ۵

دُہرے تکمل کے ذریعہ ذیل کے دو منحنیوں کے ما بین محدود رقبہ کی تعیین کرو:

(۲) لا ا = ۴، لا + ا = ۵ [جواب = ۷½ - ۴ لوک ۴ = ۲٫۱۹۵۶۱

(۳) ا = لا۳ - ۲ لا، ا = ۶ لا - لا۳ [جواب = ۱۶

(۴) ثابت کرو کہ ا = ۲ جیب لا، ا = ۲ جتم $\frac{\text{لا}}{2}$ منحنیوں سے محدود رقبوں میں بڑا رقبہ چھوٹے کا نو گنا ہے۔

(۵) بتاؤ کہ منحنیوں لا۲ + ا۲ = ۲۵ اور لا۲ = ۴ ا - ۷ سے محدود رقبوں میں بڑا رقبہ چھوٹے کا تقریباً پانچ گنا ہے۔

## ۴ - کسی سطح کے نیچے کے حجم کی تعیین

۲ - میں ایسے مجسم کے حجم سے بحث کی گئی تھی جو ی = ف (لا، ا) اور مستوی لا م ا اور ایک استوانہ سے محدود ہے۔ استوانہ کے عناصر م ی کے متوازی تھے اور اس کا رقبہ مستوی لا م ا کا ایک خطہ س تھا۔ رابطہ (۱) سے اس مجسم کا حجم ہے۔

$$\text{ح} = \iint_{\text{س}} \text{ی فرا فرلا} = \iint_{\text{س}} \text{ف (لا، ا) فرا فرلا} \quad \cdots (1)$$

مجسم کی ترتیب اور اس کے حدود وہی ہیں جو رقبہ س کے لیے ہیں۔ اس نوع کے مجسم کا حجم "سطح ی = ف (لا، ا) کے نیچے کا حجم" کہلاتا ہے۔ مستوی کی صورت میں اس کی متناظر مثال "منحنی کے نیچے کا رقبہ" ہے۔ جس پر بارہویں باب میں بحث کی گئی ہے۔ کسی سطح کے نیچے کے حجم کی ایک خاص صورت ایسا حجم ہو سکتا ہے جو دی ہوئی سطح اور خود مستوی لا م ا سے محدود ہو۔ یہ یاد رہے کہ ضابطہ (۱) میں حجم کا عنصر قاعدہ فرلا فرا پر بلندی ی = ف (لا، ا) کا قائم منشور ہے۔

**توضیحی مثال** - ناقص مکافی نما $ی = ۲ - ۲ لا^۲ - ما^۲$ اور مستوی لا م ما سے محصور مجسم کا حجم دریافت کرو۔

حل - ی کو صفر لکھنے سے $ما = \sqrt{۲ - ۲ لا^۲}$ اور یہ مستوی لا م ما میں مجسم کے قاعدہ کی مساوات ہے۔ ما کو صفر لکھنے سے $۲ لا^۲ = ۲ \therefore لا = ۱$ اس لیے لا کے حدود ۱ اور صفر ہیں۔ دیکھو شکل ۱۰۵۔

شکل ۱۰۵

پس مطلوبہ حجم

$$ح = ۴ \int_۰^۱ \int_۰^{\sqrt{۲-۲لا^۲}} (۲ - ۲لا^۲ - ما^۲)\, فرلا\, فرما$$

$$= ۴ \int_۰^۱ \left\{ ۲\sqrt{۲-۲لا^۲} - ۲لا^۲\sqrt{۲-۲لا^۲} - \frac{۲}{۳}(۲-۲لا^۲)^{\frac{۳}{۲}} \right\} فرلا$$

$$= ۴ \int_۰^۱ \left\{ ۲\sqrt{۲-۲لا^۲} + (۲-۲لا^۲)^{\frac{۳}{۲}} - ۲\sqrt{۲-۲لا^۲}^{\,۳} - \frac{۱}{۳}(۲-۲لا^۲)^{\frac{۳}{۲}} \right\} فرلا$$

$$= \frac{۸}{۳} \int_{۰}^{۱} (۲ - ۲\,\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\, \text{فرلا}$$

لا = جب طہ لکھو تو $۲ - ۲\,\text{لا}^{۲} = ۲ - ۲\,\text{جب}^{۲}\,\text{طہ} = ۲\,\text{جم}^{۲}\,\text{طہ} \therefore (۲ - ۲\,\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = ۲\sqrt{۲}\,\text{جم}^{۳}\,\text{طہ}$

فرلا = جم طہ فرطہ اور جبکہ لا = ۱ تو جب طہ = ۱ اور $\text{طہ} = \frac{\pi}{۲}$ اور جبکہ لا = ۰ تو طہ = ۰

$$\text{پس ح} = \frac{۸}{۳} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} ۲\sqrt{۲}\,\text{جم}^{۳}\,\text{طہ جم طہ فرطہ} = \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۴}\,\text{طہ فرطہ}$$

$$= \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\text{جم}^{۲}\,\text{طہ} - \frac{۱}{۴}\,\text{جب}^{۲}\,۲\,\text{طہ}\right) \text{فرطہ}$$

$$= \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\,\text{جم}\,۲\,\text{طہ} - \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}\,\text{جم}\,۴\,\text{طہ}\right) \text{فرطہ}$$

$$= \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳} \left[\frac{۱}{۲}\,\text{طہ} + \frac{۱}{۴}\,\text{جب}\,۲\,\text{طہ} - \frac{۱}{۸}\,\text{طہ} + \frac{۱}{۳۲}\,\text{جب}\,۴\,\text{طہ}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳} \times \frac{۳\pi}{۱۶}$$

$= \sqrt{۲}\,\pi$ جواب

# مثالیں

(۱) دُہرے تکمل کے ذریعہ اسطوانی سطح $\text{ما}^{۲} = ۱ - \text{لا}$، مستوی ی = لا اور سے محدود مجسم کا حجم دریافت کرو۔

$$\left[\text{جواب} = ۲ \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{۱-\text{ما}^{۲}} \text{لا فرما فرلا} = \frac{۸}{۱۵}\right]$$

(۲) دُہرے تکمل سے ایک ایسے چوسطحی مجسم (Tetrahedron) کا حجم دریافت کرو جو محددوں کے مستویوں اور $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}} = ۱$ مستوی سے محدود ہو۔ [جواب = $\frac{\text{ا ب ج}}{۶}$]

(۳) ا نصف قطر کے ایک کرہ میں سے ایک قائم دائری اسطوانہ (جس کے قاعدہ کا نصف قطر ب ہے اور جس کا محور کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے) ایک جسم قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا حجم $= \frac{۴\pi}{۳}\left[\text{ا}^{۳} - (\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right]$

(۴) گردشی مکافی نما $لا^2 + ما^2 = و ی$ مستوی $لا م ما$ اور اسطوانہ $لا^2 + ما^2 = ۲ و لا$ سے محدود مجسم کا حجم دریافت کرو۔

[جواب $= ۲ \int^{۲و} \int^{\sqrt{۲ و لا - لا^2}} \frac{لا^2 + ما^2}{و}$ فرلا فرما $= \frac{۳}{۲} \pi و^3$ ]

(۵) بتاؤ کہ $لا^2 + ما^2 = ص^2$ اور $لا^2 + ی^2 = ص^2$ دو اسطوانوں کا مشترک حجم $\frac{۱۶ ص^3}{۳}$ ہے۔

(۶) سطح $(\frac{لا}{و})^{\frac{1}{2}} + (\frac{ما}{ب})^{\frac{1}{2}} + (\frac{ی}{ج})^{\frac{1}{2}} = ۱$ اور محددوں کے مستویوں سے محدود حجم کی قیمت دریافت کرو۔ [جواب $= \frac{و ب ج}{۹۰}$

(۷) ثابت کرو کہ سطح $لا^{\frac{2}{3}} + ما^{\frac{2}{3}} + ی^{\frac{2}{3}} = و^{\frac{2}{3}}$ سے محدود جسم کا مکمل حجم $\frac{۳۲ و^3}{۳۵}$ ہے

[نوٹ:۔ کسی مطلوبہ خواص کے بموجب دُہرا تکمل تیار کرنے کے لیے ذیل کی ہدایات یاد رکھی جائیں:۔

(۱) متعلقہ خطہ یا رقبہ جن منحنیوں سے محدود ہے ان کو مرتسم کیا جائے۔

(۲) رقبہ کے اندر کے کسی نقطہ ف (= لا، ما) پر رقبہ مف لا مف ما کا مستطیلی عنصر تیار کیا جائے۔

(۳) تفاعل ف (لا، ما) معلوم کر لیا جائے جس کو مف لا مف ما سے ضرب دینے سے مستطیلی عنصر رقبہ کے لیے مطلوبہ خاصیت حاصل ہو جاتی ہے۔

(۴) مطلوب تکملہ $\int\int$ ف (لا، ما) فرلا فرما ہے جو دیے ہوئے خطہ یا رقبہ کے اوپر محسوب کیا جاتا ہے جس طریقہ پر رقبہ دریافت کیا جاتا ہے اسی طریقہ پر تکمل کی ترتیب اور اس کے حدود معلوم کر لیے جاتے ہیں۔

## ۵۔ رقبہ کے معیار اثر اور ہندسی مرکزوں کی تعیین

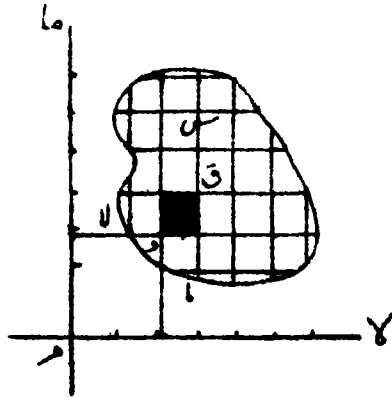
سولھویں باب میں ان کے چند مسائل اکہرے تکمل کے ذریعہ حل کر کے بتلائے گئے ہیں۔ یہاں ہم ان کو دُہرے تکمل کی مدد سے حل کرینگے جو اکثر زیادہ سہولت کا

...لث ہے۔

چونکہ مستطیلی عنصرِ رقبہ کے لیے رقبہ کا معیارِ اثر محورِ مرما کے لحاظ سے لا مف لا مف ما ہے اور محورِ مرلا کے لحاظ سے ما مف لا مف ما ہے
...س لیے پورے رقبہ کے لیے باب محولہ کی فصل ۱ کی ترقیم کے بموجب

$$\text{مرلا} = \int\int \text{ما فرلا فرما} \quad \text{اور} \quad \text{مرما} = \int\int \text{لا فرلا فرما} \quad \ldots\ldots (ج)$$

رقبہ کا ہندسی مرکز محدّدوں $\bar{\text{لا}} = \frac{\text{مرما}}{\text{رقبہ}}$، $\bar{\text{ما}} = \frac{\text{مرلا}}{\text{رقبہ}}$ ...... (د)
سے معلوم ہو جاتا ہے۔

(ج) میں تکملے علی الترتیب تفاعلوں ف (لا، ما) = ما اور ف (لا، ما) = لا
...قیمتوں کو رقبہ کے اوپر لے کر ظاہر کرتے ہیں۔

شکل ۱۰۶

کسی منحنی، محورِ لا اور دو معینوں سے محدود رقبہ (بالفاظِ دیگر منحنی کے نیچے کے رقبہ) کے لیے رابطہ (ج) سے حسبِ ذیل نتائج اخذ کیے جاتے ہیں:

$$\left.\begin{aligned} \text{مرلا} &= \int_{\text{و}}^{\text{ب}}\int^{\text{ما}} \text{ما فرلا فرما} = \frac{1}{2}\int_{\text{و}}^{\text{ب}} \text{ما}^2\ \text{فرلا} \\ \text{مرما} &= \int_{\text{و}}^{\text{ب}}\int^{\text{ما}} \text{لا فرلا فرما} = \int_{\text{و}}^{\text{ب}} \text{لا ما فرلا} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

یہ ضابطے محولہ بالا فصل کے ضابطوں (۲) سے مطابق ہے۔ یاد رہے کہ (ا) میں ما منحنی پر کے نقطہ کا معین ہے اور اس کی قیمت لا کی رقموں میں منحنی کی مساوات سے معلوم کر لی جانی چاہئے اور تکمل سے پہلے متکمل (integrand) میں تعویض کی جانی چاہیے۔

**توضیحی مثال۔** باب ہذا کی ۳ کی توضیحی مثال ۲ میں جو رقبہ دریافت کیا گیا ہے (یعنے پہلے ربع میں نصف کعبی مکافی ما² = لا³ اور خطِ مستقیم ما = لا سے محدود رقبہ) اس کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔

**حل۔** تکمل کی ترتیب اور اس کے حدود مثال محولہ میں دریافت ہو چکے ہیں۔ پس بذریعہ (ج)

$$\text{مرلا} = \int_0^1 \int_{ما}^{ما^{\frac{2}{3}}} \text{ما فرما فرلا} = \int_0^1 (ما^{\frac{5}{3}} - ما^2)\ \text{فرما} = \frac{1}{24}$$

$$\text{مرما} = \int_0^1 \int_{ما}^{ما^{\frac{2}{3}}} \text{لا فرما فرلا} = \frac{1}{2}\int_0^1 (ما^{\frac{4}{3}} - ما^2)\ \text{فرما} = \frac{1}{21}$$

چونکہ رقبہ = $\frac{1}{10}$ اس لیے از روئے (د) $\bar{لا} = \frac{10}{21}$ اور $\bar{ما} = \frac{5}{12}$ جواب

## ۱۰۶۔ پاپس یا گلڈن کے مسئلے (Pappus or Guldin)

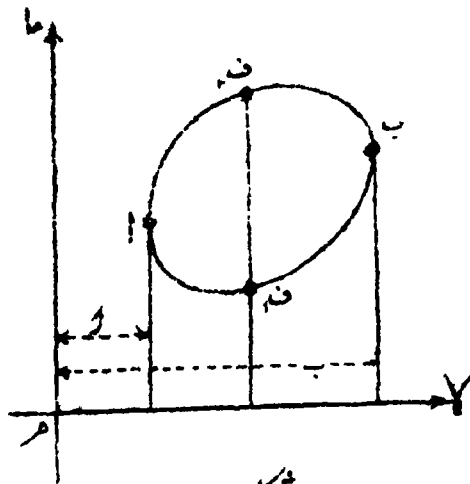
اس نام سے دو مفید ضابطے مشہور ہیں جو گردشی مجسموں کے حجموں اور منحنی سطحوں کا ان کی تراشوں کے ہندسی مرکزوں کے ساتھ رابطہ ظاہر کرتے ہیں۔

**مسئلہ (۱)** اگر ایک مستوی رقبہ کسی ایسے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو رقبہ کے مستوی کے اندر واقع ہے۔ لیکن رقبہ کو قطع نہیں کرتا ہے، تو اس طرح پیدا ہونے والے گردشی مجسم کا حجم، مستوی رقبہ اور اس کے ہندسی مرکز کے طے کردہ طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

**ثبوت۔** ۵ کے رابطہ (ج) سے شکل ۱۰۱ کے رقبہ اف ب ف ا کے لیے

$$\text{مر}\bar{لا} = \int_{ل}^{ب}\int_{ما_1}^{ما_2} \text{ما فرلا فرما} = \frac{1}{2}\int_{ل}^{ب} ما_2^2\ \text{فرلا} - \frac{1}{2}\int_{ل}^{ب} ما_1^2\ \text{فرلا}$$

اگر ع ف۲ = ما۱ اور ع ف۲ = ما۲۔ اب ھ کے لیے اس کی قیمت مندرجہ ضابطہ (د) فصل مذکور تعویض کرنے اور علامتِ مساوات کے دونوں جانب کے ارکان کو ۲π سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$2\pi\,\bar{\text{ا}}\,\text{س} = \pi\int_{\text{ل}}^{\text{ب}} \text{ما}_2^2\,\text{ذلا} - \pi\int_{\text{ل}}^{\text{ب}} \text{ما}_1^2\,\text{ذلا}$$ جس میں س = رقبہ

شکل ۱۰۷

بائیں جانب کے رکن کی پہلی رقم گردشی مجسم کا حجم ہے جو رقبہ تحت منحنی ا ف۲ ب کے گھومنے سے پیدا ہوتا ہے اور دوسری رقم گردشی مجسم کا حجم ہے جو رقبہ تحت منحنی ا ف ب کے گھومنے سے پیدا ہوتا ہے۔ سیدھے جانب کا رکن رقبہ اور ہندسی مرکز کے طے کردہ طول کا حاصل ضرب ہے۔ پس مسئلہ (۱) ثابت ہو جاتا ہے۔ اور لکھا جاتا ہے

$$\text{ح} = 2\pi\,\bar{\text{ا}}\,\text{س} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

**مسئلہ (۲)** جب کوئی بند منحنی ایک ایسے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو منحنی (۱) کے مستوی کے اندر واقع ہے لیکن منحنی کو قطع نہیں کرتا ہے تو اس طرح پیدا ہونے والے حلقہ کی منحنی سطح ایک ایسے اسطوانہ کی

سطح کے مساوی ہے جس کا قاعدہ گھومنے والا منحنی ہے اور ارتفاع منحنی کے محیط کا طے کردہ طول ہے۔

**ثبوت** ۔ یہ ثبوت اکہرے تکملہ کے ذریعہ بآسانی ثابت کیا جا سکتا ہے۔ شکل ۱۲۸ میں ف کے بالکل قریب منحنی کے محیط پر نقطہ ف تصور کیا جائے تو منحنی کے طول کا عنصر ف ف = مف س۔ منحنی جب محور مرلا کے گرد زاویہ مف طہ میں گھومتا ہے تو مف س سے پیدا ہونے والا جزو رقبہ = مامف طہ مف س جس میں ما = ف ع

جب منحنی پوری گردش کر لیتا ہے تو مف س سے گردشی سطح ۲π مامف س تیار ہوتی ہے اور پورے منحنی کی گردشی سطح = ۲π ∫ مامف س۔

منحنی کے محیط کے ہندسی مرکز کا فاصلہ محور مرلا سے اگر لہ قرار دیا جائے تو

$$لہ = \frac{\int ما\,فس}{\int فس} = \frac{\int ما\,فس}{س}$$ جس میں س = منحنی کا محیط

اور ۲π لہ س = ۲π ∫ ما فس

واضح ہے کہ ۲π لہ = منحنی کے ہندسی مرکز کا طے کردہ طول ہے۔

**مثال** ۔ ایک لنگر چھلا ا نصف قطر والے دائرہ کے ایک ایسے خط کے گرد گھومنے سے بنتا ہے جو دائرہ کے مستوی میں اس کے مرکز سے فاصلہ ط پر واقع ہے تو پاپس کے مسئلوں سے

حلقہ کا حجم = π ا$^{۲}$ (۲π ط) = ۲π$^{۲}$ ا$^{۲}$ط

۔ کی منحنی سطح = ۲π ا(۲π ط) = ۴π$^{۲}$ اط

# مثالیں

مندرجۂ ذیل منحنیوں سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو:۔

(۱) ما = لا$^{۲}$ ۔ ۲لا ۔ ۳، ما = ۲لا ۔ ۳ [جواب = ۲، ۔ $\frac{۳}{۵}$]

(۲) ما = ۶لا ۔ ما^۲ ، لا + ما = ۶ [جواب = ۲ ۱/۲ ، ۵]

(۳) ثابت کرو کہ خط تدویر لا = ا (طہ ۔جب طہ) ما = ا (۱ ۔جم طہ) کی ایک کمان کے نیچے کے رقبہ کا ہندسی مرکز (π ا ، ۵ا/۶) ہے۔

(۴) پاپّس کا مسئلہ استعمال کرکے بتاؤ کہ نصف دائرہ کا ہندسی مرکز قطر سے فاصلہ ۴ص/۳π ہے جس میں ص دائرہ کا نصف قطر ہے

(۵) پاپّس کے مسئلہ کے ذریعہ بتاؤ کہ ناقص لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱ کے پہلے ربع میں واقع رقبہ کا ہندسی مرکز (۴ا/۳π ، ۴ب/۳π) ہے۔

(۶) ایک ناقص اپنے محورِ اعظم کے ایک سرے پر کے خطِ مماس کے گرد گھومتا ہے۔ اس طرح جو جسم بنتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔
[جواب = ۲π^۲ ا^۲ ب]

(۷) ایک مربع اپنے ایک وتر کے متوازی خط کے گرد گھومتا ہے جو اس کے دوسرے وتر کے ایک سرے میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو مجسم بنتا ہے اس کا حجم = π ا^۳ √۲ اور اس کی سطح کا رقبہ = ۴π ا^۲ √۲

(۸) ایک مثلث کے ضلعے ا، ب، ج ہیں اور وہ اپنے مستوی میں کے ایک خط کے گرد گھومتا ہے جس کے فاصلے اس کے ضلعوں کے وسطی نقطوں سے ھ۱، ھ۲، ھ۳ ہیں۔ بتاؤ کہ اس گردش سے جو مجسم بنتا ہے اس کی سطح = ۲π (ا ھ۱ + ب ھ۲ + ج ھ۳) ہے۔

اور اس کا حجم = ۲π/۳ (ھ۱ + ھ۲ + ھ۳) √س (س ۔ ا)(س ۔ ب)(س ۔ ج)

جس میں س مثلث کا نصف محیط ہے۔

(۹) تکمل کے ذریعہ ایک قائم دائری مخروط کا حجم اور اس کی سطح کا رقبہ دریافت کرو جو ایک قائم الزاویہ مثلث کے اس کے زاویہ قائمہ بنانے والے ایک ضلع کے گرد گھومنے سے تیار ہوتا ہے۔

[جواب۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر = ص، ارتفاع = ع اور ترچھا بانہ = ل تو

سطح کا رقبہ = ۴ π ص ل اور حجم = ⅓ π ص ع ]

(۱۰) ثابت کرو کہ خط صنوبری (Cardioid) س = ۱(۱-جم ط) کا ہندسی مرکز اس کے ابتدائی خط پر مبداء سے ۵/۶ فاصلہ دور واقع ہے۔

## ۷۔ سیالی دباؤ کا مرکز

سولھویں باب کی فصل ۳ میں انتصابی دیوار پر سیالی دباؤ کے تعیین سے بحث کی گئی تھی اور حاصل مجموعی دباؤ د کے لیے ضابطہ

د = و ∫ لا ما فرما اخذ کیا گیا تھا۔

جس میں ما فرما افقی پٹی کا رقبہ ہے جو سطح ما ب سے عمق ما پر واقع ہے۔ یہاں ہم اس حاصل مجموعی دباؤ کا نقطۂ عمل (جو دباؤ کا مرکز کہلاتا ہے) دریافت کرنے کا طریقہ بیان کرینگے۔ چونکہ کسی محور کے گرد متوازی قوتوں کے معیار اثر کا حاصل جمع ان قوتوں کے حاصل مجموعہ کے معیار اثر کے مساوی ہے۔ اس لیے

∫ ما فر د = و ∫ ما لا فرما = ما̄ د جس میں ما̄ سطح ما ب سے دباؤ کے مرکز کا عمق ہے۔

$$\text{پس } \bar{\text{ما}} = \frac{\int \text{ما}^2 \text{ فرس}}{\int \text{ما فرس}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

[ واضح ہو کہ فرس = عنصر رقبہ لا فرما ہے ]

اس ضابطہ میں نسب نما رقبہ متعلقہ کا بلحاظ محور مر لا معیار اثر ہے اور شمار کنندہ رقبہ مذکور کا محور مذکور کے گرد جمود کا معیار اثر ہے جو عموماً مج سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اور چونکہ

∫ ما فرس = امر لا اس لیے

$$ما' = \frac{مج_{لا}}{هر لا} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

جس میں $مج_{لا}$ سے مراد محور لا کے گرد جمود کا معیارِ اثر ہے۔

**۸۔ کسی محور کے گرد ایک رقبہ کے جمود کا معیارِ اثر** میکانیات میں بڑی اہمیت رکھتا ہے۔
شکل ۱۰۶ کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ

$$مج_{لا} = \int\int ما^{۲}\, فرلا\, فرما \quad \text{اور} \quad مج_{ما} = \int\int لا^{۲}\, فرلا\, فرما \quad \ldots\ldots \quad (۵)$$

اور گردشی نصف قطر $ص_{لا}$، $ص_{ما}$ کی تعریف (جو علی الترتیب $مج_{لا}$، $مج_{ما}$ سے متعلق ہیں) ذیل کے ضابطوں میں مضمر ہے :-

$$ص_{لا}^{۲} = \frac{هـ_{لا}}{رقبہ} \quad \text{اور} \quad ص_{ما}^{۲} = \frac{هـ_{ما}}{رقبہ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۶)$$

(۵) میں جن تفاعلوں کے تکملے دیے ہوئے رقبہ کے اوپر محسوب کیے جاتے ہیں علی الترتیب ف (لا، ما) = $ما^{۲}$ اور ف (لا، ما) = $لا^{۲}$ ہیں۔

جب رقبہ کسی "منحنی کے تحت" ہوتا ہے یعنے منحنی، محور لا اور دو معینوں سے محدود ہوتا ہے تو

$$\left.\begin{aligned} مج_{لا} &= \int_{و}^{ب}\int_{•}^{ما} ما^{۲}\, فرلا\, فرما = \frac{۱}{۳}\int_{ه}^{ب} ما^{۳}\, فرلا \\ \text{اور}\ مج_{ما} &= \int_{و}^{ب}\int_{•}^{ما} لا^{۲}\, فرلا\, فرما = \int_{و}^{ب} لا^{۲}ما\, فرلا \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (۷)$$

ان مساواتوں میں ما منحنی پر کے کسی نقطہ کا معین ہے اور اس کی قیمت اس منحنی کی مساوات سے دریافت کرکے متکمل میں تعویض کی جاتی ہے۔

**توضیحی مثال۔** مکافی $ما^{۲} = ۲$ف لا کے قطعہ ب م ج

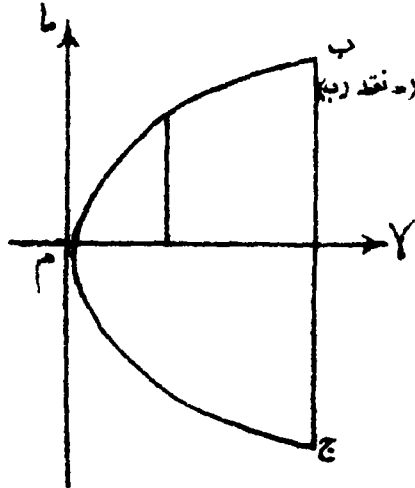
(دیکھو شکل ۲۰۱ا) سے متعلق $مج_{لا}$ اور $مج_{ا}$ دریافت کرو۔

[مکافی کے نقطہ ب کے محدد م ا = د اور ا ب = ب]

حل۔ نقطہ ب کے محددوں کو مکافی کی مساوات میں تعویض کرنے سے $ب^2 = ۲ف د$ حاصل ہوتا ہے جس سے $۲ف = \frac{ب^2}{د}$

پس $ما^2 = \frac{ب^2 لا}{د} \quad \therefore \quad ما = \frac{ب لا^{\frac{1}{2}}}{د^{\frac{1}{2}}}$

پہلے ربع میں واقع رقبہ تحت مکافی (م ف ب) کے جمود کے معیار اثر

شکل ۲۰۱ا

مطلوبہ جمود کے معیار اثروں کے نصف ہیں۔ پس فصل ہذا کے ضابطے (۱) استعمال کرنے سے

$$\frac{1}{2} مج_{ا} = \frac{1}{3} \int_{0}^{د} \frac{ب^3}{د^{\frac{3}{2}}} لا^{\frac{3}{2}} فلا = \frac{2}{15} د ب^3 \quad \therefore مج_{ا} = \frac{4}{15} د ب^3$$

$$\frac{1}{2} مج_{ا} = \int_{0}^{د} لا^2 \frac{ب}{د^{\frac{1}{2}}} لا^{\frac{1}{2}} فلا = \frac{2}{7} د^3 ب \quad \therefore مج_{ا} = \frac{4}{7} د^3 ب$$

قطعہ کے رقبہ س کے لیے

$$\frac{1}{2} س = \int_{0}^{د} ما\, فلا = \int_{0}^{د} \frac{ب}{د^{\frac{1}{2}}} لا^{\frac{1}{2}} فلا = \frac{2}{3} د ب$$

∴ $\text{س} = \frac{۴}{۳}\,\text{اب}$

اس لیے ضابطہ (و) سے $\text{ص}_{\text{لا}}^{۲} = \frac{\text{ج}_{\text{لا}}}{\text{س}} = \frac{۱}{۵}\,\text{ب}^{۲}$ اور $\text{ج}_{\text{لا}} = \frac{۱}{۵}\,\text{س ب}^{۲}$

اور $\text{ص}_{\text{ما}}^{۲} = \frac{\text{ج}_{\text{ما}}}{\text{س}} = \frac{۳}{۷}\,\text{ا}^{۲}$ اور $\text{ج}_{\text{ما}} = \frac{۳}{۷}\,\text{س ا}^{۲}$

سیالی دباؤ کے مرکز سے متعلق جو ضابطہ (۲) اخذ کیا گیا ہے (یعنے $\text{ماَ} = \frac{\text{ج}_{\text{لا}}}{\text{ھ}_{\text{لا}}}$) اس میں محور م لا مایع کی سطح میں واقع ہے۔ اگر تعمیم کی خاطر اس محور کو ح سے تعبیر کیا جائے تو

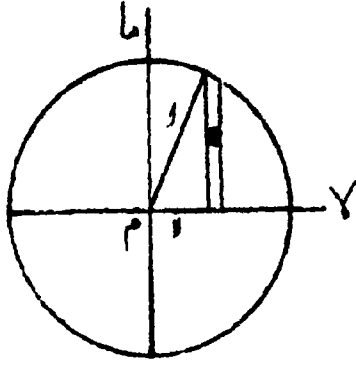
$$\text{ماَ} = \frac{\text{ج}_{\text{ح}}}{\text{ھ}_{\text{ح}}} = \frac{\text{رقبہ}\,(\text{ص}_{\text{ح}}^{۲})}{\text{رقبہ}\,(\text{غ}_{\text{ح}})} = \frac{\text{ص}_{\text{ح}}^{۲}}{\text{غ}_{\text{ح}}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{ز})$$

جس میں $\text{ص}_{\text{ح}}$ = رقبہ کا گردشی نصف قطر محور ح کے گرد اور $\text{غ}_{\text{ح}}$ = رقبہ کے ہندسی مرکز کا عمق محور ح کے نیچے۔

**توضیحی مثال۔** پہلے ایک دائرہ کا گردشی معیار اثر اس کے ایک قطر کے گرد دریافت کرو اور پھر ضابطہ (ز) کے ذریعہ اس کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جبکہ دائرہ کسی مایع میں انتصاباً واقع ہے اور اس کا مرکز سطح مائع سے عمق ع پر ہے۔

**حل۔** فرض کرو دائرہ کا نصف قطر ا ہے، م لا، م ما اس کے دو علی القوائم محور ہیں اور جمود کا معیارِ اثر محور م ما کے گرد مطلوب ہے۔ دیکھو شکل ۱۰۹۔

دائرہ کا جمود کا معیارِ اثر م ما کے گرد $\int\int \text{لا}^{۲}\,\text{فرلا فرما}$ ہے جو پورے دائرہ کے اوپر محسوب کیا جاتا ہے۔ ہم اس کے ایک ربع کے لیے اس جمود کے معیار اثر کی قیمت دریافت کرینگے اور چونکہ یہ ہر ربع کے لیے مساوی ہے اس کو ۴ سے ضرب دینے سے پورے دائرہ کے لیے قیمت نکل آئیگی۔

دائرہ کی مساوات $لا^2 + ما^2 = ل^2$ ہے پس پہلے تکمل میں ما کے لیے

شکل ۱۰۹

حدود تکمل ہیں صفر اور $\sqrt{ل^2 - لا^2}$ اور پھر دوسرے تکمل میں لا کے لیے حدود صفر اور ل ہیں

لہٰذا $\frac{مجِ لا}{4} = \int_0^{ل} \int_0^{\sqrt{ل^2 - لا^2}} لا^2 \, فزلا \, فزما = \int_0^{ل} لا^2 \sqrt{ل^2 - لا^2} \, فزلا$

لا = ل جب طہ لکھنے سے فزلا = ل جم طہ فزطہ اور حدود ہوجاتے ہیں صفر اور $\frac{\pi}{2}$

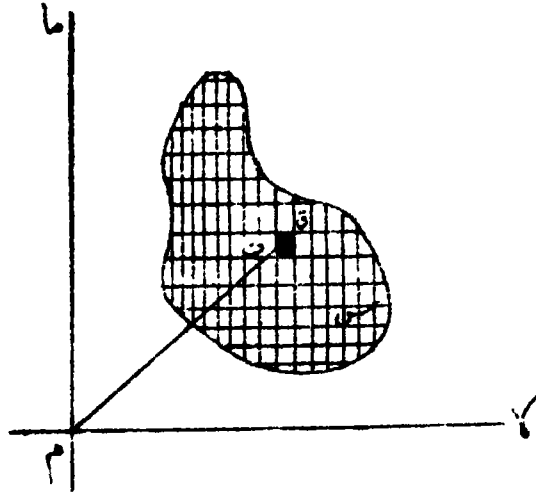
پس $\frac{مجِ لا}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ل^2 جب^2 طہ \, ل جم طہ \, فزطہ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} جب^2 طہ \, جم^2 طہ \, فزطہ = \frac{\pi ل^4}{16}$

$\therefore مجِ لا = \frac{\pi ل^4}{4} = (\pi ل^2) \frac{ل^2}{4}$

لہٰذا ضابطہ (ز) سے دائرہ کے دباؤ کا مرکز سطح مایع سے عمق $\bar{ما}$

$$= \frac{\frac{ل^2}{4}}{عح} = \frac{ل^2}{4 عح} \text{ پر واقع ہے۔}$$

**۹ ۔ قطبی جمود کا معیار اثر** ـــــ رقبہ س مستوی لا م ما کے اندر واقع ہے۔ (دیکھو شکل ۱۱۰)۔ اس کے عنصری مستطیل ف ذ

کے جمود کا معیار اثر مبدا م کے گرد رقبہ ف ق مضروب فاصلہ م ف کا مربع ہے۔ یعنے ($لا^2$ + $ما^2$) مف لا مف ما ہے۔

شکل نمبر 11

پس پورے رقبہ کے لیے مج$_م$ = ∫∫($لا^2$ + $ما^2$) فرلا فرما ہے
لیکن علامت مساوات کے بائیں جانب کا جملہ

= ∫∫ $لا^2$ فرلا فرما + ∫∫ $ما^2$ فرلا فرما = مج$_{لا}$ + مج$_{ما}$

پس کسی رقبہ کے جمود کا معیارِ اثر مبدا کے گرد مساوی ہے حاصل جمع اس رقبہ کے جمود کے معیار ہائے اثر کے جو محور لا اور محور ما کے گرد لیے جائیں

# مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے لیے مج$_{لا}$ = $\frac{\pi ب^2}{4}$

اور مج$_۱$ = $\frac{س ل^۲}{۴}$ جس میں س = رقبہ

(۲) مثلث مساوی الاضلاع کے رقبہ کے جمود کا معیارِ اثر اس کے ہندسی مرکز میں سے گزرنے والے اور ایک ضلع کے متوازی محور کے گرد = $\frac{\sqrt{۳} ل^۴}{۹۶}$ جس میں ل مثلث کے ضلع کی قیمت ہے۔

(۳) کنارہ ل کے مکعب کے جمود کا معیارِ اثر اس کے کسی ایک پہلو کے مستوی کے گرد $\frac{ل^۵}{۱۲}$ ہے۔

(۴) ایک قائم دائری مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر = ص اور ارتفاع = ع تو اس کے جمود کا معیار اثر اس کے قاعدہ کے مستوی کے لحاظ سے $\frac{\pi ص^۲ ع^۳}{۳۰}$ ہے

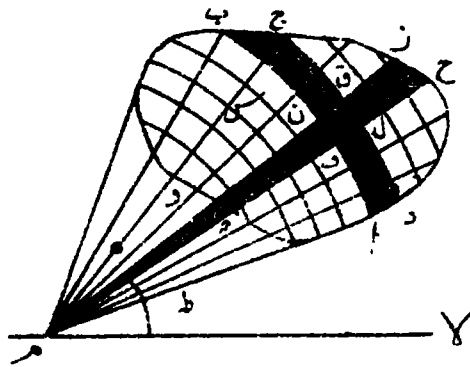
(۵) ایک مثلث شکل کا پانی روکنے کا دروازہ ہے جس کا قاعدہ پانی کی سطح کو مس کرتا ہے اور راس پانی کے اندر قاعدہ کے انتصاباً نیچے واقع ہے۔ دروازہ پر کے دباؤ کا مرکز دریافت کرو۔

**۱۰۔ قطبی محدد۔ مستوی رقبہ۔** جب کسی رقبہ کو محدود کرنے والے منحنیوں کی مساواتیں قطبی محددوں میں دی جاتی ہیں تو شکل ۱۱۱ کی طرح اس کو معف طہ مساوی زاویئی میل والے سمتی نیمقطروں سے تقسیم کیا جاتا ہے اور پھر مرکز مبدا مان کر باہم دیگر معف ر مساوی نیمقطری فصل والے دائروں سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اس طرح رقبہ س ایک کثیر تعداد مستطیل ٹکڑوں میں منقسم ہو جائیگا جیسے ف ن ق ر = معف س ہے۔

$$معف س = \frac{۱}{۲} (ر + معف ر)^۲ معف طہ - \frac{۱}{۲} ر^۲ معف طہ$$

$$= ر معف ر معف طہ + \frac{۱}{۲} معف ر^۲ معف طہ \quad ........ (۱)$$

اب فصل (۳) کے تفاعل ف (لا، ما) کے عوض قطبی محددوں والا ایک تفاعل استعمال

شکل ۱۱۱

کرنا ہوگا ۔ فرض کرو کہ یہ فا (ر، ط) ہے۔ تو فصل (۳) کے عمل کے بموجب ایک نقطہ (ر، ط) جزو رقبہ مف س کا منتخب کرکے خطہ س کے اندر ہر مف س کے لیے حاصل ضرب فا (ر، ط) مف س تیار کیا جاتا ہے اور ان سبھوں کو جمع کرلیا جاتا ہے اور بالآخر مف ر ← ۰ اور مف ط ← ۰۔ ایسی تحدید کی صورت میں نصاب ہذا سے بلند تر نصاب کی کتابوں میں بتایا جاتا ہے کہ مف س کی بجائے صرف ر مف ر مف ط ہی لکھا جاسکتا ہے ۔ پس

نہا (مف ر ← ۰، مف ط ← ۰) ∑ ∑ فا (ر، ط) ر مف ر مف ط = ∫∫ فا (ر، ط) ر فر ر فر ط ... (۲)

اور یہ جملہ خطہ س کے اوپر تفاعل فا (ر، ط) کا دُہرا تکملہ کہلاتا ہے اور وہ متواتر تکملوں کے ذریعہ محسوب کیا جاتا ہے ۔

(۲) کی سادہ ترین صورت خطہ س کے رقبہ کی تعیین ہے یعنے

رقبہ س = ∫∫ ر فر ط فر ر = ∫∫ ر فر ر فر ط .... (ز)

جبکہ رقبہ کسی منحنی اور اس کے دو سمتی نیم قطروں سے محدود ہوتا ہے تو (ز) کی

پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$س = \int^{ب} \int^{م} سا فر طہ فر سا = \frac{1}{2} \int^{ب} سا^2 فر طہ$$

جو تیرہویں باب کی مساوات (د) سے مطابق ہوتا ہے۔

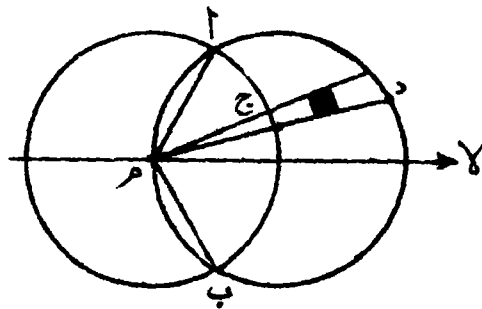
قطبی محددوں میں دُہرے تکملے ذیل کی دو صورتوں میں سے کسی ایک صورت کے ہوتے ہیں :—

$$\int\int فا(سا، طہ)\ سا\ فر طہ\ فر سا \quad یا \quad \int\int ما(سا، طہ)\ سا\ طہ \quad (۳)$$

**توضیحی مثال**۔ دائرہ سا = ۲ ص جم طہ کے اندر اور دائرہ سا = ص کے باہر کا رقبہ دریافت کرو۔

**حل**۔ پہلے دُہرے تکمل کے لیے حدود معلوم ہونے چاہییں جن سے رقبۂ مذکور محدود ہے۔

دائروں کے تقاطع کے نقطے ا $\left(= سا، \frac{\pi}{3}\right)$ اور

ب $\left(= سا، -\frac{\pi}{3}\right)$ ہیں۔ پہلی صورت مندرجہ (۳) استعمال کی جائے۔

شکل ۱۱۲

مطلوبہ حدود ہیں سا = م ج = ص اور سا = م د = ۲ ص جم طہ

اور طہ کے لیے ہیں $\frac{\pi}{3}$ اور $-\frac{\pi}{3}$

پس رقبہ س = $\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \int_{ص}^{۲ص\, جم\, ط}$ ر فرط فرر = $\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{1}{۲}$ (۴ص² جم² ط - ص²) فرط

= ص² $\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{1}{۲}\sqrt{۳}\right)$ = جواب

قطبی محددوں سے متعلق سوالات حل کرنے میں مندرجۂ ذیل ضابطے استعمال ہوتے ہیں۔ اور یہ بآسانی اخذ کیے جا سکتے ہیں :—

(۱)　$م_{ل}$ = $\iint$ ر² جب ط فرر فرط

(۲)　$م_{ا}$ = $\iint$ ر² جم ط فرر فرط

(۳)　$مج_{ل}$ = $\iint$ ر³ جب² فرر فرط

(۴)　$مج_{ا}$ = $\iint$ ر³ جم² فرر فرط

(۵)　$مج_{م}$ = $\iint$ ر³ فرر فرط

## توضیحی مثال۔ دو چشمی منحنی (یا ایٹرن) (Lemniscate)

ر² = ا² جم ۲ ط کے ایک حلقہ کا ہندسی مرکز معلوم کرو۔

حل۔ چونکہ مرلا ایک محور تشاکل ہے اس لیے آ یعنے ہندسی مرکز کا معین = ۰

شکل ۱۱۳

رقبہ س کی تعیین کے لیے $\frac{1}{۲}$ س = $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{۰}^{ا\sqrt{جم ۲ط}}$ ر فرط فرر

= $\frac{ا^۲}{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}$ جم ۲ ط فرط = $\frac{ا^۲}{۴}$

$\frac{1}{2}$ ھ$_1$ = $\frac{4}{3}$ ل ∫ ... جم ط فرط

= $\frac{1}{3}$ ل$^3$ ∫ (۱ - ۲ جیب$^2$ ط)$^{\frac{3}{2}}$ جم ط فرط

جب ط = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ی لکھو تب $\frac{1}{2}$ ھ$_1$ = $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ل$^3$ ∫ (۱ - ی$^2$)$^{\frac{3}{2}}$ فری = $\frac{\pi}{24}$ ل$^3$ $\sqrt{2}$

∴ لا یعنے ہندسی مرکز کا مقطوعہ = $\frac{ھ_1}{س}$ = $\frac{\pi}{8}$ ل $\sqrt{2}$ = جواب

# مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) دائرہ سا = ۲ جس جم ط سے محدود خطہ کے اوپر ج = $\frac{\pi ۳ ص^۲}{۲}$

(۲) دائرہ سا = ۳ جم ط کے اندر اور دائرہ سا = جم ط کے باہر کا رقبہ = ۲$\pi$

(۳) دائرہ سا = ۳ جم ط کے اندر اور خطِ صنوبری سا = ۱ + جم ط کے باہر کا رقبہ = $\pi$

(۴) منحنی سا = ل جم ۲ ط کے حلقہ سے محدود رقبہ کے ہندسی مرکز کے لیے لا = $\frac{۱۲۸ \sqrt{۲} ل}{۱۰۵ \pi}$

(۵) دو خمیی منحنی سا$^2$ = ل$^2$ جم ۲ ط کے لیے ج$_1$ = $\frac{س}{۴۸}$ (۳$\pi$ - ۸) ل$^2$

## ۱۰ ۔ تہرے تکمل کے ذریعہ حجم کی تعیین ۔

فرض کرو کہ مجسم (جو دی ہوئی مساواتوں والی سطحوں سے محدود ہے) محدد مستویوں کے متوازی مستویوں کے ذریعہ مستطیلی متوازی السطوح عناصر میں تقسیم کیا جاتا ہے جن کے ابعاد معف ی معف ما اور معف لا ہیں پس عنصری حجم معف ی معف ما معف لا ہے

پہلے ایک محدد محور کے متوازی کالم (Column) کے تمام عناصر کو جمع کرو پھر ایسے تمام کالموں کو جوڑ لو جو ایک محدد مستوی کے متوازی تراش کے اندر (جس میں محور مذکور شامل ہے) واقع ہیں ۔ اور بالآخر مجسم زیر بحث

کے اندر کی ایسی تمام تراشوں کو جمع کرکے دی ہوئی سطحوں سے محدود مجسم کے
کے جملہ عناصر کو جوڑ لو۔ تب حجم ح اس تہرے مجموعہ کی انتہا ہوگی جبکہ
مف ی، مف ما اور مف لا ہر ایک بطور انتہا صفر کو پہنچیگا۔ یعنے

$$\text{ح} = \lim_{\substack{\text{مف لا}\to 0\\ \text{مف ما}\to 0\\ \text{مف ی}\to 0}} \sum\sum\sum \text{مف لا مف ما مف ی} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جبکہ عمل تجمیع پورے جسم پر جو دی ہوئی سطحوں سے محدود ہے کیا جاتا ہے۔
اس انتہا کو تعبیر کیا جاتا ہے بذریعہ

$$\text{ح} = \iiint_{\text{خ}} \text{فرلا فرما فری} \quad \ldots\ldots (\text{ح})$$

۳ اصول کی توسیع سے (ح) کے متعلق کہا جاتا ہے کہ وہ تفاعل (لا، ما، ی) = ۱
کا پورے خطہ پر تکمل کرنے کا نتیجہ ہے۔ زیادہ عام مسائل میں لا، ما، ی
کے کسی متغایر تفاعل کو کسی دیے ہوئے خطہ خ میں تکمل کرنے کی
ضرورت پیش آتی ہے اور اس کو طریق کتابت ذیل سے ظاہر کرتے ہیں :—

$$\iiint_{\text{خ}} \text{ف(لا، ما، ی) فرلا فرما فری} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نصاب ہذا سے بلند تر معیار کی کتابوں میں بتایا جاتا ہے کہ تہرا تکملہ (۲) متواتر
عمل تکمل سے محسوب کیا جاتا ہے۔ اس کے حدود کی تعیین کا وہی طریقہ ہے جو
مساوات (ح) کے لیے مستعمل ہے۔

**توضیحی مثال۔** مجسم ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$
کا حجم دریافت کرو جو محددوں کے پہلے ہشتمی حصہ میں واقع ہے۔

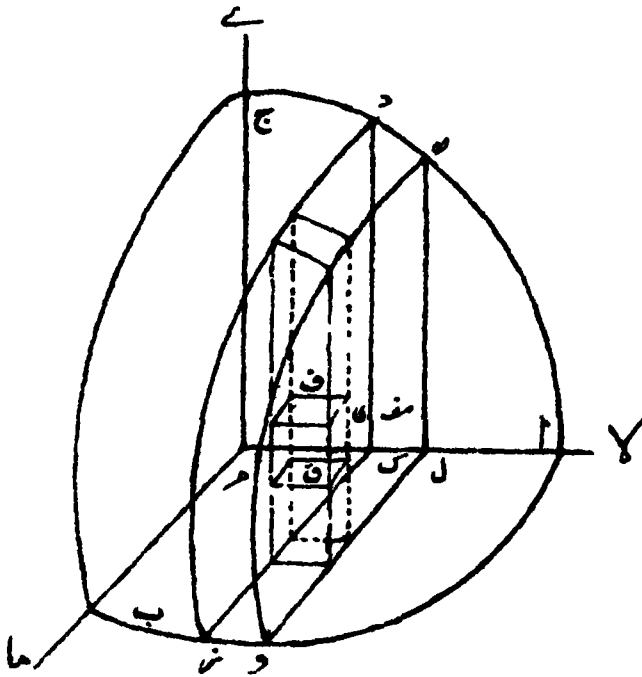
**حل۔** شکل ۱۱۴ میں یہ حجم م - ا ب ج بتایا گیا ہے اس
کی حائط سطحوں کی مساواتیں حسب ذیل ہیں :—

(۱) $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ = (سطح ا ب ج)

(۲) ی = ۰ = (مستوی ھ ا ب)

(۳) ما = ۰ = (مستوی ھ ا ج)

(۴) لا = ۰ = (مستوی ھ ب ج)

ف ق ایک عنصری متوازی السطوح ہے جس کے ابعاد مف ی مف ما مف لا میں

شکل ۱۱۴

مجسم کا اس کے مماثل ٹکڑوں میں تقسیم ہونا تصور کیا جاتا ہے۔
پہلے بلحاظ ی تکمل کر کے ایک مینار کے عناصر جمع کر لیے جاتے ہیں۔ اس
تکمل میں ی کے حدود صفر اور ج $\sqrt{1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}}$ ہیں جو (۲) اور (۱) کے

حل سے علی الترتیب مستنبط ہوتے ہیں۔

پھر ایسے میناروں کو ایک تراش مثلاً د ھ و س ک ل میں جوڑ لینے کے لیے بلحاظ ما تکمل کیا جاتا ہے۔ اس تکمل میں ما کے حدود صفر اور $\text{ب}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}$ ہیں جو (۳) اور منحنی ا س ب کی مساوات $\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1\right)$ کو حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں آخر میں ایسی تمام تراشوں کو اکٹھا کر لینے کے لیے بلحاظ لا تمام خط م ا ب ج میں تکمل کیا جاتا ہے جس کے لیے لا کے حدود صفر اور ا ہیں

$$\text{پس مطلوبہ حجم ح} = \int_0^{\text{ا}}\int_0^{\text{ب}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}}\int_0^{\text{ج}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}}}\text{فرلا فرما فری}$$

$$=\text{ج}\int_0^{\text{ا}}\int_0^{\text{ب}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\text{فرلا فرما}$$

$$=\frac{\pi\,\text{ج ب}}{4\,\text{ا}^2}\int_0^{\text{ا}}(\text{ا}^2-\text{لا}^2)\,\text{فرلا}=\frac{\pi\,\text{ا ب ج}}{3}=\text{جواب}$$

# مثالیں

(۱) تہرے تکمل سے چار سطحی مجسم کا حجم دریافت کرو جو محدد مستویوں اور مستوی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}+\frac{\text{ی}}{\text{ج}}=1$ سے محدود ہے　　[جواب = $\frac{\text{ا ب ج}}{6}$

(۲) مندرجۂ ذیل سطوح سے محدود مجسم کا حجم معلوم کرو:۔

$\text{ی}=4-\text{لا}^2-\frac{1}{4}\text{ما}^2$ اور $\text{ی}=3\,\text{لا}^2+\frac{1}{4}\text{ما}^2$　　[جواب = $4\pi\sqrt{2}$

(۳) ص نصف قطر کے کرہ کا مرکز ایک قائم دائری اسطوانہ کی سطح پر ہے جس کے

قاعدہ کا نصف قطر $\frac{\text{ص}}{2}$ ہے۔ کرہ سے اس طرح اسطوانہ کا جو حصہ قطع ہوجاتا ہے اس کا حجم دریافت کرو [جواب = $\frac{2}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\text{ص}^3$

(۴) ثابت کرو کہ مجسم زائدی مکانی نما (Hyperbolic paraboloid) ج ی = لا ما، مستوی لا ما اور مستویاں لا = $\text{ل}_1$، لا = $\text{ل}_2$، ما = $\text{ب}_1$، ما = $\text{ب}_2$ سے محدود حجم = $\frac{(\text{ل}_2^2 - \text{ل}_1^2)(\text{ب}_2^2 - \text{ب}_1^2)}{4\,\text{ج}}$ ہے۔

(۵) مجسم مکانی نما $\text{ما}^2 + \text{ی}^2 = 4\,\text{ل لا}$ مکانی اسطوانہ $\text{ما}^2 = \text{ل لا}$ اور مستوی لا = ۳ل سے محدود حجم = $(26 + 9\pi)\,\text{ل}^3$ ہے۔

# بائیسواں باب

## معمولی تفرقی مساواتیں

عا - ہر ایک سائنس میں جب کبھی دو یا اس سے زیادہ امور کا باہمی تعلق مصرحہ حالات کے تحت ان کی ایک دوسرے کے لحاظ سے تبدیلی کی شرح کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے تو عموماً تفرقی مساواتیں استعمال کی جاتی ہیں جو احصاء کے مشتقات یا تفرقوں پر مشتمل ہوتی ہیں ان مساواتوں کو حل کر کے متغیروں کا باہمی رشتہ دریافت کیا جاتا ہے۔ بطور مثال،

فرما = فہ (لا) فرلا

ایک آسان تفرقی مساوات ہے۔ اس میں لا اور ما کا درمیانی رشتہ معلوم کرنے کے لیے صرف عمل تکمل کی ضرورت ہے۔ تفرقی مساواتوں کی عام تحقیق بذات خود ایک مبسوط علم ہے جس کا اصل منشاء و مقصد یہ ہے کہ مختلف قسم کی مساواتوں کا مطالعہ کر کے ایسے طریقے دریافت کیے جائیں جن سے ان مساواتوں کے متغیروں کے باہمی تعلقات معلوم ہو جائیں۔

معمولی تفرقی مساواتوں سے مراد ایسی مساواتیں ہیں جن میں جزوی مشتقات یا تفرقے شریک نہیں ہیں۔ یہاں ہم صرف اس نوع کی مساواتوں سے بحث کرینگے۔

تفرقی مساوات کے رُتبہ سے مراد اس کے سب سے بلند مشتق کا
ہے۔
تفرقی مساوات کے درجہ کا مفہوم اس کے بلندترین رتبہ کے
کا درجہ ہے۔ مثلاً

$$\text{ت}\left(\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}\right)^{3} + ۴\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2} - \text{ما} = ۰$$

سرے رتبہ اور تیسرے درجہ کی ہے۔

## ۲۔ تفرقی مساواتوں کا حصول۔

مساوات $\text{ما} = \text{ا جب لا}$ . . . . . . . . (۱)
رو۔ اس میں صرف ایک اختیاری مستقل ا ہے۔ اس کو لاانتہا
قیمتیں دی جا سکتی ہیں اور ان میں سے ہر ایک قیمت کے لیے
ت مذکور ایک منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لحاظ سے ایک مساوات
ں ایک واحد اختیاری مستقل شامل ہے منحنیوں کے ایک واحد نامتناہی
ں کی نمائندہ ہے۔ تفرقی مساوات جو ایک ہی خاندان کے
ں کی نمائندگی کرتی ہے ا کو اس طرح ساقط کرنے سے حاصل
ہے :—

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ا جم لا} \text{،} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{جب لا}}\,\text{جم لا}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما ظم لا} = ۰ \quad \ldots\ldots \quad (۲)$$

ات (۱) تفرقی مساوات (۲) کی ابتدائی (Primitive) کہلاتی ہے۔
ایک دوسری مثال $\text{ما} = \text{ل لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا} + \text{ب}$ . . . . . (۳)
لرو۔
ب خاص قیمت ( بالفرض ل. ) کے لیے ب کو قیمتوں کی ایک

...ناہی تعداد دی جا سکتی ہے اور قیمتوں کے ہر جفت یا جوڑ ( ا، ب )
... لیے مساوات ( ۳ ) ایک منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ اسی طرح ب کی
... خاص قیمت ب. کے لیے ا کو قیمتوں کی ایک نا متناہی تعداد
... جا سکتی ہے جن میں سے ہر ایک ایک منحنی کی نمائندہ ہے۔ جب
... مساوات میں دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں تو اس کی
...ت کہا جاتا ہے کہ وہ منحنیوں کے ایک دُہرے نا متناہی خاندان
...ائندہ ہے۔ مساوات ( ۳ ) منحنیوں کے جس قبیلہ کو تعبیر کرتی ہے اُسی
...بلہ کو تعبیر کرنے والی تفرقی مساوات ا اور ب کے اسقاط سے اس
...ح حاصل کی جا سکتی ہے :-

$$\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{ا}{لا} \text{، } \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} = \frac{ا}{لا^۲} \quad \text{پس} \quad \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} = \frac{\frac{فر ما}{فر لا}}{لا}$$

$$\text{اور} \quad لا \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} + \frac{فر ما}{فر لا} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

...اوات ( ۳ ) تفرقی مساوات ( ۴ ) کی ابتدائی (Primitive) ہے۔
...نوں مندرجۂ بالا مثالوں میں تفرقی مساوات جملہ اختیاری
...ستقلوں کو ساقط کر کے حاصل کی گئی ہے، اور اس لیے اس میں ایسا
...ق شریک ہے جس کا رتبہ ابتدائی مساوات کے اختیاری مستقلوں
...عداد کے مساوی ہے۔ عام طور پر ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ن اختیاری
...ل رکھنے والی ابتدائی مساوات کی تفرقی مساوات میں ن ہی درجہ کا
...ق ہوتا ہے اس سے بلند تر درجہ کا نہیں ہوتا۔

## مثالیں

مندرجۂ ذیل ابتدائی مساواتوں کی تفرقی مساواتیں حاصل کرو :-

۱) $لا^۲ + (ما - ب)^۲ = ص^۲$ [جواب $لا \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - \left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^۳ - \frac{فر ما}{فر لا} = ۰$

(۲) ما = جب ؍ لا        [جواب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ − $\frac{\sqrt{\text{۱ − ما}^{۲}}}{\text{لا}}$ جب ؍ ما = ۰

(۳) ما = و^لا        [جواب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ − $\frac{\text{ما لوک ما}}{\text{لا}}$ = ۰

(۴) ما = مس ؍ لا        [جواب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ − $\frac{\text{جب ۲ ما}}{\text{۲ لا}}$ = ۰

(۵) س = ل (۱ − جم طہ)        [جواب $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$ − س مم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$ = ۰

## ۳ ۔ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی تفرقی مساواتیں۔

ایسی مساوات

ھ فرلا + ن فرما = ۰ . . . . . . (۲)

کی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔ جس میں ھ اور ن، لا اور ما کے تفاعل ہیں۔ اس شکل کی مساواتیں ذیل کی چار قسموں میں منقسم کی جاسکتی ہیں:۔

**قسم اول۔ متغیر جدائی پذیر۔** جب کسی تفرقی مساوات کی رقمیں اس طرح ترتیب دی جاسکتی ہیں کہ مساوات

ف (لا) فرما + فا (ما) فرما = ۰ . . . . . . (۱)

کی شکل اختیار کرلیتی ہے جس میں ف (لا) صرف ما کا تفاعل ہے اور فا (ما) صرف ما کا تفاعل، تو اس ترتیب کو متغیروں کا جدا کرنا کہا جاتا ہے۔ اور اس کا حل راست تکمل سے عمل میں آتا ہے چنانچہ

(۱) کو تکمل کرنے سے ∫ ف (لا) فرلا + ∫ فا (ما) فرما = ج . . . . . (۲)

حاصل ہوتا ہے، جس میں ج ایک اختیاری مستقل ہے۔ ایسی مساوات کو

ایک مناسب جزو ضربی پر (جو عموماً مطالعہ سے معلوم ہو جاتا ہے) تقسیم کرنے سے اس کے متغیر اکثر جدا کر دیے جا سکتے ہیں۔

**توضیحی مثال (۱)** $\sqrt{\frac{\text{۱ - لا}^2}{\text{۱ - ما}^2}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۱} = \text{۰}$ کو حل کرو

حل - کسریں صاف کرنے سے $\sqrt{\text{۱ - لا}^2}\ \text{فرما} + \sqrt{\text{۱ - ما}^2}\ \text{فرلا} = \text{۰}$

اس کو $\sqrt{\text{۱ - لا}^2}\ \sqrt{\text{۱ - ما}^2}$ پر تقسیم کرنے سے $\frac{\text{فرما}}{\sqrt{\text{۱ - ما}^2}} + \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱ - لا}^2}} = \text{۰}$

اب چونکہ متغیر جدا کر دیے گئے ہیں راست تکمل کرنے سے

$\text{جب}^{-1}\text{ما} + \text{جب}^{-1}\text{لا} = \text{ج}$ ......... (ا)

اس کو ہم ایک دوسری شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں:-

فرض کرو $\text{جب}^{-1}\text{ما} = \text{فہ}$ اور $\text{جب}^{-1}\text{لا} = \text{سہ}$

اس لیے $\text{فہ} + \text{سہ} = \text{ج}$ پس $\text{جب}(\text{فہ} + \text{سہ}) = \text{جب ج}$

یعنے $\text{جب فہ جم سہ} + \text{جم فہ جب سہ} = \text{ک}$ جس میں ک ایک مستقل ہے۔

لیکن $\text{جب فہ} = \text{ما}$ اور $\text{جب سہ} = \text{لا}$ اور $\text{جم فہ} = \sqrt{\text{۱ - ما}^2}$ اور $\text{جم سہ} = \sqrt{\text{۱ - لا}^2}$

$\therefore\ \text{ما}\sqrt{\text{۱ - لا}^2} + \text{لا}\sqrt{\text{۱ - ما}^2} = \text{ک}$ ......... (ب)

واضح ہو کہ (ا) اور (ب) دو علیحدہ حل نہیں ہیں بلکہ ایک ہی حل کی دو صورتیں ہیں اور ان میں صرف ایک ایک ہی اختیاری مستقل ہے

**توضیحی مثال (۲)** $\text{لا}^2\text{ما}^2\ \text{فرلا} + \text{لا فرما} + \text{ما فرلا} = \text{۰}$ کو حل کرو۔

حل - چونکہ $\text{لا فرما} + \text{ما فرلا} = \text{فر}(\text{لا ما})$ اس لیے لا ما کو ی مان کر ہم لکھ سکتے ہیں

$\text{ی}^2\ \text{فرلا} + \text{فری} = \text{۰}$ پس $\text{فرلا} + \frac{\text{فری}}{\text{ی}^2} = \text{۰}$

چونکہ متغیر جدا ہو گئے ہیں اس لیے $\int \text{فرلا} + \int \text{ی}^{-2}\ \text{فری} = \text{ج}$

پس $\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{ی}} = \text{ج}$ یعنے $\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{لا ما}} = \text{ج}$ جواب

# مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$\frac{\text{جم لا}}{\text{قط ما}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جب ما}}{\text{جب}^2\text{لا}}\,\text{فرما} = 0$ [جواب $\frac{\text{جب}^3\text{لا}}{3} - \text{لوک جم ما} = \text{ج}$

) $(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لاما} = \text{ل لا}$ {جواب $\text{لوک}\,\frac{\text{ما} - \text{ل}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{ج}$
بشکل دیگر $\text{ما} - \text{ل} = \text{ک}\sqrt{1-\text{لا}^2}$}

) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1+\text{ما}^2}{\text{لاما}(1+\text{لا}^2)}$ [جواب $(1+\text{لا}^2)(1+\text{ما}^2) = \text{ج لا}^2$

ا) $\text{و}\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 2\,\text{ما}\right) = \text{لاما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ [جواب $\text{لا}^2\text{ما} = \text{و}^{\text{ج}}\ \text{و}^{\frac{1}{\text{و}}}$

۷) $\text{و}^{\text{لا}^2}\text{ما فرلا} - \frac{\text{ا}^{\text{لوک ما}}}{\text{لا}}\,\text{فرما} = 0$ [جواب $\frac{1}{2}\,\text{و}^{\text{لا}^2} - \frac{\text{ا}^{\text{لوک ما}}}{\text{لوک ا}} = \text{ج}$

## قسم دوم - متجانس مساواتیں۔

مساوات $\text{م فرلا} + \text{ن فرما} = 0$ ............ (۱)
جانس کہلاتی ہے اگر م اور ن، لا اور ما کے اُسی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔
[نوٹ - لا اور ما کا تفاعل اپنے متغیروں کے لحاظ سے متجانس کہلاتا ہے
لا اور ما کے بجائے ل لا اور ل ما (جن میں ل اختیاری ہے) تعویض کرنے پر
لی کسی قوت کا مضروب ابتدائی تفاعل حاصل ہوتا ہے۔ ل کی یہ قوت ابتدائی
ماعل کا درجہ کہلاتی ہے۔]
ایسی تفرقی مساواتیں $\text{ما} = \text{و لا}$ ............ (۳)
ویض کرنے سے حل کی جاسکتی ہیں۔ کیونکہ اس تعویض سے و اور لا کی رقموں
ں ایک تفرقی مساوات دستیاب ہوتی ہے جس کے متغیر جدائی پذیر ہیں۔
چنانچہ (۱) سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ............ (۴)

اور (۳) کو تفرق کرنے سے　فرما / فرلا = لا فرو / فرلا + و　　　... (۵)

کا بائیں جانب کا رکن عمل تعویض (۳) سے صرف و ہی کا تفاعل ہو جاتا ہے
بلہ تعویض (۳) کو عمل میں لایا جاتا ہے ۔ پس (۵) اور (۳) کو استعمال کرکے (۴) سے
مل ہوتا ہے

لا فرو / فرلا + و = ف (و)　　　........ (۶)

متغیر لا اور و ایک دوسرے سے جدا کردیے جا سکتے ہیں ۔

## توضیحی مثال ۔ تفرقی مساوات　لا فرما = ما فرلا + √(لا² + ما²) فرلا

مکمل حل پیش کرو ۔

حل ۔ مساوات کو ترتیب دینے سے　ما فرلا = (√(لا² + ما²) - لا) فرما

اس میں م اور ن علی الترتیب ما اور (√(لا² + ما²) - لا) ہیں اور دونوں متجانس
لا اور ما کے لحاظ سے پہلے درجہ کے ہیں ۔

پس ما = ولا لکھنے سے فرما = و فرلا + لا فرو

لا (و فرلا + لا فرو) = ولا فرلا + √(لا² + لا² و²) فرلا

∴ لا فرو = √(۱ + و²) فرلا

لا √(۱ + و²) پر تقسیم کرنے سے　فرلا / لا = فرو / √(۱ + و²)

پس تکمیل کرنے سے　ج + لوک لا = لوک (و + √(۱ + و²))

∴ لوک جَ لا = لوک (و + √(۱ + و²))　اور جَ لا = و + √(۱ + و²)

∴ جَ لا - و = √(۱ + و²)، مربع کرنے سے جَ² لا² - ۲ جَ ولا + و² = ۱ + و²

پس ۱ + ۲ جَ ولا - جَ² لا² = ۰ ۔ یعنے ۱ + ۲ جَ ما - جَ² لا² = ۰ ۔ جواب

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تفرقی مساواتوں کو حل کرو :—

(۱) ما$\sqrt{}$۱ − ما$^۲$ فرلا = ما$\sqrt{}$۱ + لا$^۲$ فرما [جواب، جب$^{-۱}$ ما = لوک ج (لا + $\sqrt{}$۱ + لا$^۲$)

(۲) (لا + ما) فرلا + (ما − لا) فرما = ۰ [جواب، لوک (لا$^۲$ + ما$^۲$) − ۲ مس$^{-۱}$ $\frac{ما}{لا}$ = ج

(۳) لا جم $\frac{ما}{لا}$ $\frac{فرما}{فرلا}$ = ما جم $\frac{ما}{لا}$ − لا [جواب، لا و$^{\frac{ما}{لا}}$ = ج

(۴) (۳ ما$^۳$ + ۲ ما$^۲$ لا) فرلا − لا$^۳$ فرما = ۰ [جواب، (۳ ما − لا)$^{-۱}$ (ما + لا) = ج لا$^۲$ ما$^۲$

(۵) ایک منحنی مبدا میں سے گزرتا ہے اور جس کا ڈھلان ہر نقطہ پر $\frac{\sqrt{۱ - ما^۲}}{۱ + لا^۲}$ کے مساوی ہے۔ اس کی مساوات دریافت کرو۔ [جواب، لا = $\frac{ما}{\sqrt{۱ - ما^۲}}$

نوٹ۔ اگر مساوات م فرلا + ن فرما کے سر م اور ن خطی یعنی ٫لا + ب ما + ج (جس میں ج ≠ ۰) کی صورت کے ہوں تو ذیل کے طریقہ سے متغیروں کو جدا کر دیا جا سکتا ہے۔

مثال (۱) تفرقی مساوات ۲ ما فرلا + (لا + ۳ ما − ۱) فرما = ۰ کو حل کرو۔

حل۔ رقموں کو ترتیب دینے سے (۳ ما − ۱ + لا) فرما + ۲ ما فرلا = ۰

فرض کرو لا = لاَ + عہ اور ما = ماَ + یہ جن میں عہ اور یہ مستقل ہیں

پس فرلا = فرلاَ اور فرما = فرماَ

تب ۲ (ماَ + عہ) فرلاَ + (لاَ + عہ + ۳ ماَ + ۳ یہ − ۱) فرماَ = ۰ ..... (۱)

دی ہوئی تفرقی مساوات متجانس بنائی جاتی ہے اگر یہ = ۰ اور عہ + ۳ یہ − ۱ = ۰۔

ان آخری مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرنے سے یہ = ۰ اور عہ = ۱ قیمتیں برآمد ہوتی ہیں۔

اس لیے لاَ = لا − ۱ اور ماَ = ما

اب ماَ = ولاَ لکھو یا فرماَ = و فرلاَ + لاَ فرو اور مساوات (۱) میں تعویض کرو۔

تب ۲ ولاَ فرلاَ + ( لاَ + ۳ لا و) (و فرلاَ + لاَ فرو) = ۰

لا پر تقسیم کرنے اور سادہ کرنے سے، ۲ وفرلاَ + وفرلاَ + ۳ و^۲ فرلاَ + لاَ فرو = ۰

یعنے فرلاَ ۳ و (۱ + و) + فرو لاَ (۱ + ۳ و) = ۰

پس (فرلاَ / لاَ) + (فرو (۱ + ۳ و)) / (۳ و (۱ + و)) = ۰

اس مساوات کے سیدھے جانب کے رکن کی دوسری رقم کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

(فرو / ۳) ( (ا / و) + (ب / (۱ + و)) ) = (فرو / ۳) { (ا + (ا + ب) و) / (و (۱ + و)) }

پس ا + ا و + ب و = ۱ + ۳ و اس لیے ا = ۱ اور ا + ب = ۳ ∴ ب = ۲

اور (فرلاَ / لاَ) + (فرو / ۳) { (۱ / و) + (۲ / (۱ + و)) } = ۰

پس تکمل کرنے سے لوک لاَ + ⅓ لوک و + ⅔ لوک (۱ + و) = ج

∴ لاَ و^(۱/۳) (۱ + و)^(۲/۳) = ج اس لیے لاَ^۳ و (۱ + و)^۲ = ک

و کی قیمت (ماَ / لاَ) تعویض کرنے سے ماَ (لاَ + ماَ)^۲ = ک

لیکن لاَ = لا - ۱ اور ماَ = ما ∴ ما (لا + ما - ۱)^۲ = ک جواب

**مثال (۲)** تفرقی مساوات (۲ لا + ما + ۱) فرلا + (۲ ما - لا + ۲) فرما = ۰ کو حل کرو۔

حل۔ لا = لاَ + عہ اور ما = ماَ + بہ لکھنے سے

(۲ لاَ + ۲ عہ + ماَ + بہ + ۱) فرلاَ + (۲ ماَ + ۲ بہ - لاَ - عہ + ۲) فرماَ = ۰

مساوات کو متجانس بنانے کے لیے چاہیے کہ ۲ عہ + بہ + ۱ = ۰ اور ۲ بہ - عہ + ۲ = ۰

ان کو حل کرنے سے عہ = ۰ اور بہ = -۱ پس لاَ = لا اور ماَ = ما + ۱

اب (۲ لاَ + ماَ) فرلاَ + (۲ ماَ - لاَ) فرماَ = ۰

$\text{ماَ} = \text{لاَ و}$ تعویض کرنے سے $(\text{۲ لاَ} + \text{لاَ و})\ \text{فرلاَ} + (\text{۲ لاَ و} - \text{لاَ})\ (\text{و فرلاَ} + \text{لاَ فرو}) = ۰$

اس کو سادہ بنانے سے $\text{۲}(\text{۱} + \text{و}^{۲})\ \text{فرلاَ} + \text{لاَ}\ (\text{۲ و} - \text{۱})\ \text{فرو} = ۰$

$$\therefore \frac{\text{فرلاَ}}{\text{لاَ}} + \frac{(\text{۲ و} - \text{۱})\ \text{فرو}}{\text{۲}(\text{۱} + \text{و}^{۲})} = ۰$$

$$\text{پس} \int \frac{\text{فرلاَ}}{\text{لاَ}} + \int \frac{\text{و}}{\text{۱} + \text{و}^{۲}}\ \text{فرو} - \frac{۱}{۲} \int \frac{\text{فرو}}{\text{۱} + \text{و}^{۲}} = \text{ج}$$

$$\text{یعنے لوک لاَ} + \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}(\text{۱} + \text{و}^{۲}) - \frac{۱}{۲}\ \text{مس}^{-۱}\ \text{و} = \text{ج}$$

$$\therefore \text{لوک}\left\{\text{لاَ}\ (\text{۱} + \text{و}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\right\} - \frac{۱}{۲}\ \text{مس}^{-۱}\ \text{و} = \text{ج}$$

لیکن $\text{و} = \frac{\text{ماَ}}{\text{لاَ}}$ اور $\text{لاَ} = \text{لا}$ اور $\text{ماَ} = \text{ما} + ۱$

$$\therefore \text{بالآخر لوک}\left\{\text{لا}^{۲} + (\text{ما} + ۱)^{۲}\right\} + \text{مس}^{-۱}\ \frac{\text{ما} + ۱}{\text{لا}}\text{، جواب}$$

## قسم سوم ۔ ما میں پہلے درجہ کی خطی تفرقی مساوات کی صورت

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{پ ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{ب})$$

ہے جس میں پ اور ق صرف لا کے تفاعل ہیں یا مستقل

[اسی طرح $$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \text{ھ لا} = \text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{ج})$$

جس میں ھ اور ع صرف ما کے تفاعل ہیں یا مستقل، ایک خطی تفرقی مساوات ہے]

(ب) کو تکمیل کرنے کے لیے فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{د ی}$ ............ (۱)

جس میں د اور ی تعیین طلب تفاعل لائیں ۔ (۱) کو تفرق کرنے سے،

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{د}\ \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \text{ی}\ \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

(۱) اور (۲) کو (ب) میں تعویض کرنے سے

$$\text{د}\ \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \text{ی}\ \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} + \text{پ د ی} = \text{ق}$$

یعنی ء (فری / فرلا) + ((فرء / فرلا) + پ ء) ی = ق ..... (۳)

اب اگر (فرء / فرلا) + پ ء = ۰ ......... (۴) کو (جس میں ء اور ی جدائی پذیر ہیں) تکمل کر کے ء کی قیمت معلوم کر لی جائے تو

لوک و ء = − ∫ پ ء فرلا + ج

ج کو لوک و ک لکھنے سے بالآخر لوک (ء / ک) = − ∫ پ ء فرلا حاصل ہوتا ہے

پس ء = ک و^(−∫پ فرلا) ........... (۵)

ء کی یہ قیمت (۳) میں تعویض کرنے سے ک و^(−∫پ فرلا) فری = ق فرلا

یعنی فری = (ق / ک) و^(∫پ فرلا)

اس کو تکمل کرنے سے ی = (ق / ک) ∫ و^(∫پ فرلا) + جَ

لیکن ا = ء ی، پس ا = ک و^(−∫پ فرلا) (ق / ک) (∫ و^(∫پ فرلا) + جَ) ....(۶)

∴ ا = و^(−∫پ فرلا) (∫ ق و^(∫پ فرلا) + جَ) .... (۷)

**توضیحی مثال**۔ امالیت ل اور مزاحمت ز والے برقی دَور کے سروں پر جب مستقل محرکۂ برق م عمل کرتا ہے تو دَور میں برقی رَو کے نمو کا ضابطہ حاصل کرو۔

**حل**۔ اس سوال کا مطلب تفرقی مساوات ل (فرر / فرو) + زر = م کا حل ہے۔ جس میں ر کسی آن و میں دَور پر سے بہنے والی رَو کی قیمت ہے۔

نکہ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} + \frac{\text{ن}}{\text{ل}}\text{ر} = \frac{\text{م}}{\text{ل}}$ مصرحۂ بالا قسم سوم کی مساوات

اس لیے

$$= \text{و}^{-\int \frac{\text{ن}}{\text{ل}}\text{فرو}} \left( \int \frac{\text{م}}{\text{ل}}\, \text{و}^{\int \frac{\text{ن}}{\text{ل}}\text{فرو}}\, \text{فرو} + \text{ج} \right)$$

$$= \text{و}^{-\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}} \left( \int \frac{\text{م}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ن}}\, \text{و}^{\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}} + \text{ج} \right) = \frac{\text{م}}{\text{ل}} + \text{ج}\, \text{و}^{-\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}}$$

کے شرائط کے لحاظ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{جب و} = ۰ \text{ تو ر} = ۰\text{، پس } ۰ = \frac{\text{م}}{\text{ل}} + \text{ج}$$

$$\text{ج} = -\frac{\text{م}}{\text{ن}} \quad \therefore \text{ر} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \left(۱ - \text{و}^{-\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}}\right) \quad \text{جواب}$$

یات کے طالب علم کو معلوم ہوگا کہ یہ ہلم ہولٹس (Helmholtz) کا
ود مزاحمت والے برقی دَور میں رَو کے نمو کا مشہور کلیہ ہے۔

**قسم چہارم ۔ پہلے رتبہ کی غیر خطی مساواتیں**
ب تعویض سے خطی بنائی جا سکتی ہیں۔ ان کی ایک صورت

$$\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} + \text{پ ا} = \text{ق ا}^{\text{ن}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\text{د})$$

ں میں پ اور ق صرف لا کے تفاعل ہیں یا مستقل
ساواتیں بذریعہ تعویض ی = $\text{ا}^{۱-\text{ن}}$ خطی صورت (ب) قسم سوم
ل ہو سکتی ہیں۔ لیکن ضرور نہیں کہ یہی تحویل عمل میں لائی جائے
قسم سوم کے عنوان کے تحت مساواتوں کے حل کے لیے استعمال
تھا یہاں بھی کام دے سکتا ہے۔ ایک مثال سے اس کی توضیح
ی ہے۔

**توضیحی مثال** $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}} = ۲ \text{ لوک لا ا}^{۲}$ کو حل کرو۔

حل۔ یہ مساوات (د) کی صورت کی ہے جس میں $\text{پ} = \frac{۱}{\text{لا}}$ ،

$\text{ق} = ۲\ \text{لوک لا}$ ، $\text{ن} = ۲$ ، $\text{ا} = \text{ءی}$ لکھو تب $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = \text{ء}\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \text{ی}\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}$

اس کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ء}\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \left(\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ء}}{\text{لا}}\right)\text{ی} = ۲\ \text{لوک لا}\,.\,\text{ء}^{۲}\text{ی}^{۲} \quad \ldots\ldots (۱)$$

ء کو معلوم کرنے کے لیے ی، کے سر یعنے $\left(\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ء}}{\text{لا}}\right)$ کو صفر کے مساوی لکھتے ہیں۔

پس اس کے تکمل سے $\int \frac{\text{فرء}}{\text{ء}} = -\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ یعنے $\text{لوک ء} = -\text{لوک لا} = \text{لوک}\frac{۱}{\text{لا}}$

$$\therefore \text{ء} = \frac{۱}{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب چونکہ ی والی رقم نکل جاتی ہے اس لیے مساوات (۱) اب ہو جاتی ہے

$$\text{ء}\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = ۲(\text{لوک لا})\,\text{ء}^{۲}\text{ی}^{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = ۲\ \text{لوک لا}\ \text{ء}\ \text{ی}^{۲}$$

اس میں ء کی قیمت $(= \frac{۱}{\text{لا}})$ تعویض کرنے سے، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = ۲(\text{لوک لا})\frac{\text{ی}^{۲}}{\text{لا}}$

$$\therefore \frac{\text{فری}}{\text{ی}^{۲}} = ۲(\text{لوک لا})\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

اس کو تکمل کرنے سے $-\frac{۱}{\text{ی}} = \frac{۲(\text{لوک لا})}{۲} + \text{ج}$

$$\therefore \text{ی} = -\frac{۱}{(\text{لوک لا})^{۲} + \text{ج}}$$

اور چونکہ $\text{ا} = \text{ءی} = \frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ اس لیے $\text{ا} = -\frac{۱}{\text{لا}}\,\frac{۱}{(\text{لوک لا})^{۲} + \text{ج}}$

یا $\text{لا ا}\left\{(\text{لوک لا})^{۲} + \text{ج}\right\} + ۱ = ۰$ جواب

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تفرقی مساواتوں کو مکمل طور پر حل کرو۔

(۱) $\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}}\ \text{جم و} + \text{س جب و} = ۱$ [جواب، $\text{س} = \text{جب و} + \text{ج جم و}$

(۲) $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ن ا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}}$ [جواب، $\text{ا} = \text{ج لا}^{\text{ن}} + \frac{\text{لا}}{۱-\text{ن}} - \frac{۱}{\text{ن}}$

(۳) $\frac{۳\ \text{فرا}}{\text{فرلا}} + \frac{۲\ \text{ا}}{\text{لا}+۱} = \frac{\text{لا}^۳}{\text{ا}^۲}$ [جواب، $۶۰\ \text{ا}^۳(\text{لا}+۱)^۲ = ۱۰\ \text{لا}^۶ + ۲۴\ \text{لا}^۵ + ۱۵\ \text{لا}^۴ + \text{ج}$

(۴) $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ا}}{(۱-\text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\text{لا} + \sqrt{۱-\text{لا}^۲}}{(۱-\text{لا}^۲)^۲}$ [جواب، $\text{ا} = \text{ج و}^{\frac{-\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}} + \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$

(۵) $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} + \frac{۴\ \text{لا ا}}{\text{لا}^۲+۱} = \frac{۱}{(\text{لا}^۲+۱)^۳}$ [جواب، $\text{ا}(\text{لا}^۲+۱)^۲ = \text{مس}^{-۱}\ \text{لا} + \text{ج}$

(۶) $\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}} - \text{س مم و} = \text{س}^۲\ \text{قم لا}$ [جواب، $\text{س} = \frac{\text{جب و}}{\sqrt{۲\ \text{جم و} + \text{ج}}}$

(۷) ثابت کرو کہ متبادل برقی روؤں سے متعلق تفرقی مساوات $\text{ل}\ \frac{\text{فرر}}{\text{فرو}} + \text{زر} = \text{م جب سہ و}$ جس میں ل، ز اور سہ مستقل ہیں
$= \frac{\text{م}}{\text{ز}^۲ + \text{سہ}^۲\text{ل}^۲}(\text{ز جب سہ و} - \text{سہ ل جم سہ و}) + \text{ج و}^{\frac{-\text{زو}}{\text{ل}}}$ ہے۔

## ۴۷۔ ٹھیک یا تیار تفرقی مساواتیں۔ مساوات

$\text{ھ فرلا} + \text{ن فرا} = ۰$ ............ (۱)

ٹھیک یا تیار کہلاتی ہے اگر کوئی تفاعل ف (لا، ا) ایسا موجود ہے کہ اس کا تفرقہ (differential)

$\text{فرف}(\text{لا، ا}) = \text{ھ فرلا} + \text{ن فرا} = ۰$ ...... (۲)

اگر (۱) ٹھیک یا تیار تفرقی مساوات ہے تو ھ اور ن کے مابین ایک سادہ رابطہ موجود ہے جو اس طرح دریافت کیا جاتا ہے۔ واضح ہے کہ ف (لا، ما) کے تفرق کے لیے عام جملہ ہے۔

$$\text{فرف(لا، ما)} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\ \text{فرلا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\ \text{فرما}$$

$$\text{پس (۲) سے}\quad \text{ھ} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\quad \text{اور ن} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\ \text{ف}}{\text{جف ما جف لا}}\ ،\quad \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\ \text{ف}}{\text{جف لا جف ما}}$$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} \qquad \cdots\cdots \quad (۳)$$

اس کے معکوس طریقہ پر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر حل (۳) صحیح ہے تو ایک تفاعل ف (لا، ما) ایسا موجود ہے جس کے لیے رابطہ (۲) صحیح ہے یعنی بالفاظ دیگر مساوات (۱) ٹھیک یا تیار مساوات ہے۔

یہ بھی بتایا جا سکتا ہے کہ ہر ایسی مساوات کے لیے جو ٹھیک نہیں ہے ایک ایسا جزوِ ضربی موجود ہے جو ایسی مساوات کو ضرب دینے پر ٹھیک بنا دیتا ہے۔ ایسے اجزاء ضربی جو متکمل اجزاء ضربی کہلاتے ہیں عموماً لا اور ما کے تفاعل ہوتے ہیں۔ ان کے دریافت کرنے کا کوئی عام قاعدہ موجود نہیں ہے جیسا کہ آگے چل کر بتایا جائیگا یہ زیادہ تر مطالعہ یا پرکھنے ہی سے معلوم کر لیے جاتے ہیں۔

## ٹھیک مساوات کے حل کرنے کا قاعدہ۔

مثال کے طور پر مساوات

$$(\text{لا}^2 - ۴\ \text{لا ما} - ۲\ \text{ما}^2)\ \text{فرلا} + (\text{ما}^2 - ۴\ \text{لا ما} - ۲\ \text{لا}^2)\ \text{فرما} = ۰$$

کے حل پر غور کرو۔ پہلے یہ دیکھنے کے لیے کہ مساوات ٹھیک ہے یا نہیں

جف ھ / جف ا اور جف ن / جف لا کا مقابلہ کرو چونکہ ان دونوں کی قیمت ایک ہی
یعنے -۴لا - ۴ا ہے اس لیے مساوات ٹھیک ہے۔
اب اگر ف (لا، ا) = ج اس کا حل ہے تو

ھ = جف / جف لا ف (لا، ا) اور ن = جف / جف ا ف (لا، ا)

ا کو مستقل تصور کر کے ھ کو تکمل کرنے سے

ف (لا، ا) = ∫ (لا۲ - ۴لاا - ۲ا۲) فلا + فہ (ا) = ⅓ لا۳ - ۲لا۲ا - ۲ا۲لا + فہ (ا)

جس میں فہ (ا) بلحاظ لا مستقل ہے لیکن ممکن ہے کہ اس میں ا شامل ہو۔
اب لا کو مستقل تصور کر کے تفرق کرنے سے

جف / جف ا ف (لا، ا) = -۲لا۲ - ۴لاا + جف فہ (ا) / جف ا = ن = ا۲ - ۴لاا - ۲لا۲

∴ جف فہ (ا) / جف ا = ا۲ ∴ فہ (ا) = ⅓ ا۳ - ج

پس دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل ہے ⅓ لا۳ - ۲لا۲ا - ۲ا۲لا + ⅓ ا۳ = ج
اس جملہ کی پہلی تین رقمیں ھ کو تکمل کرنے سے حاصل ہوئی تھیں یہ تصور کر کے کہ ا مستقل ہے۔

باقی ماندہ رقم ⅓ ا۳ ہی ن فرا کے تکمل میں ایک ایسی رقم ہے جو پہلے حاصل کی ہوئی رقموں سے مختلف ہے۔

اس لیے قاعدہ یہ ہے کہ ھ فرلا کو تکمل کیا جائے یہ تصور کر کے کہ ا مستقل ہے۔ پھر ن فرا کو تکمل کیا جائے یہ تصور کر کے کہ لا مستقل ہے لیکن اس تکملہ میں سے صرف وہی رقمیں لی جائیں جو پہلے حاصل نہیں ہوئی ہیں۔ اور بعد ازاں ان تکملوں کے حاصل جمع کو ایک مستقل کے مساوی لکھ دیا جائے۔

مثال دوم- $\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرلا} + \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرما} = 0$ کو حل کرو۔

حل- چونکہ $\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{ما}^2 - 2\,\text{لاما} - \text{لا}^2}{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$ اس لیے مساوات ٹھیک ہے۔

پس اس کا ف (لا، ما) موجود ہے اور

$$\frac{\text{جف ف}(\text{لا}، \text{ما})}{\text{جف لا}} = \text{ھ} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

اس کو جزوی طور پر بلحاظ لا تکمل کرنے سے (یعنے یہ تصور کرکے کہ ما مستقل ہے)

$$\text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) = \int \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} - \int \frac{\text{ما فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\text{فرلا}^2}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} - \text{ما}\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) - \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$$

$$+\ \text{فہ}(\text{ما}) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

اس طرح $\frac{\text{جف ف}(\text{لا}، \text{ما})}{\text{جف ما}} = \text{ن} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ اور اس کو جزوی طور پر بلحاظ ما تکمل کرنے سے

$$\text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) = \int \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرما} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) + \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

$$+\ \text{سہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(۱) اور (۲) میں ف (لا، ما) کے لیے جو جملے حاصل ہوئے ہیں ان کے مساوی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ

$$-\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}} + \text{فہ}(\text{ما}) = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} + \text{سہ}(\text{لا})$$ ایک

متماثلہ (Identity) ہو۔

ہمیں معلوم ہے کہ

مس$^{-1}$ لا/ما = π/۲ - مس$^{-1}$ ما/لا پس فہ (ما) = π/۲ + سہ (لا) ... (۳)

لیکن فہ (ما) اور سہ (لا) ہمارے مفروضوں کے لحاظ سے یا تو مستقل ہیں یاعلی الترتیب ما اور لا کے تفاعل ہیں۔ پس مساوات (۳) دو متضاد امور کو ظاہر کرتی ہے الا اس صورت کے کہ فہ (ما) اور سہ (لا) دونوں تفاعل فرداً فرداً مستقل ہیں۔

اس لیے مساوات کا حل ہے

½ لوک (لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$) + مس$^{-1}$ ما/لا = ج جواب

# مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو ان کے ٹھیک ہونے کا امتحان کرکے حل کرو۔

(۱) (اب - ۲ لا ما - ما$^{۲}$) فرلا + (لا + ما)$^{۲}$ فرما = ۰

[جواب' اب لا - لا$^{۲}$ ما - ما$^{۲}$ لا - ⅓ ما$^{۳}$ = ج

(۲) (ما$^{۲}$ + ما جم لا ما) فرلا + (۲ لا ما + لا جم لا ما) فرما = ۰

[جواب' لا ما + جب لا ما = ج

(۳) (ا لا + ھ ما + ف) فرلا + (ب ما + ھ لا + گ) فرما = ۰

[جواب' ا لا$^{۲}$ + ۲ ھ لا ما + ب ما$^{۲}$ + ۲ ف لا + ۲ گ ما + ج = ۰

## ۵- مطالعہ یا پرکھنے سے متکمل اجزاءِ ضربی کی تعیین۔

اگر حل کرنے کے لیے دی ہوئی تفرقی مساوات بذات خود ٹھیک نہیں ہے تو ذرا غور کرنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ اس کو کس متکمل جزوِ ضربی سے ضرب دینے پر وہ ٹھیک ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر

لا فرلا + ما فرما + (لا$^{2}$ + ما$^{2}$) فرلا = ۰ ......... (۱)
ٹھیک مساوات نہیں ہے۔ لیکن ذرا سوچنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ اگر اس کو $\frac{1}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}}$ سے ضرب دیا جائے تو وہ ٹھیک بن جاتی ہے کیونکہ وہ ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا فرلا + ما فرما}}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}} + \text{فرلا} = 0 \quad \text{یعنے} \quad \frac{1}{2}\,\frac{\text{فر(لا}^{2}\text{ + ما}^{2}\text{)}}{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}} + \text{فرلا}$$

جس کا تکملہ ہے $\frac{1}{2}$ لوک (لا$^{2}$ + ما$^{2}$) + لا = ج

**دوسری مثال**۔ اکثر مثالوں میں (ما فرلا ـ لا فرما) رقموں کے مجموعہ سے سابقہ پڑتا ہے۔ اگر مساوات میں صرف یہی دو رقمیں صفر کے مساوی دی گئی ہیں تو ایسی مساوات کے لیے

$\frac{1}{\text{ما}^{2}}$ یا $\frac{1}{\text{لا}^{2}}$ یا $\frac{1}{\text{لا ما}}$ متکمل جزوِ ضربی کا کام دے سکتے ہیں۔ اس لیے کہ

$\frac{\text{ما فرلا ـ لا فرما}}{\text{ما}^{2}}$ = فر$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)$ دو مقادیر کے خارج قسمت کے تفرقی سر کی تعریف سے

پس $\frac{\text{ما فرلا ـ لا فرما}}{\text{ما}^{2}}$ = ۰۔ کا حل ہے فر$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)$ = ۰۔ یعنے $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ = ج ہے

اسی طرح $\frac{\text{ما فرلا ـ لا فرما}}{\text{لا}^{2}}$ = ـ $\frac{\text{لا فرما ـ ما فرلا}}{\text{لا}^{2}}$ = ـ فر$\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$ ہے پس مساوات کا حل ـ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ = ج ہے۔

اور $\frac{\text{ما فرلا ـ لا فرما}}{\text{لا ما}}$ = $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ ـ $\frac{\text{فرما}}{\text{ما}}$ پس مساوات کا حل

لوک لا ـ لوک ما = ج یعنے $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ = ج ہے۔

[نوٹ - ٹھیک مساواتوں کے امتحان کے طریقے سے معلوم کرلیا جاسکتا ہے کہ دی ہوئی مساوات ان مکمل اجزاء ضربی میں سے کسی ایک سے بھی ضرب دینے کے بعد ٹھیک ہو جاتی ہے۔ طالب علم بلاتشویش ٹھیک مساواتوں کے حل کرنے کے عام قاعدہ سے بھی اس مساوات کو حل کرسکتے ہیں]۔

اگر مثال میں (ما فرلا - لا فرما) کے علاوہ دوسری رقمیں بھی شامل ہیں تو مکمل جزوِ ضربی کا انتخاب ایسا ہونا چاہیے کہ اس سے دوسری رقموں کے حل میں رکاوٹ پیدا نہ ہو۔

مثلاً مساوات ما فرلا - لافرما + لوک لا فرلا = ۰ کے حل میں مکمل جزوِ ضربی $\frac{1}{\text{ما}^2}$ کا استعمال غیر مفید ہوگا البتہ $\frac{1}{\text{لا}^2}$ استعمال کرنے سے فوراً مطلب حاصل ہوجاتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{ما فرلا} - \text{لا فرما}}{\text{لا}^2} + \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}^2}\,\text{فرلا} = 0 \quad \text{کا حل}$$

$$-\frac{\text{ما}}{\text{لا}} + \left[-\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} + \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2}\right] = \text{ج}$$

$$\text{یعنے}\quad \frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}} = \text{ج} \quad \text{یا}\quad \text{ما} + \text{لوک} + 1 = \text{ج لا} \quad \text{ہے}$$

# مثالیں

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

(۱) $\text{لا فرما} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ما}}\,\text{فرما} = \text{ما فرلا}$ [جواب، $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} + \text{لوک ما} = \text{ج}$]

(۲) $(1 + \text{لا ما})\,\text{ما فرلا} + (1 - \text{لا ما})\,\text{لا فرما} = 0$ [جواب، $\text{لوک}\frac{\text{لا}}{\text{ما}} - \frac{1}{\text{لا ما}} = \text{ج}$]

(۳) $\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} - \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرلا} = 0$ [جواب، $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} - \text{لا} = \text{ج}$]

(۴) $\text{ما فرلا} - \text{لا فرما} + \text{ما}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)\,\text{فرما} = 0$ [جواب، $2\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}} + \text{ما}^2 = \text{ج}$]

(۵) (لا + ما) فرلا + (ا - لا) فرما = ۰ [جواب ۱/۲ لوک (لا^۲ + ا^۲) + مس^-۱ ما/لا = ج

## ۶۔ پہلے رتبہ کی مساواتیں جو پہلے درجہ سے بلند تر درجہ کی ہیں۔

### قسم اول۔ مساواتیں جو فرما/فرلا کے لیے حل کی جا سکتی ہیں۔

بطور مثال۔

ع^۳ (لا + ۲ ما) + ۳ ع^۲ (لا + ما) + ع (ما + ۲ لا) = ۰ کو حل کرو۔

[نوٹ۔ یہاں ع سے مراد فرما/فرلا ہے سہولت کی خاطر کتابت کا یہ طریقہ اختیار کیا گیا ہے]۔

حل۔ مساوات کے بیدھے جانب کے رکن کو اس کے اجزاء ضربی میں تحلیل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

ع {(لا + ۲ ما)(ع^۲ + ع) + (۲ لا + ما)(ع + ۱)} = ۰

یعنے ع (ع + ۱)(ع لا + ۲ ع ما + ۲ لا + ما) = ۰

پس فرما/فرلا = ۰ یا فرما/فرلا = -۱ یا فرما/فرلا = - (۲ لا + ما)/(لا + ۲ ما)

پہلی دو مساواتوں کو تکمل کرنے سے ما = ج، ما = - لا + ج

اور تیسری مساوات ہے لا فرما + ما فرلا + ۲ ما فرما + ۲ لا فرلا = ۰

یعنے فر(لا ما) + فر(لا^۲) + فر(ما^۲) = ۰

پس تکمل کرنے سے لا ما + لا^۲ + ما^۲ = ج

∴ پورا حل ہے (ما - ج)(ما + لا - ج)(لا ما + لا^۲ + ما^۲ - ج) = ۰

## قسم دوم۔ مساواتیں جو ما کے لیے حل کی جاسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے۔

ت (لا، ما، ع) = ۰ ........... (۱)

اس کو ما کے لیے حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتی ہے مساوات

ما = فا (لا، ع) ......... (۲)

(۲) کو تفرق کرنے سے اور $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}$ کے بجائے ع لکھنے سے، ہمیں ملتی ہے مساوات

ع = فہ (لا، ع، $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$) ......... (۳)

جس میں لا اور ع متغیر ہیں۔ اب فرض کرو کہ (۳) کا حل ہے

سہ (لا، ع، ج) ......... (۴)

تو ع کو (۱) اور (۴) کے مابین ساقط کرنے سے ہمیں لا، ما کا ایک تفاعل اور ایک اختیاری مستقل دستیاب ہوتا ہے جو عموماً (۱) کا حل ہے۔ لیکن ممکن ہے کہ اس حل کے دوران میں بعض غیر متعلقہ اجزاء ضربی داخل ہو جائیں یا کسی اور طرح سے کوئی خطا واقع ہو اس لیے بہتر ہے کہ حاصل کردہ حل کو مساوات (۱) میں تعویض کرکے آزما لیا جائے۔

اگر ع کا اسقاط مشکل ہو تو مساواتوں (۱) اور (۴) ہی کو ہم راد طریقہ پر حل کا مبدلانہ اظہار (parametric representation) تصور کر لیا جاسکتا ہے۔

مثال۔ مساوات ا = ع^۲ لا + لا کو حل کرو۔

حل۔ تفرق کرنے سے ع = ۲ لا ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ + ع^۲ + ۱

اس کو ترتیب دینے سے $\frac{\text{۲ ع فرع}}{\text{ع}^{۲}-\text{ع}+۱}+\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}=۰$

یا $\frac{(\text{۲ع}-۱)\,\text{فرع}}{\text{ع}^{۲}-\text{ع}+۱}+\frac{\text{فرع}}{(\text{ع}-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}}+\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}=۰$

اس کو تکمل کرنے سے $\text{لوک}\,(\text{ع}^{۲}-\text{ع}+۱)+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{۲ع}-۱}{\sqrt{۳}}+\text{لوک لا}=\text{ج}$

ع کو دی ہوئی اور آخری مساواتوں سے ساقط کیا جا سکتا ہے۔ لیکن سہولت کی خاطر ع کو مبدل تصور کرکے اس کی رقموں میں ان دونوں مساواتوں کو عام حل قرار دیا جا سکتا ہے۔

**کلیروی صورت** (Clairaut's form) قسم دوم کی مساواتوں میں اس کو خاص اہمیت حاصل ہے۔ اس کی صورت

$\text{ما}=\text{ع لا}+\text{ف}\,(\text{ع})$ ہے۔

اس کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ع}=\text{ع}+\left\{\text{لا}+\text{فَ}(\text{ع})\right\}\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$\therefore\ \text{لا}+\text{فَ}(\text{ع})=۰\quad \text{یا}\quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}=۰$$

پہلی مساوات سے عام حل حاصل نہیں ہو سکتا۔ دوسری مساوات سے ع = ج (جو ایک مستقل ہے) برآمد ہوتا ہے اور ع کی یہ قیمت ابتدائی مساوات میں درج کرنے سے ہمیں عام حل

$\text{ما}=\text{ج لا}+\text{ف}\,(\text{ج})$ دستیاب ہوتا ہے۔

پس کلیروی مساوات کا عام حل دی ہوئی مساوات میں ع کے عوض مستقل ج لکھنے سے فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

## قسم سوم ۔ مساواتیں جو لا کے لیے حل کی جا سکتی ہیں

فرض کرو کہ مساوات کو لا کے لیے حل کرنے سے

نتیجہ لا = ف (ما، ع) ............ (۱)

برآمد ہوتا ہے۔ تو اب (۱) کو بلحاظ ما تفرق کرنے سے

$$\frac{۱}{ع} = فہ\left(ما، ع، \frac{فرع}{فرما}\right) \quad ...... \quad (۲)$$

فرض کرو کہ (۲) کا کل حل ہے سہ (ما، ع، ج) = ۰ ......... (۳)

تو (۱) اور (۳) کو ہمزاد طریقہ پر مساوات (۱) کا مبدلانہ حل تصور کیا جا سکتا ہے یا اگر مناسب ہو تو ان کے مابین ع کو ساقط کرکے لا اور ما اور ایک اختیاری مستقل کا تفاعل حاصل کیا جا سکتا ہے جو (۱) کا عام حل ہے۔ لیکن اس تفاعل کو دی ہوئی مساوات (۱) میں تعویض کرکے امتحان کر لیا جائے۔

مثال۔ مساوات لا = ع ما + ع کو حل کرو۔

[نوٹ۔ درحقیقت اس مساوات کا حل نہایت آسان ہے اس لیے کہ اس کے متغیر جدائی پذیر ہیں یہاں اس کو قسم سوم کے تحت لاکر اس کے حل کی مشق کرانی مقصود ہے۔ واضح ہے کہ یہ مساوات قسم دوم کی بھی تصور ہو سکتی ہے اس لیے کہ $ما = \frac{لا}{ع} - ۱$ لیکن اس طور پر اس کو حل کرنے میں عمل تکمیل قدرے طویل ہو جاتا ہے]۔

حل۔ مساوات کو بلحاظ ما تفرق کرنے سے

$$\frac{۱}{ع} = ع + ما \frac{فرع}{فرما} + \frac{فرع}{فرما} \quad یعنے \quad \frac{ع\ فرع}{ع^۲ - ۱} + \frac{فرما}{۱ + ما} = ۰$$

تکمیل کرنے سے لوک $(ع^۲ - ۱)$ + ۲ لوک (۱ + ما) = لوک ج

$$یا\ (ع^۲ - ۱)(۱ + ما)^۲ = ج$$

دی ہوئی مساوات اور آخری مساوات کے درمیان ع کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے مساوات

$$لا^۲ - (ما + ۱)^۲ = ج$$ جو دی ہوئی مساوات کا عام حل ہے۔

# مثالیں

[ ھدایت۔ پہلی تین مثالیں مساوات قسم اول کے طریقہ سے حل کی جائیں۔ بعد کے پانچ قسم دوم کے طریقہ سے اور آخری تین قسم سوم کے طریقہ سے ]۔

(۱) ۴ ا$^{۲}$ ع$^{۲}$ + ۲ ع لا ا (۳ لا + ۱) + ۳ لا$^{۲}$ = ۰۔
[جواب (لا$^{۳}$ + ۲ ا$^{۲}$ − ج)(لا$^{۲}$ + ا$^{۲}$ − ج) = ۰۔

(۲) ع$^{۲}$ + (لا − ا) ع − لا ا = ۰۔ [جواب (ا + $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ + ج)(لوک ا − لا + ج) = ۰۔

(۳) ع$^{۲}$ − ($\frac{۱}{\text{لا}}$)$^{۲}$ = ۰۔ [جواب (ا − لوک لا − ج)(ا + لوک لا − ج) = ۰۔

(۴) لا + ا − ع$^{۲}$ = ۰۔ جواب { لا = ۲ ع − ۲ لوک (ع + ۱) + ج
ا = ع$^{۲}$ − ۲ ع − ۲ لوک (ع + ۱) − ج

(۵) ا = ع (۱ + ع) لا۔ جواب { لا = $\frac{\text{ج}}{\text{ع}^{۲}}$ و$^{\frac{۱}{\text{ع}}}$
ا = $\frac{\text{ج}}{\text{ع}}$ $\frac{۱+\text{ع}}{\text{ع}}$ و$^{\frac{۱}{\text{ع}}}$

(۶) لا − ا ع = ع$^{۲}$ جواب { لا = $\frac{\text{ع}}{\sqrt{۱-\text{ع}^{۲}}}$ (ج + جب$^{-۱}$ ع)
ا = − ع + $\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{ع}^{۲}}}$ (ج + جب$^{-۱}$ ع)

(۷) ا = ع لا + د $\sqrt{۱ + \text{ع}^{۲}}$ جواب ا = ج لا + د $\sqrt{۱ + \text{ج}^{۲}}$ بوجہ کلیروی صورت

(۸) ا = ع لا + جب$^{-۱}$ ع جواب ا = ج لا + جب$^{-۱}$ ج ایضاً

(۹) ع لا − $\frac{۱}{\text{ع}}$ + ۱ = ۰۔ جواب { لا = $\frac{۱}{\text{ع}^{۲}}$ − $\frac{۱}{\text{ع}}$
ا = لوک ع + $\frac{۲}{\text{ع}}$ + ج

(۱۰) ا − ع لا + ع$^{۲}$ ا = ۰۔ جواب { لا = ج $\frac{\text{ع}^{۲}+۱}{\text{ع}^{۲}}$ و$^{-\frac{۱}{۲\text{ع}^{۲}}}$
ا = $\frac{\text{ج}}{\text{ع}}$ و$^{-\frac{۱}{۲\text{ع}^{۲}}}$

(۱۱) $لا = ما + ع^۲$   جواب $\begin{cases} ما = - ع^۲ - ۲ع - ۲ لوک (ع - ۱) + ج \\ لا = - ۲ع - ۲ لوک (ع - ۱) + ج \end{cases}$

## ۷۔ بلند تر رتبہ کی دو خاص قسم کی تفرقی مساواتیں۔

(۱) مساوات $\frac{فر^ن ما}{فرلا^ن} = ف(لا)$ یا ج . . . . . (۵)

سے اکثر سابقہ پڑتا ہے،
علامت مساوات کے دونوں ارکان کو فرلا سے ضرب دو۔ عمل تکمل سے

$$\frac{فر^{ن-۱} ما}{فرلا^{ن-۱}} = \int ف(لا) فرلا + ج_۱ \quad یا \quad = \int ج فرلا + ج_۱$$

اس عمل کو (ن - ۱) مرتبہ دہرانے سے پورا حل حاصل ہوتا ہے جس میں ن اختیاری مستقل ہونگے۔

**توضیحی مثال۔** $\frac{فر^۳ ما}{فرلا^۳} = لا و^{لا}$ کو حل کرو۔

حل۔ دونوں ارکان کو فرلا سے ضرب دیکر تکمل کرنے سے

$$\frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲} = \int لا و^{لا} فرلا + ج_۱ = لا \frac{و^{لا}}{لو} - \frac{و^{لا}}{لو^۲} + ج_۱ \quad (عمل تکمل بالحصص سے)$$

اس طریقہ کو دہرانے سے $\frac{فر ما}{فرلا} = \int لا \frac{و^{لا}}{لو} فرلا - \int \frac{و^{لا}}{لو^۲} فرلا + \int ج_۱ فرلا$

$$= \frac{۱}{لو}\left(\frac{لا و^{لا}}{لو} - \frac{و^{لا}}{لو^۲}\right) - \frac{۱}{لو^۲} \frac{و^{لا}}{لو} + ج_۱ لا + ج_۲$$

$$= \frac{لا و^{لا}}{لو^۲} - ۲ \frac{و^{لا}}{لو^۳} + ج_۱ لا + ج_۲$$

پس $ما = \frac{۱}{لو^۲} \int لا و^{لا} فرلا - \frac{۲}{لو^۳} \int و^{لا} فرلا + ج_۱ \int لا فرلا + \int ج_۲ فرلا$

$$= \frac{1}{\text{و}^2}\left(\frac{\text{لا}\,\text{و}^{\text{و لا}}}{\text{و}} - \frac{\text{و}^{\text{و لا}}}{\text{و}^2}\right) - \frac{2}{\text{و}^3}\,\frac{\text{و}^{\text{و لا}}}{\text{و}} + \text{ج}_1\frac{\text{لا}^2}{2} + \text{ج}_2\,\text{لا} + \text{ج}_3$$

$$= \frac{\text{لا}\,\text{و}^{\text{و لا}}}{\text{و}^3} - \frac{3\,\text{و}^{\text{و لا}}}{\text{و}^4} + \text{ج}_1\frac{\text{لا}^2}{2} + \text{ج}_2\,\text{لا} + \text{ج}_3 \quad \text{جواب}$$

(۲) **مساوات**- $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{ف}(\text{ما})$ .......... (۹)

کو بڑی اہمیت حاصل ہے - اس کے حل کے لیے سہولت کی خاطر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے عوض ع لکھو تو مساوات ہوجاتی ہے

$$\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{ف}(\text{ما})$$

اب ۲ ع سے ضرب دینے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے -

$$2\,\text{ع}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ع}^2) = 2\,\text{ع}\,\text{ف}(\text{ما}) = 2\,\text{ف}(\text{ما})\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس $\text{فر}(\text{ع})^2 = 2\,\text{ف}(\text{ما})\,\text{فر ما}$

اور تکمل کرنے سے $\text{ع}^2 = \int 2\,\text{ف}(\text{ما})\,\text{فر ما} + \text{ج}$

اس آخری مساوات کے بائیں جانب کا رکن ما کا تفاعل ہے - پس جذرالمربع نکال کر متغیروں لا اور ما کو جدا کردو اور پھر سے تکمل کرو- جواب حاصل ہوجاتا ہے -

**توضیحی مثال**- مساوات $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ک}^2\,\text{ما} = 0$ کو حل کرو-

۲ ع سے ضرب دینے سے $2\,\text{ع}\,\text{فر ع} = -2\,\text{ک}^2\,\text{ما}\,\text{فر ما}$ یعنے $\text{فر}(\text{ع})^2 = -2\,\text{ک}^2\,\text{ما}\,\text{فر ما}$

تکمل کرنے سے $\int \text{فر}(\text{ع})^2 = -\text{ک}^2\int 2\,\text{ما}\,\text{فر ما}$ یعنے $\text{ع}^2 = -\text{ک}^2\,\text{ما}^2 + \text{ج}^2$

جس میں $\text{ج}^2$ = اختیاری مستقل

$\therefore\ \text{ع} = \pm\sqrt{\text{ج}^2 - \text{ک}^2\,\text{ما}^2}$ لیکن $\text{ع} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

پس متغیروں کو جدا کرکے تکمل کرنے سے

$$\int \frac{\text{فر ما}}{\sqrt{\text{ج}^2 - \text{و}^2\text{ما}^2}} = \int \text{فر لا} \quad \text{یعنے} \quad \int \frac{\text{فر ما}}{\text{و}\sqrt{\frac{\text{ج}^2}{\text{و}^2} - \text{ما}^2}} = \text{لا} + \bar{\text{ج}}$$

$$\text{یعنے} \quad \frac{1}{\text{و}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{و ما}}{\text{ج}} = \text{لا} + \bar{\text{ج}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{و ما}}{\text{ج}} = \text{جب}(\text{و لا} + \text{و}\bar{\text{ج}})$$

$$\text{اور} \quad \text{ما} = \frac{\text{ج}}{\text{و}}(\text{جب و لا جم و}\bar{\text{ج}} + \text{جم و لا جب و}\bar{\text{ج}})$$

$$\text{یعنے} \quad \text{ما} = \text{ج}_1\,\text{جب و لا} + \text{ج}_2\,\text{جم و لا}$$

[طبیعیات کے طالب علم کو معلوم ہوگیا ہوگا کہ مندرجۂ بالا مثال میں اگر بجائے ما نقل مکان س لکھا جائے بجائے لا، وقت و اور بجائے و زاویۂ رفتار سہ تو مساوات سادہ موسیقی حرکت کی ہوجاتی ہے جس میں اسراع نقل مکان کے راست متناسب ہے لیکن مخالف سمت میں۔

$$\text{اس حرکت میں رفتار ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = \text{سہ}(\text{ج}_1\,\text{جم سہ و} - \text{ج}_2\,\text{جب سہ و})$$

جس وقت ر = ۰ نقل مکان اعظم ہوتا ہے

$$\text{اور ج}_1\,\text{جم سہ و} = \text{ج}_2\,\text{جب سہ و} \quad \text{یعنے} \quad \text{مس سہ و} = \frac{\text{ج}_1}{\text{ج}_2}$$

$$\text{اس لیے جب سہ و} = \frac{\text{ج}_1}{\sqrt{\text{ج}_1^2 + \text{ج}_2^2}} \quad \text{اور جم سہ و} = \frac{\text{ج}_2}{\sqrt{\text{ج}_1^2 + \text{ج}_2^2}}$$

$$\text{اور اعظم نقل مکان یا حیطۂ ارتعاش} = \sqrt{\text{ج}_1^2 + \text{ج}_2^2}$$

ذرا غور کرنے سے معلوم ہوجائیگا کہ وقتِ دوران $\text{و} = \frac{\text{۲ط}}{\text{سہ}}$

# مثالیں

(۱) اگر کوئی ذرہ خط مستقیم میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا اسراع اس کے نقل مکان کے راست متناسب اور نقل مکان ہی کی سمت میں ہو تو ایسی حرکت کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{فر^2 س}{فر و^2} = ک^2 س$$

ثابت کرو کہ اس کا حل ہے $س = ا و^{ک و} + ب و^{-ک و}$

ثابت کرو کہ یا $ا$ جبز $ک و$ + $ب$ جمز $ک و$

(۲) $\frac{فر^2 لا}{فر و^2} = ۴$ جب $۲ و$ کا حل ہے $لا = -$ جب $۲ و + ج_1 و + ج_2$

(۳) $\frac{فر^2 لا}{فر و^2} = \frac{1}{\sqrt{لا}}$ کا حل ہے $۳ و = ۲ \sqrt{۲} (لا^{\frac{1}{2}} - ۲ ج_1)(لا^{\frac{1}{2}} + ج_1)^{\frac{1}{2}} + ج_2$

(۴) $\frac{فر^2 ما}{فر و^2} = و^{۲و}$ کا حل ہے $ما = \frac{و^{۲و}}{۴} + ج_1 و + ج_2$

(۵) $\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + \frac{ا^2}{ما^2} = ۰$ کا حل ہے۔

$$\sqrt{ج_1 ما^2 + ا} - \frac{1}{\sqrt{ج_1}} لوک \left(\sqrt{ج_1 ما} + \sqrt{1 + ج_1 ما}\right) = ا ج_1 \sqrt{۲}\, لا + ج_2$$

## ۸۔ مستقل سروں والی دوسرے رتبہ کی خطی مساواتیں۔

$$\frac{فر^2 ما}{فر لا^2} + پ \frac{فر ما}{فر لا} + ق ما = ۰ \quad ............ (ر)$$

کی صورت کی مساواتیں (جس میں پ اور ق مستقل ہیں) اطلاقی ریاضی میں

اہمیت رکھتی ہیں۔

(ز) کا کوئی خاص حل حاصل کرنے کے لیے ما = و^رلا ..... (۱)
فرض کر کے مستقل ر کی ایسی قیمت معلوم کرنے کی کوشش کی جاتی ہے جو مساوات (ز) کے لیے درست ہو۔

(۱) کو تفرق کرنے سے $\frac{فرما}{فرلا}$ = ر و^رلا ، $\frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲}$ = ر^۲ و^رلا .... (۲)

اب (۱) اور (۲) سے مساوات (ز) میں تعویض کرنے اور جزو ضربی و^رلا پر تقسیم کر ڈالنے سے

نتیجہ ر^۲ + پ ر + ق = ۰ ......... (۳)

برآمد ہوتا ہے جو ایک دو درجی مساوات ہے جس کی اصلیں ر کی مطلوبہ قیمتیں ہیں۔

مساوات (۳) کو (ز) کی امدادی مساوات کہتے ہیں۔ اگر (۳) کی اصلیں ر، اور ر۲ ہیں تو

ما = و^ر۱لا اور ما = و^ر۲لا ........ (۴)

تفرقی مساوات (ز) کے علیحدہ علیحدہ خاص حل ہیں اور اس کا پورا حل ہے

ما = ج۱ و^ر۱لا + ج۲ و^ر۲لا ......... (۵)

(۵) میں فی الواقع دو اختیاری مستقل ہیں اور یہ رابطہ (ز) کے لیے صادق آتا ہے۔

**توضیحی مثال۔** $\frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲}$ + $\frac{فرما}{فرلا}$ - ۶ ما = ۰ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کا معاون حل ر^۲ + ر - ۶ = ۰ ہے اس کو حل کرنے سے اس کی اصلیں ۲ اور -۳ برآمد ہوتی ہیں۔ اور (ز) کی مساوات (۵) سے دی ہوئی مساوات کا پورا حل

ما = ج۱ و^۲لا + ج۲ و^-۳لا ہے جواب

[ آزما کر دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ دی ہوئی مساوات میں ما کی یہ قیمت درج کرنے سے اس کی تصدیق ہو جاتی ہے ۔]

## اگر امدادی مساوات کی اصلیں خیالی ہوں تو (۵) کے

قوت نما ( exponents ) بھی خیالی ہو نگے ۔ لیکن (۵) میں $ج_1$ اور $ج_2$ کے لیے مناسب خیالی قیمتیں منتخب کرنے سے ایک حقیقی پورا حل دریافت ہو سکتا ہے ۔

چنانچہ فرض کرو $م_1 = ل + ب\sqrt{-1}$ $م_2 = ل - ب\sqrt{-1}$ .. .. (۶)

مساوات (۳) کی دو مزدوج خیالی اصلیں ہیں ۔ تب

$$و^{م_1 لا} = و^{(ل+ب\sqrt{-1})لا} = و^{للا}\, و^{ب لا\sqrt{-1}} \qquad و^{م_2 لا} = و^{(ل-ب\sqrt{-1})لا}$$

$$= و^{للا}\, و^{-ب لا\sqrt{-1}} \quad \text{.......... (۷)}$$

ان قیمتوں کو (۵) میں تعویض کرنے سے

$$ما = و^{للا}\left(ج_1\, و^{ب لا\sqrt{-1}} + ج_2\, و^{-ب لا\sqrt{-1}}\right) \quad \text{...... (۸)}$$

لیکن $و^{ب لا\sqrt{-1}} =$ جم ب لا $+ \sqrt{-1}$ جب ب لا اور $و^{-ب لا\sqrt{-1}}$

$=$ جم ب لا $- \sqrt{-1}$ جب ب لا

[ ملاحظہ ہو نصاب ریاضی حصہ اول باب ۱۲ صفحہ ۲۸۲ ]

جب یہ قیمتیں (۸) میں تعویض کی جاتی ہیں تو پورا حل لکھا جا سکتا ہے ۔

$$ما = و^{للا}\,(\text{ا جم ب لا + ب جب ب لا}) \quad \text{..... (۹)}$$

اگر نئے اختیاری مستقل ا اور ب کی سابقہ $ج_1$ اور $ج_2$ سے بذریعہ $ا = ج_1 + ج_2$ اور $ب = (ج_1 - ج_2)\sqrt{-1}$ تعیین کی جاتی ہے یا بالفاظ دیگر اب (۵) میں بجائے $ج_1$ اور $ج_2$ خیالی قیمتیں $ج_1 = \frac{1}{2}(ا - ب\sqrt{-1})$ $ج_2 = \frac{1}{2}(ا + ب\sqrt{-1})$ لی جاتی ہیں ۔

ا اور ب کو (۹) میں باری باری سے قیمتیں ایک اور صفر اور صفر اور ایک دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ما = وہٗلا جم ب لا اور ما = وہٗلا جب ب لا ....... (۱۰)

(ز) کے حقیقی خاص حل ہیں۔

**توضیحی مثال۔** حل کرو $\frac{فر^2 ما}{فر لا^2}$ + ک$^2$ ما = ۰

**حل۔** یہاں امدادی مساوات ہے ر$^2$ + ک$^2$ = ۰ ہے

پس ر = ± ک $\sqrt{-1}$

(۶) سے مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ ا = ۰، ب = ک پس (۹) سے پورا حل

ما = ا جم ک لا + ب جب ک لا ہے۔

[نوٹ۔ ایسی ہی مساوات کو ۔۔ میں بصورت (۹) ایک دوسرے طریقہ سے حل کیا گیا۔ دونوں طریقوں کا مقابلہ کیا جائے۔]

اگر معاون مساوات کی اصلیں حقیقی اور مساوی ہوں تو ایسی صورت میں پ$^2$ = ۴ ق اور

مساوات (۳) ہو جاتی ہے ر$^2$ + ر پ + $\frac{1}{4}$ ق$^2$ = (ر + $\frac{1}{2}$ پ)$^2$ = ۰ .... (۱۱)

اور ر۱ = ر۲ = - $\frac{1}{2}$ پ اس صورت میں

ما = وہرلا اور ما = لا وہرلا ........ (۱۲)

علیحدہ علیحدہ خاص حل ہیں۔ پس پورا حل ہے:

ما = وہرلا (ج + ج۱ لا) ............ (۱۳)

اس بیان کی تائید میں صرف اتنا ثابت کر دینا ضروری ہے کہ (۱۲) کی دوسری مساوات دی ہوئی تفرقی مساوات کے لیے ایک حل مہیا کر دیتی ہے۔ لیکن عمل تفرق سے

$$\text{ما} = \text{لا و}^{\text{ر}_1\text{لا}}\text{، } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}}(\text{۱} + \text{ر}_1\text{لا})\text{، } \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}}(\text{۲ر}_1 + \text{ر}_1^2\text{لا}) \quad \dots\dots (\text{۱۴})$$

ان قیمتوں کو (ز) کے اندر تعویض کرنے اور $\text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}}$ پر تقسیم کر ڈالنے سے نتیجہ ذیل حاصل ہوتا ہے:

$$(\text{ر}_1^2 + \text{پ ر}_1 + \text{ق})\,\text{لا} + \text{۲ر}_1 + \text{پ} \quad \dots\dots\dots (\text{۱۵})$$

جو صفر کے مساوی ہے اس لیے کہ $\text{ر}_1$ رابطہ (۴) کی تصدیق کرتا ہے اور

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{پ}$$

**توضیحی مثال۔ حل کرو** $\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{۴}\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۴ما} = \text{۰}$

یہاں معاون مساوات ہے $\text{ر}^2 + \text{۴ر} + \text{۴} = \text{۰}$ یعنے $(\text{ر} + \text{۲})^2 = \text{۰}$

پس دونوں اصلیں مساوی ہیں اور $\text{ر}_1 = -\text{۲}$

اور (۱۴) کے رو سے مساوات کا پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{و}^{-\text{۲لا}}(\text{ج}_1 + \text{ج}_2\text{لا})$$

[طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے کہ ثابت کرے کہ مساوات کا خاص حل درانحالیکہ $\text{ما} = \text{۶}$ اور $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\text{۴}$ جبکہ $\text{لا} = \text{۰}$

$\text{ما} = \text{و}^{-\text{۲لا}}(\text{۶} + \text{۱۶لا})$ ہے]

[نوٹ۔ (ز) کی صورت کی مساواتوں کے حل میں بڑی سہولت پیدا ہوجاتی ہے اگر ان کو

$$(\text{عف}^2 + \text{پ عف} + \text{ق})\,\text{ما} = \text{۰}$$

لکھا جائے جس میں $\text{عف} = \left(\dfrac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)$ عامل تفرق opprator کہلاتا ہے ما کے ساتھ اس کے استعمال کا وہی مفہوم ہے جو $\text{عف}^2\text{ما} + \text{پ عف ما} + \text{ق ما}$ کا ہے۔ اس طرح لکھنے سے معلوم ہوگا کہ مساوات $(\text{عف}^2 + \text{پ عف} + \text{ق})\,\text{ما} = \text{۰}$

ءٔ کی مساوات (۴) یعنے $\text{ر}^2 + \text{پ ر} + \text{ق} = ۰$ کے بہت مشابہ ہے۔

جب یہ طریقہ کتابت استعمال کر کے جبری مساوات $\text{عف}^2 + \text{پ عف} + \text{ق} = ۰$ حل کی جاتی ہے تو عف کے لیے وہی قیمتیں دستیاب ہوتی ہیں جو ر کے لیے ہوتی ہیں۔

## مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کا پورا حل معلوم کرو :—

(۱) $\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2} - ۴\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} + ۳\text{ا} = ۰$　　[جواب، $\text{ا} = \text{ج}_1 \text{و}^{\text{لا}} + \text{ج}_2 \text{و}^{۳\text{لا}}$

(۲) $۹\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2} - ۶\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} + \text{ا} = ۰$　　[جواب، $\text{ا} = (\text{ا لا} + \text{ب})\, \text{و}^{\frac{\text{لا}}{۳}}$

(۳) $\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2} + ۴\text{ا} = ۰$　　[جواب، $\text{ا} = \text{ج}_1 \text{جم}\,۲\text{لا} + \text{ج}_2 \text{جب}\,۲\text{لا}$

(۴) $\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2} + ۳\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = ۰$　　[جواب، $\text{ا} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2 \text{و}^{-۳\text{لا}}$

(۵) $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرو}^2} + ۴\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} + ۸\text{لا} = ۰$　　[جواب، $\text{لا} = \text{و}^{-۲\text{و}}(\text{ج}_1 \text{جم}\,۲\text{و} + \text{ج}_2 \text{جب}\,۲\text{و})$

(۶) $(\text{عف}^2 + ۳\text{عف} + ۱)\,\text{ا} = ۰$　　[جواب، $\text{ا} = \text{و}^{-\frac{۳\text{لا}}{۲}}\left(\text{ا}\,\text{و}^{\frac{\sqrt{۵}\,\text{لا}}{۲}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\frac{\sqrt{۵}\,\text{لا}}{۲}}\right)$

(۷) مساوات $(\text{عف}^2 + ۲\text{عف} + ۲)\,\text{ا} = ۰$ کا خاص حل دریافت کرو درانحالیکہ $\text{ا} = ۳$، $\text{عف ا} = -۳$ جبکہ $\text{لا} = ۰$۔　　[جواب، $\text{ا} = ۳\,\text{و}^{-\text{لا}}\,\text{جم لا}$

## تفرقی مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{پ ما} + \text{ق} = \text{ү}$ ....... (ح)

کا حل جبکہ پ اور ق مستقل ہیں اور ү مجموع متغیر لا کا تفاعل ہے یا مستقل۔ اس کے لیے تین عمل کرنے پڑتے ہیں۔

**پہلا عمل** - مساوات (ز) کو حل کرو - فرض کرو کہ اس کا پورا حل ہے

ما = ی . . . . . . . . . . . . . (۱۶)

تو ی کو مساوات (ح) کا **متمم تفاعل** کہتے ہیں -

**دوسرا عمل** - آزمایش کے طریقہ سے مساوات (ح) کا کوئی خاص حل معلوم کرو

ما = و . . . . . . . . (۱۷)

**تیسرا عمل** - اب (ح) کا پورا حل ہے

ما = ی + و . . . . . . . . . . . (۱۸)

امر واقعی ہے کہ رابطہ (۱۸) سے جب ما کی قیمت مساوات (ح) میں تعویض کی جاتی ہے تو مساوات کے لیے صادق آتی ہے اور (۱۸) میں دو لازمی اختیاری مستقل ہوتے ہیں - خاص حل (۱۷) معلوم کرنے کے لیے ذیل کی ہدایات مفید پائی جائینگی - ان ضابطوں میں تمام حروف باستثناء متبوع متغیر لا مستقل ہیں -

**عام صورت** - اگر ما = لا مساوات (ز) کا ایک خاص حل نہ ہو۔

اور (۱) لا بصورت ا + ب لا ہو تو فرض کرو ما = و = ا + ب لا

" (۲) لا بصورت ا و^ب لا ہو تو فرض کرو ما = و = ا و^ب لا

" (۳) لا بصورت ا₁ جم ب لا + ا₂ جب ب لا ہو تو فرض کرو ما = و

= ا₁ جم ب لا + ا₂ جب ب لا

**خاص صورت** - اگر ما = لا مساوات (ز) کا ایک خاص حل ہو تو

و کے لیے صورتِ بالا مضروب بہ لا (یعنے متبوع متغیر) فرض کرو۔

طریقہ یہ ہے کہ حسب ہدایات مصرحۂ بالا مساوات (ح) کے اندر ما = و تعویض کی جائے اور مستقل مقادیر ا، ب، ا₁، ا₂ دریافت کیے جائیں جو مساوات (ح) کے لیے صادق آتے ہیں -

**توضیحی مثال (۱)** حل کرو  فر² ما / فر لا² + فر ما / فر لا − ۶ ما = ۳.لا

حل - پہلا عمل - ۔ے کے ابتدا ہی میں $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ا}}{\text{فرلا}^{۲}} + \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} - ۶\text{ا} = ۰$ کو پورا حل کرکے بتایا گیا ہے اس کے لحاظ سے دی ہوئی مساوات کا متمم تفاعل ہے۔

$$\text{ا} = \text{ی} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-۳\text{لا}}$$

دوسرا عمل - چونکہ ا = ۷ = ۳لا مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ا}}{\text{فرلا}^{۲}} + \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} - ۶\text{ا} = ۰$ کا ایک خاص حل نہیں ہے اس لیے

فرض کرو کہ اس کا ایک خاص حل ہے

$$\text{ا} = \text{و} = \text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}$$

ا کی یہ قیمت دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے $۰ + \text{ب} - ۶(\text{ا} + \text{ب}\text{لا}) = ۳\text{لا}$

اب لا کی مشابہ قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

$$\text{ب} - ۶\text{ا} = ۰ \quad \text{اور} \quad -۶\text{ب} = ۳$$

$$\text{یعنے} \quad \text{ب} = -\frac{۱}{۲} \quad \text{اور} \quad \text{ا} = -\frac{۱}{۱۲}$$

$$\text{پس} \quad \text{ا} = \text{و} = -\frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۲}\text{لا}$$

تیسرا عمل - لہذا پورا حل ہے

$$\text{ا} = \text{ی} + \text{و} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-۳\text{لا}} - \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۲}\text{لا} \quad \text{جواب}$$

**توضیحی مثال (۲)** حل کرو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ا}}{\text{فرلا}^{۲}} + \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} - ۶\text{ا} = ۲\,\text{و}^{۴\text{لا}}$

حل - پہلا عمل - اس مساوات کا متمم تفاعل ہے۔

$$\text{ا} = \text{ی} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-۳\text{لا}}$$

دوسرا عمل۔ یہاں ما = ٧ = ۲ و$^{\text{۲لا}}$ مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ + $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ - ۶ما = ۰ کا ایک خاص حل ہے اس لیے کہ وہ مساوات بالا کے مکمل حل میں ج۱ = ۲ اور ج۲ = صفر لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس دی ہوئی مساوات کے ایک خاص حل کے لیے فرض کرو

ما = و = ا لا و$^{\text{۲لا}}$

اس کو تفرق کرنے سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ا و$^{\text{۲لا}}$ + ۲ ا لا و$^{\text{۲لا}}$

اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ = ۲ا و$^{\text{۲لا}}$ + ۲ا و$^{\text{۲لا}}$ + ۴ ا لا و$^{\text{۲لا}}$ حاصل ہوتے ہیں۔

اب $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اور ما کی ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۴ا و$^{\text{۲لا}}$ + ۴ ا لا و$^{\text{۲لا}}$ + ا و$^{\text{۲لا}}$ + ۲ ا لا و$^{\text{۲لا}}$ - ۶ ا لا و$^{\text{۲لا}}$ = ۲ و$^{\text{۲لا}}$

یعنی ۵ا و$^{\text{۲لا}}$ = ۲ و$^{\text{۲لا}}$ ∴ ا = $\frac{۲}{۵}$

پس ما = و = $\frac{۲}{۵}$ لا و$^{\text{۲لا}}$

تیسرا عمل۔ اس لیے مساوات کا پورا حل ہے

ما = ء + و = ج۱ و$^{\text{۲لا}}$ + ج۲ و$^{\text{-۳لا}}$ + $\frac{۲}{۵}$ لا و$^{\text{۲لا}}$ جواب

**توضیحی مثال (۳)** مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ + ۴ما = ۲جم۲لا کا خاص حل دریافت کرو دراں حالیکہ

ما = ۰ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۲ جبکہ لا = ۰

حل - پہلے پورا حل معلوم کر لیا جائے۔

پہلا عمل - فر۲ ما / فر لا۲ + ۴ ما = ۰ کو حل کرنے سے متمم تفاعل

ما = ء = ج۱ جم ۲ لا + ج۲ جب ۲ لا دستیاب ہوتا ہے۔

دوسرا عمل - دی ہوئی مساوات کے بائیں جانب پر غور کرنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ ما = ۲ جم ۲ لا مساوات فر۲ ما / فر لا۲ + ۴ ما = ۰ کا ایک خاص حل ہے جبکہ مساوات بالا میں ج۱ = ۲ اور ج۲ = ۰ لکھا جاتا ہے۔ اس لیے دی ہوئی مساوات کے ایک خاص حل کے لیے فرض کرو۔

ما = و = لا (ا۱ جم ۲ لا + ا۲ جب ۲ لا)

اس آخری مساوات کو تفرق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتے ہیں۔

فر ما / فر لا = ا۱ جم ۲ لا + ا۲ جب ۲ لا - ۲ لا (ا۱ جب ۲ لا - ا۲ جم ۲ لا)

اور فر۲ ما / فر لا۲ = ۴ ا۱ جب ۲ لا + ۴ ا۲ جم ۲ لا - ۴ لا (ا۱ جم ۲ لا + ا۲ جب ۲ لا)

فر۲ ما / فر لا۲ اور فر ما / فر لا کی ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کر کے سادہ بنانے پر نتیجہ بر آمد ہوتا ہے۔

-۴ ا۱ جب ۲ لا + ۴ ا۲ جم ۲ لا = ۲ جم ۲ لا

یہ مساوات ایک متماثلہ (identity) ہو جاتی ہے جبکہ ا۱ = ۰ اور ا۲ = ½ ما = و والی مساوات میں تعویض کرنے سے ما = و = ½ لا جب ۲ لا حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا عمل - پس دی ہوئی مساوات کا پورا حل ہے

ما = ج۱ جم ۲ لا + ج۲ جب ۲ لا + ½ لا جب ۲ لا

اب ہمیں ج۱ اور ج۲ کی قیمتیں معلوم کرنی ہیں درانحالیکہ

ما = ۰ اور فر ما / فر لا = ۲ جبکہ لا = ۰

ما کے پورے حل کی مساوات کو تفرق کرنے سے

فر ما / فر لا = − ۲ ج۱ جب ۲لا + ۲ ج۲ جم ۲لا + ۱/۲ جب ۲لا + لا جم ۲لا

ما اور فر ما / فر لا کی مساواتوں میں مصرحہ بالا شرائط تعویض کرنے سے

۰ = ج۱ ، ۲ = ۲ج۲ ∴ ج۱ = ۰ اور ج۲ = ۱

پس مطلوبہ خاص حل ہے ما = جب ۲لا + ۱/۲ لا جب ۲لا　　　جواب

## مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کے پورے حل معلوم کرو : —

(۱) فر۲ س / فر و۲ − ۶ فر س / فر و + ۱۳ س = ۳۹

[جواب ؛ س = ق^۳و (ج۱ جم ۲و + ج۲ جب ۲و) + ۳

(۲) فر۲ ما / فر و۲ − ۴ فر ما / فر و + ۷ما = ۱۴

[جواب ؛ ما = ق^۲و (ج۱ جم √۳ و + ج۲ جب √۳ و) + ۲

(۳) فر۲ ما / فر لا۲ − فر ما / فر لا − ۲ ما = ق^لا

[جواب ؛ ما = ج۱ ق^۲لا + ج۲ ق^−لا + ۱/۳ لا ق^۲لا

(۴) فر۲ ما / فر لا۲ − ۹ لا = ۶ جم ۳و　　[جواب ؛ لا = ج۱ ق^۳و + ج۲ ق^−۳و − ۱/۳ جم ۳و

(۵) فر۲ لا / فر و۲ − ۲ فر لا / فر و + ۵لا = ۱۰ جب و

[جواب ؛ لا = ق^و (ج۱ جم ۲و + ج۲ جب ۲و) + ۲ جب و + جم

ذیل کی مثالوں میں خاص حل دریافت کرو جو دی ہوئی شرائط کو پورا کرتا ہے۔

(۶) $\frac{فر^2 لا}{فر و^2} - ۳ \frac{فر لا}{فر و} = ۶$، لا = ۱، $\frac{فر لا}{فر و} = ۱$ جبکہ و = ۰

[جواب، لا = $و^3 - ۲و$]

(۷) $\frac{فر^2 ا}{فر لا^2} - ۵ \frac{فر ا}{فر لا} + ۶ ا = ۲ و^{لا}$، ا = ۱، $\frac{فر ا}{فر لا} = ۱$ جبکہ و = ۰

[جواب، ا = $و^{لا}$]

## ۹۔ میکانیات کے بعض مسائل میں تفرقی مساواتوں کا استعمال ـــ

مثال (۱) ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے اس کا اسراع ایک مقررہ مقام سے اس کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ (ا) اس کی رفتار اور طے شدہ فاصلہ، (ب) وقت اور طے شدہ فاصلہ کے مابین رابطے دریافت کرو۔

حل (ا) فاصلہ کو س، رفتار کو ر، اسراع کو ا اور وقت کو و سے تعبیر کرو۔

$$تب\ ر = \frac{فر س}{فر و} \quad ا = \frac{فر^2 س}{فر و^2} = \frac{فر ر}{فر و} = \frac{فر ر}{فر س} \frac{فر س}{فر و} = \frac{فر ر}{فر س} ر$$

مفروضہ کے لحاظ سے $ا = -\frac{ک}{س^2}$ جس میں ک ایک مستقل ہے۔ تب $ر \frac{فر ر}{فر س} = -\frac{ک}{س^2}$

$$پس \int_{\cdot}^{ر} ر\, فر ر = -ک \int_{س_1}^{س_2} \frac{فر س}{س^2} \quad \therefore \frac{1}{2} ر^2 = ک \left[ \frac{1}{س_2} - \frac{1}{س_1} \right]$$

اور

$$ر = \sqrt{\frac{۲ک (س_1 - س_2)}{س_1 س_2}}$$

(ب) اگر فاصلہ $\text{س}_1$ پر ذرہ حالت سکون میں ہے اور وقت و کے بعد اس کا فاصلہ $\text{س}_2$ ہے تو

$$\text{ر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرو}} = \sqrt{\frac{2\text{ک}(\text{س}_1 - \text{س}_2)}{\text{س}_1 \text{س}_2}} \quad \therefore \text{فرو} = \sqrt{\frac{\text{س}_1 \text{س}_2}{2\text{ک}(\text{س}_1 - \text{س}_2)}}\ \text{فرس}$$

$$\text{اور}\quad \int_0^{\text{و}} \text{فرو} = \frac{1}{\sqrt{2\text{ک}}} \int_{\text{س}_1}^{\text{س}_2} \sqrt{\frac{\text{س}_1 \text{س}_2}{\text{س}_1 - \text{س}_2}}$$

$\text{س}_2 = \text{س}_1 \text{جم}^2 \text{ط}$ لکھو تب $\text{جم ط} = \sqrt{\frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}}$ ، $\sqrt{\text{س}_1 \text{س}_2} = \text{س}_1 \text{جم ط}$

$\sqrt{\text{س}_1 - \text{س}_2} = \sqrt{\text{س}_1}\ \text{جب ط}$ اور $\text{فرس}_2 = \text{س}_1(-2\ \text{جم ط جب ط فرط})$

یعنے $\text{فرس}_2 = -2\ \text{جم ط جب ط فرط}$ اور تکملہ کی زیرین حد = ۰

(اس لیے کہ $\text{س}_2 = \text{س}_1 \text{جم ط}$ اور وہ $\text{س}_1$ ہو جاتی ہے جبکہ ط = ۰)

$$\therefore \text{و} = \frac{-1}{\sqrt{2\text{ک}}} \int_0^{\text{ط}} 2\,\text{س}_1^{\frac{3}{2}}\ \text{جم}^2\text{ط فرط} = -\frac{1}{\sqrt{2\text{ک}}} \int_0^{\text{ط}} \text{س}_1^{\frac{3}{2}} (1 + \text{جم}\,2\text{ط})\ \text{فرط}$$

$$= -\frac{\text{س}_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\text{ک}}} \left\{ \text{س}_1 \text{ط} + \text{س}_1 \text{جب ط جم ط} \right\}$$

$$= -\sqrt{\frac{\text{س}_1}{2\text{ک}}} \left\{ \text{س}_1 \text{جم}^{-1} \sqrt{\frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}} + \sqrt{\text{س}_2(\text{س}_1 - \text{س}_2)} \right\}$$

اگر وقت $(\text{و} - \text{و}_0)$ میں فاصلہ $(\text{س}_0 - \text{س})$ طے ہوتا ہے تو

$\text{ر} = 2\text{ک}\left(\frac{1}{\text{س}_2} - \frac{1}{\text{س}_1}\right)$ سے آغاز کرکے $\text{س}_1 = \infty$ لکھنے سے

$\text{ر} = -\sqrt{\frac{2\text{ک}}{\text{س}_2}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرو}}$ حاصل ہوتا ہے پس $\text{فرو}\sqrt{2\text{ک}} = -\sqrt{\text{س}_2}\ \text{فرس}$

متغیروں کو جدا کرکے تکمل کرنے سے $\sqrt{2\text{ک}} \int_{\text{و}_0}^{\text{و}} \text{فرو} = -\int_{\text{س}_0}^{\text{س}} \text{س}^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore (\text{و} - \text{و}_0) = \frac{2}{3\sqrt{2\text{ک}}} \left(\text{س}_0^{\frac{3}{2}} - \text{س}^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\text{ک}}} \left(\text{س}_0^{\frac{3}{2}} - \text{س}^{\frac{3}{2}}\right)$$

**مثال (۲)** ذرہ خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے لیکن اسراع میں اس کی رفتار کے تناسب گھٹاؤ واقع ہوتا ہے۔
[ کہر یا پانی کے مہین قطرے غیر متحرک ہوائی فضاء میں اسی طرح حرکت کرتے ہیں ]

حل۔ (ا) رفتار اور وقت میں تعلق۔ س، ر اور ا کو ایک ہی سمت میں مثبت مانو اور فرض کرو کہ اسراع میں گھٹاؤ اس طرح سے واقع ہوتا ہے کہ رفتار جب رم ہوتی ہے تو مخالف اسراع ا کے برابر ہوجاتی ہے۔ پس اس حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فرر}}{\text{فرو}} = \text{ر}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} = \text{ا} - \frac{\text{ا}}{\text{رم}}\,\text{ر} = \frac{\text{ا}}{\text{رم}}\left(\text{رم} - \text{ر}\right)$$

فرض کرو کہ ذرہ مبداء پر حالت سکون میں ہے اور اس پر اسراع ا عاید کیا جاتا ہے جبکہ و = ۰
تب متغیروں کو جدا کرکے تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{رم}}\int_{0}\text{فرو} = \int_{0}\frac{\text{فرر}}{\text{رم} - \text{ر}}$$

پس $\frac{\text{ا}}{\text{رم}}\,\text{و} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{رم}}{\text{رم} - \text{ر}}\right)$ یعنے $\text{و} = \frac{\text{رم}}{\text{ا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{رم}}{\text{رم} - \text{ر}}\right)$

$$\text{یا}\quad \text{و}^{\frac{\text{او}}{\text{رم}}} = \frac{\text{رم}}{\text{رم} - \text{ر}}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{ر} = \text{رم}\left(1 - \text{و}^{-\frac{\text{او}}{\text{رم}}}\right)$

(ب) رفتار اور فاصلہ میں تعلق۔

$$\text{چونکہ}\quad \frac{\text{فرر}}{\text{فرو}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرو}}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} = \text{ر}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}$$

اس لیے (۱) کی ابتدائی مساوات حرکت ہوجاتی ہے

$$ر\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} = \frac{\text{و}}{\text{رم}}\left(\text{رم} - \text{ر}\right)$$

اب متغیروں کو جدا کرکے تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{و}}{\text{رم}}\int_{\circ}^{\text{س}} \text{فرس} = \int_{\circ}^{\text{ر}} \frac{\text{رفرر}}{\text{رم} - \text{ر}} = -\int_{\circ}^{\text{ر}} \frac{\text{ر} - \text{رم} + \text{رم}}{\text{ر} - \text{رم}}\ \text{فرر}$$

$$\text{پس}\quad \frac{\text{و}}{\text{رم}}\,\text{س} = -\text{ر} + \text{رم}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \frac{\text{رم}}{\text{رم} - \text{ر}}$$

## ۱۰۔ ن۔ ویں رتبہ کی مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتیں۔

تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} + \text{ک}_{1}\,\frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-1}} + \text{ک}_{2}\,\frac{\text{فر}^{\text{ن}-2}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-2}} + \dots + \text{ک}_{\text{ن}}\,\text{ما} = \circ \qquad (\text{ط})$$

(جس میں $\text{ک}_1$، $\text{ک}_2$ ..... $\text{ک}_{\text{ن}}$ مستقل ہیں) کے حل کے لیے اگر مساوات کے بائیں جانب کے رکن میں ما کے بجائے $\text{و}^{\text{رلا}}$ تعویض کیا جائے تو

$(\text{ر}^{\text{ن}} + \text{ک}_1\,\text{ر}^{\text{ن}-1} + \text{ک}_2\,\text{ر}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ک}_{\text{ن}})\,\text{و}^{\text{رلا}}$ حاصل ہوتا ہے۔ اور یہ جملہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے جو مساوات

$$\text{ر}^{\text{ن}} + \text{ک}_1\,\text{ر}^{\text{ن}-1} + \text{ک}_2\,\text{ر}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ک}_{\text{ن}} = \circ \qquad (1)$$

کی تصدیق کرتی ہیں منعدم ہو جاتا ہے۔

پس ر کی ان تمام قیمتوں کے لیے $\text{و}^{\text{رلا}}$ مساوات (ط) کا ایک حل ہے۔ مساوات (۱) مساوات (ط) کی امدادی کہلاتی ہے۔ واضح ہو کہ دونوں مساواتوں کے سر ایک ہی ہیں۔ (۱) کے قوت نما (ط) کے مشتقات کے رتبوں کے

متناظر ہیں اور ما کی بجائے ا درج ہے۔ (ا) کی اصلوں سے ہم مساوات (ط) کے خاص حل لکھ سکتے ہیں۔ اور یہ نتائج بعینہٖ مثال کے نتائج ہیں جبکہ مساوات کا رتبہ دو سے متجاوز ہے۔ ان کا ثبوت اس نصاب سے بالاتر نصاب کی کتابوں میں مل سکتا ہے۔

## تفرقی مساوات (ط) کے حل کا قاعدہ۔

پہلا عمل۔ متناظر امدادی مساوات

$$ر^{ن} + ک_۱ ر^{ن-۱} + ک_۲ ر^{ن-۲} + \ldots ک_{ن} = ۰ \ldots\ldots (۱)$$

لکھ دی جائے۔

دوسرا عمل۔ امدادی مساوات کو پورا حل کیا جائے

تیسرا عمل۔ امدادی مساوات کی اصلوں سے تفرقی مساوات کے متناظر خاص حل (بموجب اشارات ذیل) لکھ لیا جائے۔

| | امدادی مساوات کی | | تفرقی مساوات کا |
|---|---|---|---|
| (ا) | ہر علیحدہ اصل $ر_۱$ | سے حاصل ہوتا ہے | ایک خاص حل $و^{ر_۱ لا}$ |
| (ب) | ہر علیحدہ خیالی اصلوں کے جفت $ا \pm ب\sqrt{-۱}$ | سے حاصل ہوتے ہیں | دو خاص حل $و^{الا}$ جم بلا و $و^{الا}$ جب بلا |
| (ج) | ایک مضعفی اصل سے جو س مرتبہ واقع ہوتی ہے | حاصل ہوتے ہیں | س (یا ۲س) خاص حل (ا) یا (ب) خاص حلوں کو ۱، لا، لا$^۲$ ..... لا$^{س-۱}$ سے ضرب دیکر |

چوتھا عمل۔ اس طرح حاصل شدہ ن آزاد حلوں میں سے ہر ایک حل کو ایک اختیاری مستقل سے ضرب دے کر نتائج جمع کر لیے جائیں۔ اس نتیجہ کو ما کے مساوی لکھنے سے مساوات کا پورا حل دستیاب ہوتا ہے

[ نوٹ۔ صحت عمل کا ایک امتحان یہ ہے کہ پہلے تین عملوں سے ن آزاد

حل حاصل ہونے چاہییں۔]

**توضیحی مثال (۱)** حل کرو $\frac{\text{ف}^{3}\text{ا}}{\text{فلا}^{3}} - \frac{\text{ف}^{2}\text{ا}}{\text{فلا}^{2}} - ۸\frac{\text{فا}}{\text{فلا}} + ۱۲\,\text{ا} = ۰$

حل۔ مصرحہ بالا قاعدہ کی رو سے

**پہلا عمل**۔ معاون مساوات ہے $\text{ر}^{3} - \text{ر}^{2} - ۸\text{ر} + ۱۲ = ۰$

یعنے $(\text{ر} - ۲)(\text{ر} - ۲)(\text{ر} + ۳) = ۰$

**دوسرا عمل**۔ اس کی اصلیں ہیں ۲، ۲، ۳-

**تیسرا عمل**۔ (ج) دوہری اصل ۲ سے حاصل ہوتے ہیں حل $\text{و}^{2\text{لا}}$، $\text{لا}\,\text{و}^{2\text{لا}}$

(د) اصل ۳- سے حاصل ہوتا ہے حل $\text{و}^{-3\text{لا}}$

**چوتھا عمل**۔ پس پورا حل ہے $\text{ا} = \text{ج}_{1}\text{و}^{2\text{لا}} + \text{ج}_{2}\text{لا}\,\text{و}^{2\text{لا}} + \text{ج}_{3}\text{و}^{-3\text{لا}}$ جواب

**توضیحی مثال (۲)**۔ حل کرو $\frac{\text{ف}^{4}\text{ا}}{\text{فلا}^{4}} - ۵\frac{\text{ف}^{3}\text{ا}}{\text{فلا}^{3}} + ۵\frac{\text{ف}^{2}\text{ا}}{\text{فلا}^{2}}$

$+ ۲۵\frac{\text{فا}}{\text{فلا}} + ۲۶\,\text{ا} = ۰$

حل۔ معاون مساوات ہے $\text{ر}^{4} - ۵\text{ر}^{3} + ۵\text{ر}^{2} + ۲۵\text{ر} - ۲۶ = ۰$

یعنے $\{\text{ر} - (۳ \pm ۲\sqrt{-۱})\}(\text{ر} - ۱)(\text{ر} + ۲) = ۰$

جس کی اصلیں ہیں $۳ \pm ۲\sqrt{-۱}$ ، ۱، ۲-

پس پورا حل ہے

$\text{ا} = \text{ج}_{1}\text{و}^{3\text{لا}}\,\text{جم}\,۲\text{لا} + \text{ج}_{2}\text{و}^{3\text{لا}}\,\text{جب}\,۲\text{لا} + \text{ج}_{3}\text{و}^{\text{لا}} + \text{ج}_{4}\text{و}^{-2\text{لا}}$ جواب

## مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کے پورے حل دریافت کرو:—

(۱) $\frac{\text{فر}^4\text{ا}}{\text{فر لا}^4} - \text{و}\frac{\text{فر}^3\text{ا}}{\text{فر لا}^3} - \text{و}^2\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فر لا}^2} - \text{و}^3\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} - 2\,\text{و}^4\,\text{ا} = 0$

[جواب $\text{ا} = \text{ج}_1\text{و}^{2\text{ولا}} + \text{ج}_2\text{و}^{-\text{ولا}} + \text{ج}_3\,\text{جم ولا} + \text{ج}_4\,\text{جب ولا}$

(۲) $\frac{\text{فر}^3\text{ا}}{\text{فر و}^3} + \frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فر و}^2} - 12\frac{\text{فر ا}}{\text{فر و}} = 0$ [جواب $\text{ا} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2\text{و}^{3\text{و}} + \text{ج}_3\text{و}^{-4\text{و}}$

(۳) $\frac{\text{فر}^3\text{لا}}{\text{فر و}^3} + 3\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فر و}^2} - 4\,\text{لا} = 0$ [جواب $\text{لا} = \text{ج}_1\text{و}^{\text{و}} + \text{ج}_2\text{و}^{-\text{و}} + \text{ج}_3\,\text{جم}\,2\text{و} + \text{ج}_4\,\text{جب}\,2\text{و}$

(۴) $27\frac{\text{فر}^3\text{ا}}{\text{فر لا}^3} - 27\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فر لا}^2} + 9\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} - \text{ا} = 0$ [جواب $\text{ا} = (\text{ج}_1\text{لا}^2 + \text{ج}_2\text{لا} + \text{ج}_3)\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{3}}$

(۵) $\frac{\text{فر}^4\text{ا}}{\text{فر لا}^4} + 3\frac{\text{فر}^3\text{ا}}{\text{فر لا}^3} + 3\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فر لا}^2} + \frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = 0$

[جواب $\text{ا} = \text{ج}_1 + \text{و}^{-\text{لا}}(\text{ج}_2 + \text{ج}_3\text{لا} + \text{ج}_4\text{لا}^2)$

## خطی تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ا}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} + \text{ک}_1\frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\text{ا}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-1}} + \text{ک}_2\frac{\text{فر}^{\text{ن}-2}\text{ا}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-2}} + \ldots + \text{ک}_{\text{ن}}\,\text{ا} = \text{V} \quad (\text{ی})$$

جس میں $\text{ک}_1$، $\text{ک}_2$ ... $\text{ک}_{\text{ن}}$ مستقل ہیں اور V یا تو لا کا کوئی تفاعل ہے یا مستقل مثلاً میں مساوات (ح) کے حل کرنے کے طریقوں سے حل کی جاتی ہے۔ اس کے متعلقہ جو تین عمل وہاں درج ہیں یہاں بھی استعمال ہوتے ہیں۔

پہلے مساوات (ط) حل کی جانی چاہیے جس سے اس کا پورا حل

$$\text{ا} = \text{ی} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

حاصل ہو جاتا ہے۔ تب ی دی ہوئی مساوات (ی) کا متمم تفاعل ہے۔ پھر کسی بھی طریقہ سے (ی) کا کوئی خاص حل معلوم کر لیا جائے۔ فرض کرو کہ وہ ہے

$$\text{ا} = \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

تب (ی) کا پورا حل ہے

$$\text{ا} = \text{ی} + \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

(۳) کی دریافت میں ن = ۲ کے لیے مساوات (ح) سے متعلق آزمائش کے جو طریقے بتائے گئے ہیں یہاں ن کی کسی قیمت کے لیے بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

کسی حالت میں بھی (ی) کا کوئی خاص معلوم کرنے کے لیے ذیل کے قاعدہ پر عمل کیا جا سکتا ہے۔

پہلا عمل ۔ دی ہوئی مساوات (ی) کو متواتر تفرق کرو اور یا براہ راست یا اسقاط کے ذریعہ (ط) کی صورت کی بلند تر رتبہ والی مساوات حاصل کرو۔

دوسرا عمل ۔ اس نئی مساوات کو قاعدہ مندرجہ صفحہ (     ) سے حل کر کے اس کا پورا حل

$$ا = ء + و$$

حاصل کرو ۔ جس میں جزو ء مساوات (ی) کا پہلے عمل سے قبل ازیں دریافت شدہ متمم تفاعل ہے اور ر مزید دریافت شدہ رقموں کا حاصل جمع ہے۔

[طریقۂ عمل سے واضح ہے کہ ابتدائی مساوات کا ہر ایک حل مشتقہ مساوات کا بھی حل ہونا چاہیئے]

تیسرا عمل ۔ خاص حل و میں تکمل کے مستقلوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات (ی) میں

$$ا = و$$

اور اس کے مشتقات تعویض کرو ۔ بطور نتیجہ جو تماثل صورت پذیر ہو اس میں مشابہ رقموں کے سروں کو مساوی لکھو ۔ ان مساواتوں کو حل کر کے تکمل کے مستقلوں کو معلوم کرلو اور ان کی قیمتوں کو

$$ا = ء + و$$

میں تعویض کردو ۔ اب مساوات (ی) کا پورا حل دستیاب ہوجائیگا۔

## توضیحی مثال ۔ تفرقی مساوات

$$\frac{ف^۳ ا}{ف لا^۳} - ۲ \frac{ف^۲ ا}{ف لا^۲} - \frac{ف ا}{ف لا} + ۲ ا = و^{لا} \quad \ldots\ldots (۱)$$ کو حل کرو۔

حل۔ پہلے $\frac{فر^{۳} ا}{فرلا^{۳}} - ۲ \frac{فر^{۲} ا}{فرلا^{۲}} - \frac{فر ا}{فرلا} + ۲ ا = ۰$ ......... (۲) کا حل لکھ ڈالو۔

اس کے لیے $ر^{۳} - ۲ ر^{۲} - ر + ۲ = ۰$ ...... (۳) کی اصلیں معلوم ہونی چاہییں۔
یعنے $(ر - ۱)(ر + ۱)(ر - ۲) = ۰$ کی اصلیں اور وہ ۱، -۱ اور ۲ ہیں۔
پس متمم تفاعل ی ہے۔

$$ا = ی = ج_{۱} و^{لا} + ج_{۲} و^{-لا} + ج_{۳} و^{۲لا} \quad ......... (۴)$$

**پہلا عمل۔** دی ہوئی مساوات کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{فر^{۴} ا}{فرلا^{۴}} - ۲ \frac{فر^{۳} ا}{فرلا^{۳}} - \frac{فر^{۲} ا}{فرلا^{۲}} + ۲ \frac{فر ا}{فرلا} = و^{لا} \quad ......... (۵)$$

اس میں سے مساوات (۱) کو وضع کرنے سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\frac{فر^{۴} ا}{فرلا^{۴}} - ۳ \frac{فر^{۳} ا}{فرلا^{۳}} + \frac{فر^{۲} ا}{فرلا^{۲}} + ۳ \frac{فر ا}{فرلا} - ۲ ا = ۰ \quad ...... (۶)$$

مساوات اب صورت (ط) کی سی ہو گئی۔

**دوسرا عمل۔** (۵) کو حل کرنے کے لیے معاون مساوات ہے

$$ر^{۴} - ۳ ر^{۳} + ر^{۲} + ۳ ر - ۲ = ۰ \quad ......... (۷)$$

اس کے سیدھے جانب کے رکن کو $ر^{۳} - ۲ ر^{۲} - ر + ۲$ پر تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم $(ر - ۱)$ دستیاب ہوتا ہے۔

پس $ر^{۴} - ۳ ر^{۳} + ر^{۲} + ۳ ر - ۲ = (ر - ۱)(ر + ۱)(ر - ۲)(ر - ۱) = ۰$ ...... (۸)

جس کی اصلیں ہیں ر = ۱، -۱، ۲، ۱ پس (۸) کا پورا حل ہے۔

$$ج_{۱} و^{لا} + ج_{۲} و^{-لا} + ج_{۳} و^{۲لا} + ج_{۴} لا و^{لا}$$

**تیسرا عمل۔** (۳) اور (۸) کا باہمدیگر مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

ما = و = ج۳ لا $و^{لا}$ ............... (۹)

ج۳ کی موزوں قیمت کے لیے مساوات (۱) کا ایک خاص حل ہوگا -

(۹) کو تفرق کرنے سے

$\frac{فر ما}{فر لا}$ = ج۳ $و^{لا}$ + ج۳ لا $و^{لا}$

$\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ = ۲ ج۳ $و^{لا}$ + ج۳ لا $و^{لا}$ ....... (۱۰)

$\frac{فر^{۳} ما}{فر لا^{۳}}$ = ۳ ج۳ $و^{لا}$ + ج۳ لا $و^{لا}$

مساوات (۱) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے اور $و^{لا}$ پر تقسیم کرنے سے نتیجہ حاصل ہوتا ہے

- ۲ ج۳ = ۱

لا کی مشابہ قوتوں کے سروں کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے ج۳ = - $\frac{۱}{۲}$

اس قیمت کو (۹) میں تعویض کرنے سے ما = و = - $\frac{۱}{۲}$ لا $و^{لا}$

∴ دی ہوئی مساوات کا پورا حل ہے ما = ی + و = ج۱ $و^{لا}$

+ ج۲ $و^{-لا}$ + ج۳ $و^{۲لا}$ - $\frac{۱}{۲}$ لا $و^{لا}$ جواب

# مثالیں

مندرجۂ ذیل تفرقی مساواتوں کے پورے حل معلوم کرو :-

(۱) $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ + ۳ $\frac{فر ما}{فر لا}$ + ۲ ما = ۳ لا

[جواب ما = ج۱ $و^{-۲لا}$ + ج۲ $و^{-لا}$ + $\frac{۳}{۲}$ (لا - $\frac{۳}{۲}$)

(۲) $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ - ۲ $\frac{فر ما}{فر لا}$ - ۳ ما = ۴ $و^{۳لا}$ - ۱۲

[جواب ما = ج۱ $و^{۳لا}$ + ج۲ $و^{-لا}$ + لا $و^{۳لا}$ + ۴

(۳) $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ - ۲ $\frac{فر ما}{فر لا}$ + ۲ ما = لا $و^{لا}$

[جواب ما = ج۱ $و^{لا}$ + ج۲ $و^{لا}$ - $و^{لا}$ (لا + $\frac{۱}{۲}$ $لا^{۲}$)

(۴) $\frac{\text{فر}^{3}\text{ی}}{\text{فرط}^{3}} - ۲\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فرط}^{2}} + \frac{\text{فری}}{\text{فرط}} = \text{و}^{\text{ط}}$

[جواب، $\text{ی} = \text{ج}_{1} + \text{و}^{\text{ط}}\left(\text{ج}_{2} + \text{ج}_{3}\,\text{ط} + \frac{\text{ط}^{2}}{۲}\right)$

(۵) $\frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرو}^{2}} - ۹\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}} + ۲۰\,\text{س} = \text{و}^{2}\,\text{و}^{3\text{و}}$

[جواب، $\text{س} = \text{ج}_{1}\,\text{و}^{4\text{و}} + \text{ج}_{2}\,\text{و}^{5\text{و}} + \frac{\text{و}^{3\text{و}}\,(۲\text{و}^{2}+۶\text{و}+۷)}{۴}$

(۶) $\frac{\text{فر}^{4}\text{ا}}{\text{فرو}^{4}} - \text{ا} = \text{و}^{3}$　[جواب، $\text{ا} = \text{ج}_{1}\,\text{و}^{\text{و}} + \text{ج}_{2}\,\text{و}^{-\text{و}} + \text{ج}_{3}\,\text{جم}\,\text{لا} + \text{ج}_{4}\,\text{جب}\,\text{لا} - \text{لا}^{3}$

(۷) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فرلا}^{2}} + ۴\,\text{ا} = ۸\,\text{و}^{2\text{لا}} + ۱۵\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

[جواب، $\text{ا} = \text{ج}_{1}\,\text{جم}\,۲\text{لا} + \text{ج}_{2}\,\text{جب}\,۲\text{لا} + \text{و}^{2\text{لا}} + ۴\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

---

ختم شد

# فہرست اصطلاحات

## نصاب ذیلی ریاضی

### حصۂ دوّم

| انگریزی | اُردو |
|---|---|
| **A** | |
| Approximation | تقرّب |
| Arbitrary constant | اختیاری مستقل |
| Arithmetic mean | اوسط حسابی |
| Asymptote | متقارب |
| Auxiliary equation | امدادی مساوات |
| Axis | محور |
| **B** | |
| Binomial Theorem | مسئلۂ ثنائی |
| **C** | |
| Cardioid | خط صنوبری |
| Catenary | زنجیو |
| Cissoid | لبلابی |

| انگریزی |
|---|
| Co-axial |
| Coefficient |
| Complex |
| Conic |
| Conjugate |
| Cubic |
| Curve |
| Cusp |
| Cycloid |
| **D** |
| Denominator |
| Determinant |
| Dimensions |
| Director circle |

| اُردو | انگریزی |
|---|---|
| مرتب | Directrix |
| دوہرا تکملہ | Double integral |
| | **E** |
| خروج المرکز | Eccentricity |
| حاصل اسقاط | Eliminant |
| اسقاط | Elimination |
| ناقص | Ellipse |
| ناقص نما | Ellipsoid |
| لفّاف | Envelope |
| برپیچ | Evolute |
| پھیلاؤ | Expansion |
| مسئلۂ قوت نما | Exponential theorem |
| | **F** |
| ضربی | Factorial |
| ماسکہ | Focus |
| مقطوع | Frustrum |
| | **G** |
| عام مساوات | General equation |
| اوسط ہندسی | Geometric mean |
| گردشی نصف قطر | Gyration, radius of |
| | **H** |
| اوسط موسیقی | Harmonic mean |
| ہمزاد مساوات | Homogeneous equation |
| زائد | Hyperbola |
| زائدی تفاعل | Hyperbolic function |
| برتدویر | Hypocycloid |
| | **I** |
| خیالی | Imaginary |
| غیر محدود تکملہ | Indefinite integral |
| غیر متعین شکل | Indeterminate form |
| قوت نما | Index |
| معیار جمود | Inertia, moment of |
| صغاری | Infinitesimal |
| لاتناہی | Infinity |
| نقاط انعطاف | Inflexion, points of |
| تکملہ | Integral |
| متکمل | Integrand |
| تکملہ کا مستقل | Integration, constant of |
| متکمل جزو ضربی | Integrating factor |
| مقطوعہ | Intercept |
| بینی ادراج | Interpolation |
| ذاتی مساوات | Intrinsic equation |
| مقلوب تفاعل | Inverse function |
| درپیچ | Involute |
| | **L** |

| انگریزی | اُردو |
| --- | --- |
| Latus rectum | وترِ خاص |
| Lemniscate | دوبحشی (منحنی) |
| Limit | انتہا |
| Locus | طریق |
| Logarithmic differentiation | لوکارتمی تفرق |
| Logarithmic function | لوکارتمی تفاعل |
| Logarithmic series | لوکارتمی سلسلہ |
| **M** | |
| Major axis | محورِ اعظم |
| Mean value | اوسط قیمت |
| Mean value, Theorem of | اوسط قیمت کا مسئلہ |
| Minor axis | محورِ اصغر |
| Modulus | مقیاس |
| **N** | |
| Normal | عماد |
| Numerator | شمار کنندہ |
| Numerical | عددی |
| **O** | |
| Odd | طاق |
| Order | رتبہ |
| Origin | مبدا |

| انگریزی | اُردو |
| --- | --- |
| Orthogonal trajectories | قائم مرمیات |
| Osculating circle | لمسی دائرہ |
| **P** | |
| Parabola | مکافی |
| Paraboloid | مکافی نما |
| Parameter | مبدّل |
| Partial differentiation | جزوی تفرق |
| Partial fractions | جزوی کسور |
| Polar Co-ordinate | قطبی محدد |
| **R** | |
| Radius of curvature | نصف قطرِ انحنا |
| Radius vector | سمتی نیم قطر |
| Rational | منطق |
| Rectangular hyperbola | قائم زائد |
| Reduction formula | تحویلی ضابطہ |
| **S** | |
| Semi-cubical parabola | نیم کعبی مکافی |
| Singular points | نادر نقطے |
| Spiral | مرغولہ |

| انگریزی | اُردو |
|---|---|
| Subnormal | زیر عماد |
| Subtangent | زیر مماس |
| **T** | |
| Tangent | مماس |
| Total differential | کلی تفرق |
| Trajectories | خطوط رمی |
| **U** | |
| Unity | اِکائی |
| Unknown | نامعلوم |
| **V** | |
| Vector | سمتی |
| Value | قیمت |
| **W** | |
| Whole number | صحیح عدد |
| Witch of Agnesi | اگنیسی کی ڈائن |

# اغلاط نامہ

## نصابِ ذیلی ریاضی

### حصۂ دوم

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح | صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۵ | ۱۳ | وُ | رُ | ۱۴۶ | ۱۸ | میں ایں | میں اس |
| ۳۰ | ۹ | غیرحل | غیرحل | ۲۰۰ | ۴ | و۳ م قط۳ | و۲ م قط۲ |
| ۳۴ | ۸ | لوکس و لا | لوک و لا | ″ | ۱۰ | ذیل کو | ذیل جملوں کو |
| ۴۱ | ۱۰ | حب | جب | ″ | ۱۲ | ≠ م ۹ لا۲ | = م ۹ لا۳ |
| ۵۳ | ۱۴ | ا/۲ | ا/۲ | ۲۱۲ | ۱۶ | ع/۳ | ع/۳ |
| ۶۹ | ۱۰ | ور۳ ا / ولا۳ | فر۳ ا / فرلا۳ | ۲۵۰ | ۵ | ت م و | ب م ر |
| ۷۳ | ۱۸ | ۵/۴ | ۵/۳ | ۲۶۴ | ۲ | − لا/(۴ و۲) ) | − لا۲/(۴ و) ) |
| ۱۳۱ | ۷ | (مس ط + ح/ی) / (۱ − مس ح/ی) | (مس ط + ح/ی) / (۱ − مس ط ح/ی) | ″ | ۱۳ | مستقم | مستقیم |
| | | | | ۲۶۵ | ۹ | ۱/۳ | ۱/۲ |
| ۱۳۶ | ۱۲ | ۵۰ | ۵۰ | ۲۷۹ | ۱۲ | ۲/لا۲ | ۲/لا۳ |

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح | صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۳۰۹ | ۷ | (ط + | {(ط +)} | ۳۹۷ | ۹ | $\frac{جف\ ی}{حف\ لا}$ | $\frac{جف\ ی}{جف\ لا}$ |
| ۳۱۷ | ۳ | غ: $-(لا+۳ل)\sqrt{۲ل\,لا-لا^{۲}}$ | ص: $\frac{(لا+۳ل)\sqrt{۲ل\,لا-لا^{۲}}}{۳}$ | ۴۱۰ | ۵ | سے | کے |
| ۳۲۹ | ۳ | | Sector | ۴۱۱ | ۱۹ | بلحاط | بلحاظ |
| ۳۳۴ | ۱۹ | $ا + \frac{ل^{۲}}{ب_{۲}}$ | $ا + \frac{ل^{۲}}{۳ب}$ | ۴۲۳ | شکل | | (لا، ما) |
| ۳۴۲ | ۶ | $(ا + لا)^{۱}$ | $(ا + لا)^{۲}$ | ۴۳۰ | ۱۱ | $(ما^{\frac{۳}{۲}} - ما)$ | $(ما^{\frac{۳}{۲}} - ما)$ |
| ۳۴۷ | ۱۳ | $\frac{ط^{۳}}{۲} - \frac{ط^{۲}}{۲}$ | $\frac{ط^{۲}}{۴} - \frac{ط^{۳}}{۲}$ | ۴۳۴ | شکل | $ف_{۱}\ ف_{۲}$ | $ف_{۱}\ ف_{۲}\ ع$ |
| ″ | ۱۴ | $\frac{ص^{۳}}{۳}$ | $\frac{ع^{۳}}{۳}$ | ۴۳۹ | ۹ | $\frac{ب^{۲}}{و^{\frac{۳}{۲}}}$ | $\frac{ب^{۳}}{و^{\frac{۳}{۲}}}$ |
| ۳۴۷ | ۱۵ | $\frac{۳ط^{۲}}{۳} + \frac{۳۲ط^{۲}}{۶}$ | $\frac{۳ط^{۴}}{۳} + \frac{۳۲ط^{۶}}{۶}$ | ۴۶۵ | ۳ | $\frac{فرما}{فرلا}$ | $\frac{فرما}{فرلا}$ |
| | | | | ۴۸۳ | ۶ | $ک_{۱}$ | $ک_{۲}$ |